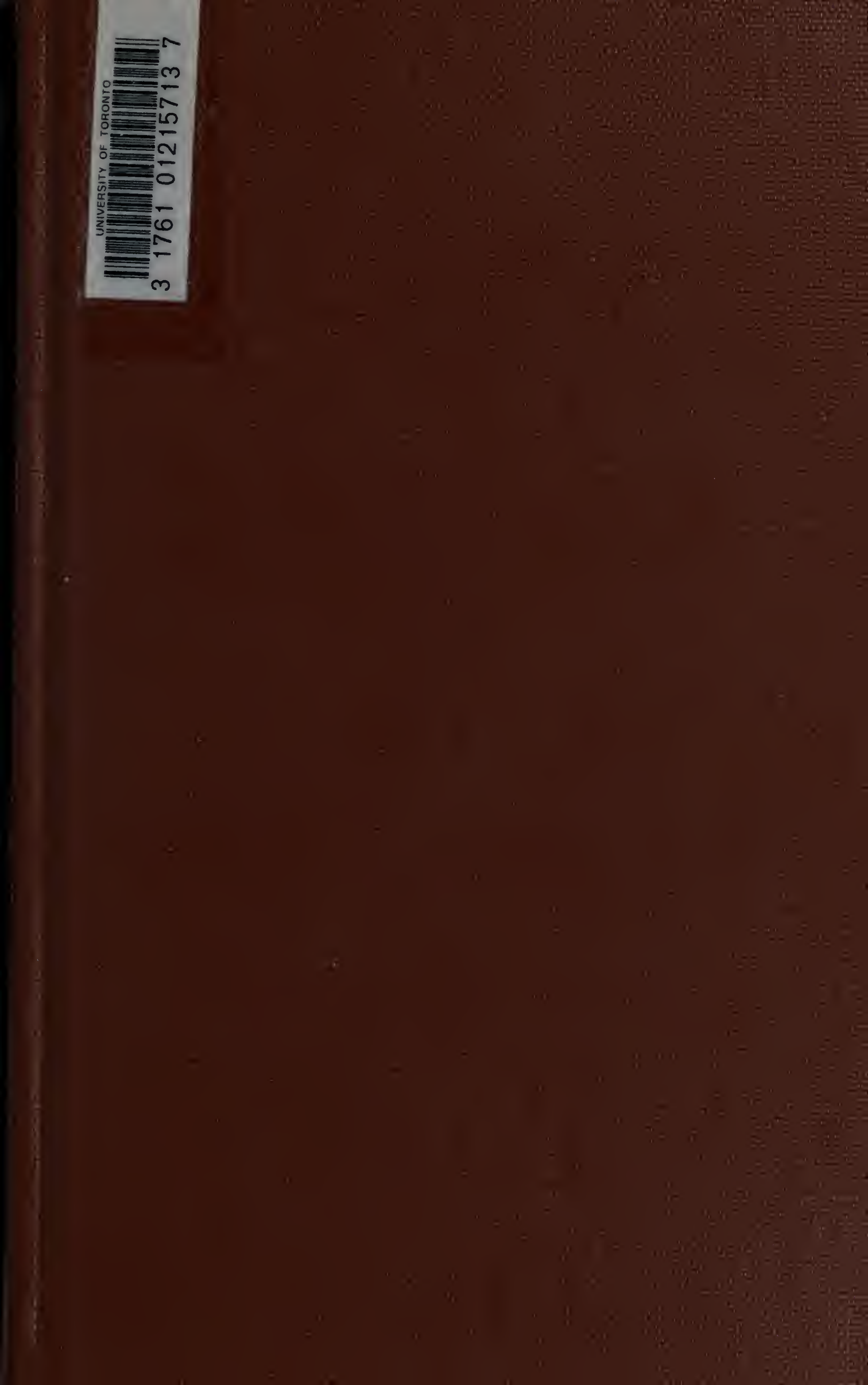
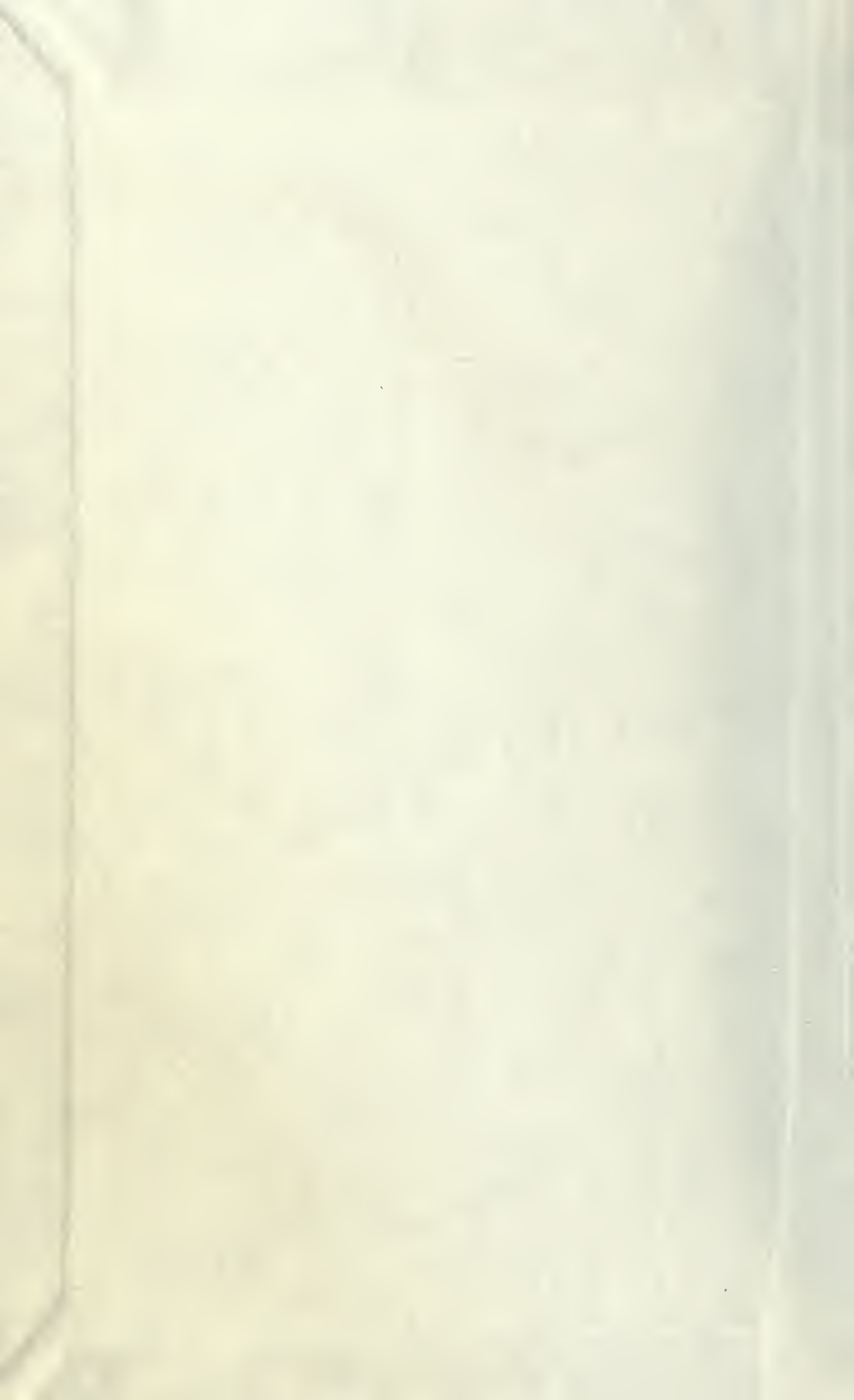
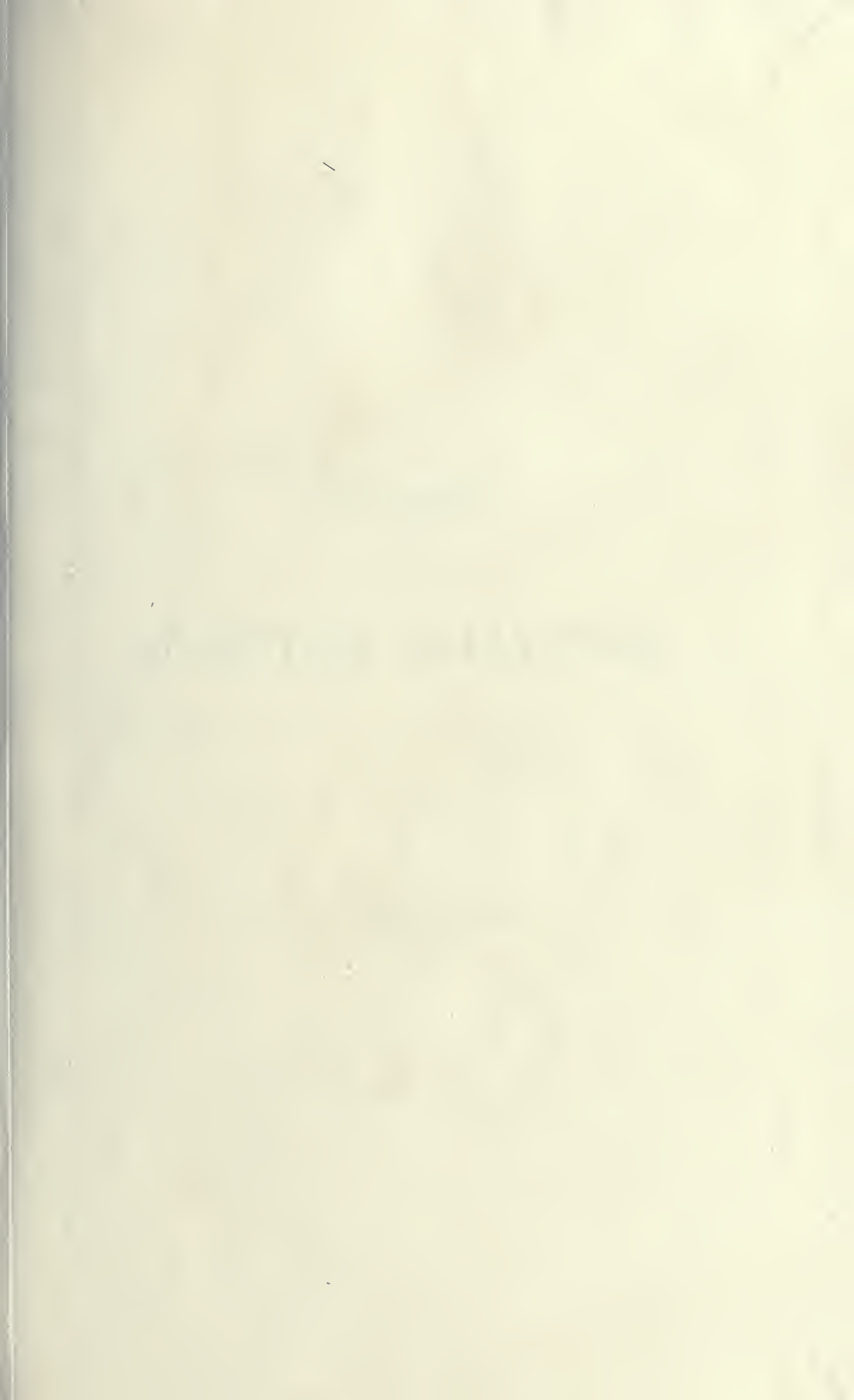








PRINCIPES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
57033 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

PRINCIPES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PAR

GASTON DARBOUX,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
DOYEN HONORAIRE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MEMBRE DU BUREAU DES LONGITUDES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET CIE, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

PRÉFACE.

Le nouveau Volume que je soumets aujourd'hui au jugement du public mathématique est le résumé de leçons que j'ai faites, depuis 1872, soit à l'École Normale supérieure, soit à la Faculté des Sciences de Paris. Avant d'être enseignées en public, les matières qui le composent ont été exposées en grande partie, avec d'autres encore, devant mes chers élèves de l'École Normale, de 1872 à 1876. Les théories générales qui forment la substance des quatre premiers Livres ont été l'objet de mon Enseignement à la Sorbonne, dès l'année scolaire 1879-1880. C'est en 1895-1896 que j'ai développé les principes de la *Géométrie Cayleyenne*. Enfin, les propriétés essentielles des *cyclides* ont fait, depuis l'année 1880-1881, partie intégrante de tous mes cours sur les *systèmes triples orthogonaux*.

Il ne faut pas regarder le présent Ouvrage comme un exposé didactique et systématique des principes et des méthodes de la belle création de *Descartes*. Il suppose une connaissance préalable des éléments de la *Géométrie analytique*. Son but essentiel est de préciser les notions relatives à l'imaginaire, à l'infini, etc., et de montrer qu'en Géométrie elles doivent prendre toute la place et toute l'importance qui leur ont été attribuées, depuis longtemps, en Analyse. Dans l'exposé de ces notions, je me suis attaché à rester aussi élémentaire que possible, et me suis interdit, à regret quelquefois, tout développement qui ne serait pas de nature à être compris par un bon élève de mathématiques spéciales.

Je dois, en terminant, remercier mes collègues MM. Cl. Guichard et Ernest Lebon du concours qu'ils ont bien voulu me prêter pour la correction des épreuves; je me reprocherais d'oublier mon excellent éditeur M. Gauthier-Villars. Malgré toutes les difficultés nées d'une guerre où la France combat pour la liberté et le salut du monde, il n'a pas craint de me faire confiance, d'accueillir et de mener à bien cette publication avec tout le soin auquel il nous a habitués.

Gaston DARBOUX.

10 janvier 1917.

PRINCIPES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

LIVRE I.

LE RAPPORT ANHARMONIQUE.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

Le but de ces Leçons est l'exposé des principes sur lesquels reposent les découvertes qu'on doit à Monge et à son école. — Étude du rôle que jouent l'imaginaire et l'infini dans les recherches géométriques modernes. — On peut employer deux méthodes; l'une, se rattachant aux coordonnées de Descartes, est celle qui sera suivie dans cet Ouvrage; l'autre, imaginée par Michel Chasles et complétée par von Staudt, ne paraît pas avoir prévalu.

Caractère propre des méthodes de l'Analyse et de la Géométrie moderne. — Emploi d'un petit nombre de principes généraux d'où découlent les conséquences particulières. Défauts de la Géométrie des Anciens.

Les premiers pas dans la voie moderne ont été faits par Desargues, les suivants sont en quelque sorte le résultat d'une nécessité logique. — Exemple emprunté à l'étude du développement de l'Algèbre.

Géométrie. — Le principe de continuité de Poncelet. Controverse avec Cauchy. — Introduction de l'imaginaire et de l'infini en Géométrie analytique. — Notions élémentaires sur les plans et les droites imaginaires. — Examen de l'objection qui a été faite par von Staudt à l'emploi des coordonnées pour définir les points imaginaires.

---

1. Le sujet que j'ai l'intention d'aborder dans le Cours de cette année est certainement un des plus intéressants de la Géométrie moderne. Je me propose d'exposer les principes sur lesquels reposent les découvertes géométriques qu'on doit à Monge et à son école. Cette étude des principes a un grand intérêt philoso-

phique; elle est trop négligée aujourd'hui. Et ce n'est pas sans injustice qu'on l'abandonne aux classes élémentaires, où elle ne peut être traitée avec l'ampleur qu'elle comporte, qu'elle mérite et que je serai libre de lui donner ici.

L'imaginaire et l'infini jouent aujourd'hui, dans toutes les recherches géométriques, un rôle important et quelquefois mal interprété; je vais donc commencer en rappelant comment on peut appuyer sur des bases solides l'emploi qu'on fait, dans la Géométrie moderne, de ces éléments, imaginaires ou rejetés à l'infini, inconnus à la Géométrie des Anciens.

2. En ce qui concerne les imaginaires, on peut suivre deux méthodes différentes : l'une, que j'exposerai d'une manière détaillée, est exclusivement analytique et repose sur l'emploi des coordonnées de Descartes. L'autre, au contraire, due à *Chasles*, exposée par cet illustre Maître dans la *Géométrie supérieure*, et complétée ensuite par un géomètre allemand, *von Staudt*, repose sur des considérations de pure géométrie. Chasles a montré d'abord, dans son *Traité de Géométrie supérieure*, comment on peut définir et introduire les éléments imaginaires en associant à chacun d'eux l'élément imaginaire conjugué et définissant ensuite l'ensemble de ces deux éléments par des fonctions symétriques, nécessairement réelles, de ces deux éléments. C'est ainsi qu'étant donnés deux points imaginaires conjugués sur une droite, nécessairement réelle, on peut les définir par l'intersection de cette droite et d'un cercle réel, ce qui fait connaître à la fois leur point milieu et le produit de leurs distances à un point quelconque de la droite, ou même de l'espace. Mais on voit que, dans cette méthode, deux points imaginaires conjugués ne sont pas séparés. Cela n'a pas d'inconvénients dans beaucoup d'applications où ces éléments entrent d'une manière symétrique. Cependant le rapport anharmonique de quatre points imaginaires sur une droite ne peut être ainsi défini. Supposons, pour fixer les idées, que, dans le courant d'une démonstration, on ait à considérer le rapport anharmonique de quatre points. Il peut se faire que, suivant les positions respectives des parties, ces quatre points soient tantôt réels, tantôt imaginaires; il faudrait donc distinguer les différents cas, faire pour chacun d'eux des démonstrations différentes, ou se

priver de l'emploi, si commode quelquefois, du rapport anharmonique.

3. Dans ses *Beiträge zur Geometrie der Lage*, parus en 1856-1860, von Staudt a fait disparaître la difficulté que nous signalons ici et, par une extension donnée à la méthode de Chasles, il est parvenu à définir géométriquement chaque élément imaginaire et à le distinguer de l'élément imaginaire conjugué. Cette extension, bien que rigoureuse, est très pénible et très abstraite. On peut la définir en substance comme il suit : deux points imaginaires conjugués peuvent toujours être considérés comme les points doubles d'une involution sur une droite réelle et, de même qu'on passe d'une imaginaire à sa conjuguée par le changement de i en $-i$, de même on distinguera les deux points imaginaires sur la droite en faisant correspondre chacun d'eux à l'un des deux sens différents qu'on peut attribuer à la droite. Il y a là quelque chose d'artificiel; le développement de la théorie est nécessairement un peu compliqué. Aussi cette méthode de von Staudt n'a pu réussir à prévaloir. Il semble que, pour l'introduction et l'interprétation des imaginaires, il vaut mieux s'en tenir à la méthode analytique qui repose sur l'emploi des coordonnées rectilignes. Nous nous bornerons donc exclusivement à ce mode d'exposition et nous développerons, en les précisant et en les rattachant à leur véritable origine, les notions analytiques qui se rapportent à ce sujet.

4. Le caractère propre des méthodes de l'Analyse et de la Géométrie modernes consiste dans l'emploi d'un petit nombre de principes généraux, indépendants de la situation respective des différentes parties ou des valeurs relatives des différents symboles; et les conséquences sont d'autant plus étendues que les principes eux-mêmes ont plus de généralité. Les Anciens ne s'étaient pas élevés à cette conception; toutes les fois, par exemple, que, dans une figure, deux droites auxiliaires étaient, tantôt parallèles, tantôt concourantes, ils donnaient des démonstrations distinctes pour chaque cas. Si, dans une figure, se présentaient une droite et un cercle, il pouvait se faire que la démonstration dût considérer successivement, et séparément, les trois cas où la droite était

sécante, tangente, ou non sécante, du cercle. Les démonstrations étant toujours faites sur une figure déterminée, toutes les fois que les rapports de situation venaient à changer, il y avait lieu aussi de recommencer la démonstration. Cela explique comment des Traités entiers ont été consacrés à des problèmes célèbres, qui se trouvent résolus en quelques lignes, soit dans la *Géométrie* de Descartes, soit dans la *Géométrie supérieure*. J'ajoute que les énoncés des propositions elles-mêmes devaient être multipliés de la même manière; et, bien que les démonstrations fussent tout à fait semblables pour tous ces cas particuliers, la nécessité de faire une foule de distinctions, de considérer tant de cas, de faire tant de divisions, aurait toujours arrêté les progrès de la Géométrie et l'aurait empêchée de s'élever beaucoup au-dessus des Éléments.

5. C'est *Desargues* qui a fait le premier pas dans la voie moderne en considérant deux droites parallèles comme concourantes et en introduisant ainsi implicitement ce qu'on appelle aujourd'hui les *points à l'infini*. Depuis, toutes les méthodes se sont perfectionnées d'une manière en quelque sorte fatale. L'esprit humain, dans ses recherches, obéit à des lois dont il ne se rend pas toujours compte. Rien n'est plus compliqué, ni plus obscur souvent, que les premières voies par lesquelles il atteint les vérités scientifiques. Les inventeurs ne procèdent pas d'une manière didactique, ils ne se préoccupent pas d'obtenir la plus grande généralité possible; mais les problèmes qui leur ont été proposés sont devenus tellement vastes qu'une nécessité inéluctable les a conduits, sans même qu'ils s'en rendissent toujours compte d'une manière tout à fait précise, à constituer peu à peu les méthodes générales sans lesquelles la Science n'eût pu faire de grands progrès.

6. Considérons, par exemple, l'Algèbre. Il est aisé de reconnaître, dans l'histoire des progrès de cette science, la vérité des remarques précédentes. *Viète*, son véritable créateur, désigne pour la première fois les inconnues et les données par des lettres, sur lesquelles il effectue certaines opérations. Mais il ne fait pas passer dans un seul membre tous les termes d'une équation, il ne connaît pas les quantités négatives; et, dans une équation du second degré

par exemple, il distingue autant de cas qu'il y a de combinaisons de signes pour les coefficients. Plus tard, *Harriot* et *Descartes* emploient les quantités négatives; Harriot, le premier, fait passer tous les termes dans un membre. Plus tard encore, les imaginaires s'introduisent sans qu'on puisse donner une théorie satisfaisante de ces éléments nouveaux dont s'enrichit la Science, par suite même des problèmes qu'elle rencontre successivement, et non certes en vertu d'un raisonnement *a priori*. Ouvrez les deux meilleurs Ouvrages d'enseignement du XVIIIe siècle, l'*Algèbre* d'Euler et l'*Introduction à l'analyse des infiniment petits* du même Auteur. Vous verrez, dans le premier de ces Ouvrages, une théorie (très sommaire) des quantités négatives qui ne serait aujourd'hui acceptée par personne, et, dans l'autre, une abondance merveilleuse de formules exactes relatives aux imaginaires ou reposant sur leur emploi. Mais ces formules, il aurait été bien difficile alors de les justifier rigoureusement, autrement que par la concordance de leurs résultats et l'intérêt des recherches auxquelles elles servaient de base. Aussi est-ce à cette époque qu'est prononcé le mot de *d'Alembert :* Allez en avant et la foi vous viendra. *Laplace*, après avoir établi des formules relatives aux intégrales définies où tous les éléments sont réels et supposés tels dans la démonstration, ne craint pas de les étendre au cas où quelques-uns de ces éléments deviennent imaginaires. Et, bien que son habileté merveilleuse le préserve des erreurs, il n'invoque, pour justifier cette extension, que « la généralité de l'Analyse », expression qui revient souvent dans ses Mémoires et dans ses Ouvrages. C'est à notre époque qu'il était réservé de produire, en Géométrie et en Analyse, une théorie vraiment satisfaisante des quantités négatives et imaginaires, qui a permis d'introduire en Algèbre une rigueur et une précision comparables à celle de la Géométrie ancienne, mais avec la généralité qui était inconnue à celle-ci.

7. La Géométrie donne lieu aux mêmes remarques. *Monge* d'abord et quelques-uns de ses disciples employaient ouvertement dans leurs recherches la méthode des coordonnées de Descartes. *Poncelet* au contraire, voulant constituer un corps de doctrine tout à fait indépendant, rencontra les difficultés que je viens de signaler. Pour les vaincre, ou plutôt pour les éluder, il inventa le fameux *Principe de continuité*, qui a donné naissance à tant de

discussions, notamment entre lui et Cauchy, et qu'on peut énoncer comme il suit : Toutes les fois que la démonstration d'une proposition a été obtenue en supposant réelles certaines parties de la figure qui interviennent dans la démonstration, la proposition subsiste quand ces parties disparaissent ou deviennent imaginaires, quoique la démonstration ne subsiste plus.

Ce principe est excellent et peut rendre de grands services; mais Poncelet lui a fait du tort en ne voulant pas le présenter sous son vrai jour et en ne proclamant pas nettement qu'il est simplement une conséquence de l'Analyse. Voici comment on peut le justifier analytiquement. Dans l'immense majorité des cas, une proposition géométrique se ramène à la vérification d'une ou de plusieurs relations rationnelles entre des quantités. Or, cette ou ces relations étant indépendantes de la réalité ou de l'imaginarité de certains éléments accessoires, il suffit de les démontrer, quand ils sont réels, pour en conclure qu'elles sont encore vraies lorsque ces éléments deviennent imaginaires.

Cauchy, d'autre part, se trompait en voulant réduire le Principe de continuité à une forte induction et en se refusant à remarquer que, dans toutes les applications de son principe, Poncelet ne considérait jamais de ces figures transcendantes auxquelles les objections de l'illustre Analyste auraient pu s'appliquer.

De ces deux grands géomètres, aucun n'avait complètement raison, il faut bien le dire, ni complètement tort. Il est des cas, comme ceux considérés par Poncelet, où le principe était applicable et avait plus que la valeur d'une forte induction. Il en est d'autres, au contraire, où il aurait pu conduire à des erreurs ([1]).

([1]) Pour préciser, par un exemple, la nature du différend entre Cauchy et Poncelet, supposons que, dans une question de Géométrie, on ait montré que la relation entre deux éléments réels x, x' est telle qu'à une valeur de l'un de ces éléments correspond une seule valeur de l'autre. Si, par la nature de la question on sait que cette relation est algébrique, on pourra conclure qu'elle est de la forme

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0$$

où A, B, C, D sont des constantes. Mais si l'on ne sait pas que la relation est algébrique, on pourra imaginer une foule d'autres formes de la relation; par exemple

$$x' = \varphi(x),$$

où φ désigne une fonction qui croît de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque x croît de la même manière. Ainsi on pourrait prendre

$$x' = e^x - e^{-x}.$$

8. Après ces remarques historiques, j'arrive à mon sujet, et je me propose de montrer comment l'application de cette loi que je viens de signaler, à savoir que les méthodes scientifiques ont une tendance naturelle à ne prendre pour appui que des propositions absolument générales, indépendantes, et de la grandeur des éléments, et de la situation relative des parties, a conduit par une voie inéluctable à toutes nos conventions de l'Analyse et de la Géométrie modernes, à l'introduction successive des quantités négatives, des quantités imaginaires, des points à l'infini, des points imaginaires à distance finie ou à distance infinie.

Je passe rapidement sur la théorie des quantités négatives. On sait que, si l'on se refusait à les introduire, cette proposition fondamentale de l'Algèbre qu'on applique à chaque instant dans les calculs, à savoir que, dans une somme algébrique, on peut intervertir l'ordre des parties, verrait son emploi soumis à un foule de restrictions, dépendantes de la grandeur et de la place des termes de la somme, et qu'elle conduirait, par suite, à une foule de distinctions et de subdivisions, de manière à rendre fastidieuses les recherches les plus élémentaires. C'est par des considérations analogues que se justifie l'emploi et l'introduction des imaginaires en Algèbre. Si l'on envisage, par exemple, les équations du second degré, les unes ont deux racines, les autres une seule, d'autres pas du tout. On réunit tous les cas en disant que ces équations ont deux racines, réelles et distinctes, réelles et égales, ou bien imaginaires. On sait d'ailleurs quelle importance prennent les imaginaires dans l'étude de l'Algèbre supérieure, et je n'y reviendrai pas ici.

9. Mais il y a une autre convention, ou plutôt un artifice tout à fait moderne, dont la portée et l'utilité ne sont pas aussi bien appréciées. Je veux parler de l'emploi des quantités homogènes. Je suis loin de le mettre sur le même rang que l'emploi des nombres négatifs ou imaginaires; mais il se justifie par les mêmes raisons et tend, comme les conventions précédentes, à donner plus de précision et de généralité à l'instrument analytique. Justifions cette remarque par quelques exemples des plus simples.

Supposons qu'un problème ait conduit à une équation du second degré

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions des données. Cette équation aura généralement deux racines. Mais si les données, en variant, prennent des valeurs telles que A devienne nulle, l'équation précédente s'abaissera au premier degré et n'aura plus qu'une racine. Si l'on considère le nouveau problème comme un cas particulier du précédent, on remarquera que, dans le passage au cas particulier, une des racines de l'équation du second degré est devenue infinie. En résulte-t-il que, si l'on considère une équation du premier degré

$$Bx + C = 0,$$

on puisse toujours dire qu'elle a une racine infinie? Évidemment non. Cela n'arrive que si elle se présente dans un problème comme cas particulier d'une équation du second degré. On voit qu'il y a là une question dont l'appréciation peut être délicate et qui, dans tous les cas, exige, pour certains problèmes où la valeur infinie de x serait acceptable, une discussion spéciale.

Par l'emploi des homogènes, cette difficulté se trouve entièrement levée. Remplaçons x par $\frac{x}{z}$. L'équation devient

$$Ax^2 + Bxz + Cz^2 = 0$$

et si A est nul, elle se réduit à

$$z(Bx + Cz) = 0.$$

Elle reste toujours du *second* degré et entièrement différente du polynome

$$Bx + Cz.$$

Toujours elle admet pour $\frac{x}{z}$ ou $\frac{z}{x}$ deux systèmes de solutions. Il restera à voir si chacun donne une réponse satisfaisante; mais le fait essentiel est qu'*aucune racine ne se perd.*

Les avantages algébriques de l'emploi des homogènes apparaîtront mieux dans l'étude de la question suivante : chercher les solutions du système

$$ax + by + c = 0,$$
$$f(x, y) = 0,$$

dont l'interprétation géométrique est la suivante : Trouver les

points d'intersection d'une droite et d'une courbe. Si m est le degré de la seconde équation, on est conduit généralement à m systèmes de solutions, réels ou imaginaires, distincts ou confondus. Mais il peut arriver que ce nombre soit diminué, ou même réduit à zéro, comme cela a lieu pour les systèmes

$$\begin{aligned} x &= 0, & x &= 0, \\ x^3 + axy + bx + y + d &= 0, & xy - 2 &= 0. \end{aligned}$$

On considère ces cas comme des limites du cas général, et l'on dit que un ou plusieurs systèmes de solutions ont été rejetés à l'infini. Mais il vaut mieux opérer comme il suit :

Posons

$$x = \frac{X}{Z}, \qquad y = \frac{Y}{Z},$$

et au problème proposé substituons le suivant : Trouver les rapports mutuels de X, Y, Z satisfaisant aux deux équations

$$\begin{gathered} aX + bY + cZ = 0, \\ f(X, Y, Z) = 0, \end{gathered}$$

la seconde équation étant homogène et du degré m. En écartant le cas où f contiendrait $aX + bY + cZ$ en facteur, on reconnaît que le problème proposé a toujours m solutions. Car, si l'on élimine Z par exemple, on est conduit à une équation homogène d'ordre m en X et Y, qui définit m systèmes de solutions pour le rapport $\frac{X}{Y}$. Si l'une de ces solutions est fournie par la formule

$$\alpha X + \beta Y = 0,$$

on aura évidemment

$$\frac{X}{-c\beta} = \frac{Y}{c\alpha} = \frac{Z}{a\beta - b\alpha}.$$

Cela fait bien m systèmes de solutions.

10. Des conclusions analogues s'appliquent à l'étude du système

$$f_m(x, y) = 0, \qquad \varphi_n(x, y) = 0.$$

En rendant ces deux équations homogènes et chassant le déno-

minateur Z, on obtiendra deux équations

$$f_m(X, Y, Z) = 0, \qquad \varphi_n(X, Y, Z) = 0.$$

Toutes les difficultés relatives à l'infini sont levées et le théorème de Bézout peut s'énoncer ainsi : Deux équations homogènes, d'ordres m et n respectivement, admettent toujours mn systèmes de solutions à moins qu'elles n'en admettent une infinité.

11. Il importe d'insister ici sur le caractère commun de toutes les conventions précédentes. Elles perfectionnent la Science, elles font de chaque proposition un instrument d'une sûreté parfaite dans la main de celui qui l'emploie et, par là, elles conduisent avec une rapidité bien plus grande au but et à la solution. Mais il convient, pour en mieux faire comprendre l'importance et l'utilité, d'éclaircir une objection qu'on peut leur adresser. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de l'intersection d'une droite et d'une courbe, que ce soit là un problème final, et non une question posée en vue de la solution d'une autre question. Par exemple, dans les bureaux d'un ingénieur, on aura ramené la solution d'une question de pratique à la détermination effective des points communs à la droite et à la courbe. Il semble que les conventions précédentes ne nous ont rien fait gagner. Il est vrai que, si m est le degré de la courbe, nous avons m solutions, propres ou impropres. Mais si nous sommes obligés de rejeter maintenant les solutions imaginaires ou infinies, à quoi sert de les avoir introduites ?

On peut répondre d'abord que nous ne sommes pas libres d'écarter toutes ces solutions. Du temps de Descartes, les racines négatives s'appelaient des racines *fausses*. On aurait bien voulu les écarter; mais cela était impossible. Et d'ailleurs, en admettant que ces conventions nouvelles présentent, dans les cas tels que le précédent, des inconvénients réels, par quels avantages ne sont pas compensés ces inconvénients ! Que de questions d'Analyse où l'on emploie *seulement comme intermédiaires* les solutions communes à deux équations, par exemple. Et si nos conventions n'étaient pas admises, que de cas à distinguer ! Toutes ces difficultés disparaissent avec les introductions et les conventions précédentes. Il est vrai qu'une fois le rôle de l'Algèbre terminé, il y aura lieu sans doute à une discussion finale pour reconnaître,

parmi les solutions s'il y en a plusieurs, celles qui conviennent au problème proposé. Mais cette discussion, il ne dépendrait jamais de nous de l'éviter, et elle se fera plus simplement.

12. Après ces remarques générales relatives à l'Algèbre, arrivons maintenant à ce grand problème qui constitue la Géométrie analytique. Les inconnues qu'on choisit sont alors les coordonnées d'un ou de plusieurs points. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver l'intersection de deux courbes. Voici les principales difficultés qu'on a rencontrées.

1° Plusieurs systèmes de solutions peuvent être confondus en un seul. On dit alors que le système est multiple; l'Algèbre nous apprend les caractères distinctifs des systèmes d'un ordre de multiplicité donné. Il n'y a rien à ajouter en Géométrie analytique. On dira simplement que plusieurs points d'intersection, en nombre égal au degré de multiplicité du système, sont venus se réunir en un seul.

2° Les valeurs de x et de y peuvent être imaginaires. Nous dirons que ces valeurs définissent un point imaginaire, point qui est conçu, qu'on pourrait appeler *idéal*, d'après une dénomination due à Poncelet. Cette convention est bien connue.

3° Il reste la difficulté relative aux solutions infinies. Supposons qu'on ait obtenu la solution définie par le système

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c},$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{a}{c}, \qquad y = \frac{b}{c}.$$

Si c devient nul on aura

$$Z = 0, \qquad \frac{X}{a} = \frac{Y}{b}.$$

Il n'y a plus de système de valeurs pour x et pour y; mais nous dirons que le système précédent représente un *point à l'infini dans la direction de coefficient angulaire* $\frac{b}{a}$. Ce point sera imaginaire si $\frac{b}{a}$ l'est.

Cette définition est absolument pareille à celle du point imagi-

naire à distance finie. Le point à l'infini est, comme le point imaginaire, un point simplement conçu, un point *idéal*. Dans les deux cas, la convention est également facile à admettre. Il y a pourtant entre eux une différence essentielle que nous allons signaler.

Pourquoi dit-on que le point est à l'infini dans la direction de coefficient angulaire $\frac{b}{a}$? Parce que, si c est très petit, le point se trouve très loin sur la droite

$$y = \frac{b}{a}x$$

et qu'il s'éloigne de plus en plus, dans un sens ou dans l'autre, lorsque c devient de plus en plus petit. Ainsi, le point à l'infini est le représentant idéal d'un point qui s'éloigne à l'infini dans une direction de coefficient angulaire $\frac{b}{a}\cdot$ *On peut, en quelque sorte, l'obtenir par un passage à la limite. Il n'en est plus de même pour le point imaginaire à distance finie, qui se trouve toujours isolé.*

La convention que nous venons de faire s'applique d'elle-même aux points de l'espace. Si x, y, z désignent les coordonnées ordinaires d'un point, on peut poser

$$x = \frac{X}{T}, \quad y = \frac{Y}{T}, \quad z = \frac{Z}{T},$$

et alors nous dirons qu'au système

$$T = 0, \quad \frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c}$$

il correspond un point à l'infini dans la direction réelle ou imaginaire définie par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c};$$

et ainsi se trouvent géométriquement interprétées toutes les solutions de l'équation homogène

$$\varphi(X, Y, Z, T) = 0,$$

sauf la solution

$$X = Y = Z = T = 0,$$

qu'on regarde comme inadmissible toutes les fois qu'on emploie des coordonnées homogènes.

13. Cette convention une fois admise ainsi que celle relative aux imaginaires, le lecteur comprendra de lui-même ce qu'il faut entendre par une surface ou une courbe imaginaire.

Toute équation du premier degré représentera un plan, réel ou imaginaire.

Une droite, réelle ou imaginaire, sera l'intersection de deux plans.

Toute droite qui ne sera pas contenue dans un plan le coupera en un seul point. Par suite, toute droite qui aura deux points communs avec un plan y sera contenue tout entière.

Tous les points à l'infini satisferont à l'équation

$$T = 0.$$

On pourra donc dire qu'ils sont dans un plan, le plan de l'infini.

Tous les points à l'infini d'un plan dont l'équation est

$$aX + bY + cZ + dT = 0$$

seront sur une droite définie par les deux équations

$$T = 0, \qquad aX + bY + cZ = 0.$$

Une droite qui ne sera pas tout entière à l'infini aura un seul point à l'infini.

Deux droites ou deux plans seront parallèles lorsqu'ils auront les mêmes points à l'infini.

14. Si ces propositions ne paraissaient pas évidentes, elles le deviendraient immédiatement grâce à l'emploi de la substitution suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} X = a\ X_1 + b\ Y_1 + c\ Z_1 + d\ T_1, \\ Y = a'\ X_1 + b'\ Y_1 + c'\ Z_1 + d'\ T_1, \\ Z = a''\ X_1 + b''\ Y_1 + c''\ Z_1 + d''\ T_1, \\ T = a'''X_1 + b'''Y_1 + c'''Z_1 + d'''T_1, \end{cases}$$

où $a, b, c, d, \ldots, a''', b''', c''', d'''$ désignent 16 constantes et qui définit, comme on sait, la transformation homographique la plus générale.

Cette transformation conserve évidemment les degrés des lieux et des courbes; en particulier, elle fait correspondre un plan à un plan, une droite à une droite. Mais, pourvu que a''', b''', c''' ne soient pas nulles toutes les trois, elle fait correspondre au plan à l'infini de la première figure un plan à distance finie de la seconde. On s'explique ainsi très bien pourquoi les énoncés relatifs aux plans, aux points et aux droites de l'infini ne diffèrent en rien de ceux qui concernent les éléments correspondants situés à distance finie.

L'emploi des conventions précédentes simplifie beaucoup l'étude de la ligne droite et du plan. C'est ainsi que, si l'on veut définir l'intersection de trois plans, l'emploi des homogènes faisant disparaître toute impossibilité, il ne peut se présenter que trois cas : ou bien les plans se coupent en un point unique, ou bien ils ont une droite commune, ou bien ils sont confondus.

Si l'on considère de même ce problème fondamental : Faire passer un plan par trois points, on verra qu'il comprend les suivants :

Faire passer par une droite un plan parallèle à une droite donnée;

Faire passer par un point un plan parallèle à deux droites données, ou à un plan donné,

suivant qu'un ou deux des points donnés sont rejetés à l'infini.

De même encore le problème suivant : Faire passer une droite par deux points, comprend comme cas particulier le suivant :

Faire passer par un point une droite parallèle à une droite donnée.

Dans le plan, la droite de l'infini doit être considérée comme une droite réelle, et toute droite imaginaire a un point réel et un seul. Car son équation

$$P + iQ = 0$$

admet toujours la solution réelle définie par les deux équations

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Dans l'espace, de même le plan de l'infini est un plan réel. Tout plan imaginaire contient une droite réelle. Mais, en ce qui concerne les droites imaginaires, il y a lieu de faire une distinction.

Les unes, représentées par des équations telles que les suivantes :

$$P + iQ = 0, \qquad R + iS = 0,$$

où P, Q, R, S sont quatre fonctions réelles linéairement indépendantes, ne contiennent aucun point réel. Car les coordonnées de ce point ne sauraient annuler les fonctions P, Q, R, S en même temps. Ces droites ne sont, non plus, dans aucun plan réel. Pour qu'elles fussent dans un tel plan, il faudrait que, dans l'équation

$$(\alpha + i\beta)(P + iQ) + (\gamma + i\delta)(R + iS) = 0, \tag{2}$$

qui représente tout plan passant par la droite, on pût annuler le coefficient de i, ce qui établirait, contrairement à l'hypothèse, une relation linéaire entre les quatre fonctions P, Q, R, S.

La méthode suivie montre que, si une droite a un point réel, elle est aussi dans un plan réel. Car alors les quatre équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0, \qquad S = 0$$

ayant une solution commune, les fonctions P, Q, R, S ne sont plus linéairement indépendantes et il est possible de disposer de α, β, γ, δ dans l'équation (2) de manière à faire disparaître le coefficient de i.

Dans le plan et dans l'espace, la droite qui joint deux points imaginaires conjugués est réelle. Et, par suite, un plan est réel quand il contient un point réel et deux points imaginaires conjugués qui ne sont pas en ligne droite avec le point réel.

15. Je glisse rapidement sur toutes ces propriétés élémentaires. Mais, avant de continuer, il ne sera pas inutile de répondre à une objection que von Staudt adressait à la théorie analytique des imaginaires et qui s'appliquerait aussi à celle que nous venons d'exposer. Ce savant géomètre a prétendu que les points imaginaires, tels que nous les avons définis, n'avaient en quelque sorte qu'une existence dépendant des axes coordonnés. L'objection pourrait s'appliquer à toute étude dans laquelle on emploie de tels axes. Et, pour y répondre, il suffira de montrer que, si un point imaginaire appartient à une ou plusieurs surfaces, il ne cessera pas de leur appartenir quand on changera de coordonnées. C'est ce qui aura lieu certainement si l'on convient d'appliquer aux

points imaginaires et aux points à l'infini les formules du changement de coordonnées, démontrées pour les points réels.

Considérons, en effet, ces formules écrites sous la forme ordinaire

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d, \\ y = a'\,x_1 + b'\,y_1 + c'\,z_1 + d', \\ z = a''\,x_1 + b''\,y_1 + c''\,z_1 + d'', \end{cases}$$

et écrivons-les sous forme homogène en remplaçant x, y, z par $\frac{X}{T}$, $\frac{Y}{T}$, $\frac{Z}{T}$ et x_1, y_1, z_1 par $\frac{X_1}{T_1}$, $\frac{Y_1}{T_1}$, $\frac{Z_1}{T_1}$. Elles prendront la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} eX = a\,X_1 + b\,Y_1 + c\,Z_1 + d\,T_1, \\ eY = a'\,X_1 + b'\,Y_1 + c'\,Z_1 + d'\,T_1, \\ eZ = a''X_1 + b''Y_1 + c''Z_1 + d''T_1, \\ eT = T_1, \end{cases}$$

e étant un facteur de proportionnalité qu'on peut supposer égal à l'unité.

Sous cette forme, elles s'appliquent évidemment aux points réels à l'infini. Car si l'on a $T = 0$, il vient $T_1 = 0$. Et comme, *par hypothèse*, on les étend à tous les points imaginaires, elles doivent être considérées comme convenant à tous les cas. Or soit

$$\varphi(X, Y, Z, T) = 0$$

une équation homogène quelconque. Elle deviendra, par le changement de coordonnées,

$$\psi(X_1, Y_1, Z_1, T_1) = 0.$$

Et tous les points imaginaires qui appartenaient à la surface définie par la première équation ne cesseront pas de lui appartenir, après le changement d'axes.

CHAPITRE II.

LES COORDONNÉES TÉTRAÉDRIQUES.

Leur définition. Ce sont des fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes homogènes. — Pourquoi on les appelle tétraédriques ? — La connaissance du tétraèdre de référence ne les détermine pas entièrement. — Möbius, qui les a employées en 1827 dans son *Traité de Calcul barycentrique*, en a donné une définition fondée sur la théorie du centre de gravité et différente de celle que nous avons adoptée d'après Plücker. — Cette interprétation ne tient plus dès qu'un des sommets du tétraèdre de référence est rejeté à l'infini. Démonstration d'un élégant théorème de statique qui permet de maintenir avec quelques modifications la définition de Möbius lorsqu'un ou plusieurs sommets du tétraèdre de référence sont rejetés à l'infini. — Application à la Géométrie plane et à la détermination des figures qui sont la perspective d'une figure donnée. — L'emploi dans le plan des coordonnées trilinéaires permet d'étudier, en même temps qu'une figure, toutes celles qui s'en déduisent par la perspective.

On termine le Chapitre en démontrant une propriété caractéristique de la transformation homographique. Elle est la seule transformation ponctuelle qui conserve les plans, c'est-à-dire les transforme en des plans. — La démonstration s'obtient par la résolution d'une équation fonctionnelle que Cauchy avait déjà étudiée dans son *Analyse algébrique* (t. III de ses *Œuvres*, 2e série).

---

16. Au n° 14 nous avons obtenu un système de formules qui définissent la transformation homographique la plus générale. On peut donner à ces formules une interprétation nouvelle et définir ainsi un système de coordonnées, comprenant les coordonnées cartésiennes comme cas très particulier, et qu'on pourra employer au même titre que ces coordonnées dans beaucoup de recherches, sans avoir à apporter une restriction quelconque aux résultats obtenus. Nous nous bornerons à la Géométrie de l'espace, qui comprend la Géométrie plane comme cas particulier.

Considérons quatre fonctions homogènes X, Y, Z, T des coordonnées cartésiennes homogènes x, y, z, t :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= ax + by + cz + dt, \\ Y &= a'x + b'y + c'z + d't, \\ Z &= a''x + b''y + c''z + d''t, \\ T &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t \end{aligned}\right.$$

que nous supposerons linéairement indépendantes. Si nous connaissons les valeurs de ces quatre fonctions pour un point quelconque de l'espace, les formules précédentes, qui pourront être résolues par rapport à x, y, z, t, détermineront les coordonnées cartésiennes homogènes du point, par des formules qui seront évidemment de la forme suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} x = AX + BY + CZ + DT, \\ y = A'X + B'Y + C'Z + D'T, \\ z = A''X + B''Y + C''Z + D''T, \\ t = A'''X + B'''Y + C'''Z + D'''T. \end{cases}$$

On peut donc considérer X, Y, Z, T comme des coordonnées homogènes propres à déterminer un point.

17. On leur a donné le nom de *coordonnées tétraédriques* parce qu'en égalant à zéro l'une d'elles, on a les quatre équations

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad T = 0$$

qui, d'après l'hypothèse faite, représentent quatre plans n'ayant aucun point commun et, par conséquent, formant un tétraèdre au sens le plus général du mot. Ce tétraèdre peut avoir un, deux ou trois de ses sommets à l'infini.

Il importe de remarquer que la connaissance du tétraèdre ne suffit pas à définir les coordonnées. Si le tétraèdre de référence est donné, les coordonnées X, Y, Z, T pourront encore être multipliées par des constantes quelconques.

Par exemple, si le tétraèdre est formé par les plans coordonnés et le plan de l'infini, les coordonnées correspondantes pourront être ax, by, cz, ht, a, b, c, h étant des constantes et x, y, z, t désignant les coordonnées cartésiennes homogènes du point.

Il est clair qu'avec ces nouvelles coordonnées, l'équation d'une surface de degré n restera homogène et du degré n. En particulier, l'équation d'un plan restera du premier degré.

18. La définition que nous venons d'adopter pour les coordonnées tétraédriques est la plus simple; elle est presque la seule qui soit absolument générale. Elle s'applique dans tous les cas,

que les fonctions X, Y, Z, T soient réelles ou imaginaires, que le tétraèdre ait ou n'ait pas de sommets à l'infini, etc.

Ce n'est pas elle, cependant, qui s'est présentée tout d'abord. Voici comment *Möbius*, le premier, les a introduites dans son Traité de *Calcul barycentrique*, paru en 1827.

Reprenons les formules (2), qui sont résolues par rapport à x, y, z, t. Elles nous montrent immédiatement que les coordonnées homogènes des sommets du tétraèdre de référence sont :

A, A', A'', A'''	pour le sommet	$Y = Z = T = 0$;
B, B', B'', B'''	»	$X = Z = T = 0$;
C, C', C'', C'''	»	$X = Y = T = 0$;
D, D', D'', D'''	»	$X = Y = Z = 0$.

Supposons que ces sommets soient tous à distance finie et changeons de notations en posant

$$A'''X = \lambda_1, \quad B'''Y = \lambda_2, \quad C'''Z = \lambda_3, \quad D'''T = \lambda_4, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{A}{A'''} = x_1, & \dfrac{B}{B'''} = x_2, & \dfrac{C}{C'''} = x_3, & \dfrac{D}{D'''} = x_4, \\ \dfrac{A'}{A'''} = y_1, & \dfrac{B'}{B'''} = y_2, & \dfrac{C'}{C'''} = y_3, & \dfrac{D'}{D'''} = y_4, \\ \dfrac{A''}{A'''} = z_1, & \dfrac{B''}{B'''} = z_2, & \dfrac{C''}{C'''} = z_3, & \dfrac{D''}{D'''} = z_4. \end{array}\right. \tag{4}$$

Les formules (2) prendront la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{t} = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}, \\ \dfrac{y}{t} = \dfrac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}, \\ \dfrac{z}{t} = \dfrac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Et l'on voit immédiatement qu'elles définissent les coordonnées cartésiennes du centre de gravité de quatre masses $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ placées respectivement aux quatre sommets du tétraèdre. Ainsi :

Le point de coordonnées tétraédriques X, Y, Z, T *est le centre de gravité de quatre masses* $A'''X$, $B'''Y$, $C'''Z$, $D'''T$, *placées respectivement aux quatre sommets correspondants du tétraèdre.*

Si l'on suppose $A''' = B''' = C''' = D'''$, on retrouve les coordonnées barycentriques de Möbius.

19. Cette interprétation tombe en défaut et devient inadmissible dès qu'un des sommets du tétraèdre est rejeté à l'infini. Pourtant on peut la sauver, en la compliquant un peu, si l'on fait usage d'un théorème dont la première origine remonte à *Leibniz*.

Ce théorème peut s'énoncer comme il suit [1] :

Considérons p points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *affectés de coefficients positifs ou négatifs* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, *dont la somme n'est pas nulle.* O *désignant un point quelconque de l'espace, la résultante des forces* $\lambda_1\overline{OA_1}, \lambda_2\overline{OA_2}, \ldots, \lambda_p\overline{OA_p}$, *appliquées en* O, *ira passer par un point fixe* C *et sera égale à* $L\overline{OC}$, L *désignant la somme* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p$.

Si cette somme est nulle, la résultante conservera une grandeur et une direction invariables quand le point O *se déplacera; en particulier, si elle est nulle pour une position du point* O, *elle sera nulle pour toutes les autres positions de ce point.*

Pour démontrer cette proposition, on peut faire usage, soit de l'Analyse, soit de la Géométrie. Commençons par la démonstration géométrique.

Soit OR la résultante des forces $\lambda_i\overline{OA_i}$. Cherchons la résultante O'S quand le point O est remplacé par le point O' et les forces $\lambda_i\overline{OA_i}$ par $\lambda_i\overline{O'A_i}$. La force $\overline{O'A_i}$ est évidemment la résultante des deux forces $\overline{O'O}$ et $\overline{OA_i}$, le point d'application de la seconde étant, bien entendu, supposé transporté en O'. Donc la force $\lambda_i\overline{O'A_i}$ sera la résultante des deux forces $\lambda_i\overline{O'O}$ et $\lambda_i\overline{OA_i}$. On obtiendra donc la résultante de toutes les forces $\lambda_i\overline{O'A_i}$: 1° en composant toutes les forces égales et parallèles à $\lambda_i\overline{OA_i}$, ce qui donnera une résultante égale et parallèle à $\overline{OR}$; 2° en composant toutes les forces $\lambda_i\overline{O'O}$, ce qui donnera une résultante $L\overline{O'O}$; 3° en composant les deux résultantes partielles, l'une égale à $L\overline{O'O}$ et l'autre égale et parallèle à OR.

Supposons d'abord que L ne soit pas nulle, et déterminons

[1] DESPEYROUS, *Cours de Mécanique*, t. I, p. 379. Note de M. Darboux.

sur OR un point C par la condition

$$\overline{OR} = L\,\overline{OC}.$$

Alors O′S étant la résultante de $L \times \overline{OC}$ et de $L \times \overline{O'O}$ sera évidemment égale à $L \times \overline{O'C}$. Elle passera donc toujours par le point C et sera égale à $L \times \overline{O'C}$, ce qui démontre la première et la plus importante partie du théorème.

Supposons maintenant que la somme L soit nulle. Alors l'une des résultantes partielles envisagées plus haut, $L \times \overline{O'O}$, sera nulle, et O′S sera égale et parallèle à OR, ce qui achève de démontrer la proposition.

20. L'Analyse conduit au même résultat par une voie également simple. Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées cartésiennes du point A_i et soient x, y, z les coordonnées du point O. Les composantes parallèles aux axes de $\lambda_i \overline{OA_i}$ seront

$$\lambda_i(x_i - x), \quad \lambda_i(y_i - y), \quad \lambda_i(z_i - z). \tag{6}$$

Les projections de leur résultante seront donc

$$\Sigma\lambda_i x_i - Lx, \quad \Sigma\lambda_i y_i - Ly, \quad \Sigma\lambda_i z_i - Lz. \tag{7}$$

Si donc on pose

$$\Sigma\lambda_i x_i = LX, \qquad \Sigma\lambda_i y_i = LY, \qquad \Sigma\lambda_i z_i = LZ, \tag{8}$$

les projections de la résultante prendront la forme

$$L(X - x), \quad L(Y - y), \quad L(Z - z).$$

Ces expressions démontrent immédiatement le théorème, puisqu'elles mettent en évidence que, si C est le point défini par les équations (8), la résultante est $L \times \overline{OC}$.

Si L est nulle, les formules (7) montrent immédiatement que la direction et la grandeur de la résultante sont invariables.

21. Revenons à la démonstration géométrique. Il est facile de voir qu'elle conduirait sans effort à la notion du centre des forces parallèles.

Il est évident que le point C par lequel va passer la résultante

quand L n'est pas nulle, ne dépend que des rapports mutuels des coefficients λ_i. En mettant à profit cette remarque, considérons les forces $\lambda_1 \frac{\overline{OA_1}}{k}, \ldots, \lambda_p \frac{\overline{OA_p}}{k}$; elles auront pour résultante $\frac{L}{k}\overline{OC}$.

Prenons $k = \overline{OA_1}$ et supposons que le point O s'éloigne indéfiniment dans une direction *quelconque*. Alors $\frac{\overline{OA_2}}{k}, \ldots, \frac{\overline{OA_p}}{k}$ auront, tous, pour limite l'unité. Les différentes forces $\lambda_k \frac{\overline{OA_k}}{\overline{OA_1}}$, qu'on peut faire glisser sur leur ligne d'action de manière à transporter leur point d'application en A_k finiront par devenir parallèles à une direction, d'ailleurs quelconque; elles auront pour grandeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, deux forces correspondantes à des coefficients de signes contraires ayant des sens opposés. Quant à la résultante qui passe par C et a pour valeur $L\frac{\overline{OC}}{\overline{OA_1}}$, on peut transporter son point d'application en C et sa valeur deviendra égale à L. On reconnaît la proposition fondamentale de la théorie des forces parallèles; et l'on voit que C est le centre de gravité des masses λ_i placées aux points A_i respectivement.

Les formules (8) mettent également en évidence la proposition à laquelle on a été conduit par la Géométrie. On voit que la notion et les propriétés du centre de gravité se déduisent comme cas particulier du théorème fondamental énoncé plus haut.

Signalons encore cette conséquence particulière du théorème. *Si des forces concourantes se font équilibre, leur point d'application est le centre de gravité de masses égales placées en leurs extrémités;* ce qui est proprement le résultat remarqué par Leibniz.

22. Revenons aux coordonnées tétraédriques et à l'interprétation de Möbius. Le théorème précédent nous met sur la voie d'une interprétation beaucoup plus large.

Soit O l'origine des coordonnées. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les sommets du tétraèdre de référence. Les formules (5) expriment que les quatre forces appliquées en O, dirigées vers les sommets $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et ayant respectivement pour valeur

$$\lambda_1 \overline{O\alpha_1}, \quad \lambda_2 \overline{O\alpha_2}, \quad \lambda_3 \overline{O\alpha_3}, \quad \lambda_4 \overline{O\alpha_4},$$

ont pour résultante $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\overline{OM}$, M étant le point dont les coordonnées homogènes tétraédriques sont X, Y, Z, T. Comme on peut, d'après le théorème précédent, substituer au point O un point quelconque de l'espace, on est conduit à la nouvelle interprétation suivante :

O étant un point quelconque de l'espace, les forces appliquées en O, dirigées respectivement vers les sommets du tétraèdre et ayant pour valeurs

$$(9) \qquad A'''X\times\overline{O\alpha_1},\quad B'''Y\times\overline{O\alpha_2},\quad C'''Z\times\overline{O\alpha_3},\quad D'''T\times\overline{O\alpha_4},$$

X, Y, Z, T *étant les coordonnées tétraédriques définies par le système* (2), *ont une résultante dirigée vers le point* M *défini par ces coordonnées et cette résultante est égale à*

$$\overline{OM}(A'''X+B'''Y+C'''Z+D'''T).$$

Si le point O s'éloigne à l'infini, et si l'on remplace les forces par d'autres qui leur soient proportionnelles et soient appliquées aux sommets du tétraèdre, on retrouve l'interprétation donnée en premier lieu.

Mais, tandis que cette dernière interprétation tombe en défaut dans le cas où le tétraèdre de référence a ses sommets à l'infini, il n'en est pas de même de celle que nous venons de lui substituer. Revenons à notre théorème général, et supposons que quelques-uns des points A_i s'éloignent à l'infini. Soit, par exemple, A_k l'un de ces points. S'il s'éloigne à l'infini dans une direction dont les paramètres directeurs soient α_k, β_k, γ_k et si l'on désigne par μ_k la limite du produit $\lambda_k\overline{OA_k}$ dans lequel λ_k tend vers zéro, tandis que $\overline{OA_k}$ devient infini, on voit que la force aura pour composantes $\mu_k\alpha_k$, $\mu_k\beta_k$, $\mu_k\gamma_k$; et notre théorème général prendra l'énoncé suivant :

Si l'on a un groupe de points $A_1, \ldots, A_n$ *affectés de coefficients* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *la résultante des forces ayant un point* O *quelconque pour point d'application, respectivement égales à*

$$\lambda_1\overline{OA_1},\quad \ldots,\quad \lambda_n\overline{OA_n},$$

et d'autres forces, parallèles à des directions fixes et de compo-

santes $\mu_k \alpha_k, \mu_k \beta_k, \mu_k \gamma_k$, *ira passer par un point fixe* C *et aura pour grandeur* $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\overline{\mathrm{OC}}$.

Revenons à nos coordonnées tétraédriques, et supposons qu'un des sommets du tétraèdre, le sommet α_1 par exemple, s'éloigne à l'infini. La force $\lambda_1 \overline{\mathrm{O}\alpha_1}$ relative à ce sommet et dont les composantes étaient

$$\lambda_1 x_1 - \lambda_1 x, \quad \lambda_1 y_1 - \lambda_1 y, \quad \lambda_1 z_1 - \lambda_1 z,$$

x, y, z étant les coordonnées du point O, aura maintenant pour composantes, si l'on remarque que λ_1 est nul et si l'on applique les formules (3) et (4),

$$\mathrm{AX}, \quad \mathrm{A'X}, \quad \mathrm{A''X}.$$

Elle sera donc parallèle à une direction fixe et proportionnelle à X. Telle est la substitution qu'il y aura lieu de faire dans l'interprétation que nous avons donnée.

Par exemple, si le tétraèdre fondamental se réduit à celui qui est formé par les axes coordonnés et le plan de l'infini, X, Y, Z, T désignant les coordonnées cartésiennes ordinaires, il faudra prendre la résultante de trois forces X, Y, Z dirigées respectivement suivant les axes et diviser par T cette résultante.

23. Les résultats que nous venons d'obtenir s'appliquent évidemment à la Géométrie plane, et ils vont nous permettre de résoudre très simplement, et dans toute sa généralité, le problème suivant :

Étant donnée une figure plane quelconque, on propose de déterminer ce qu'elle devient lorsqu'on la met en perspective sur un plan quelconque, le point de vue étant quelconque.

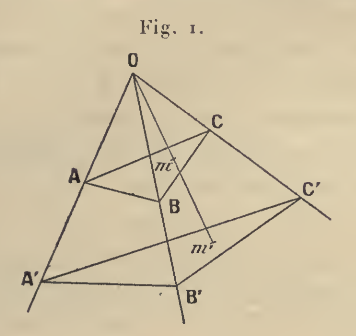
Soient (*fig.* 1) O le point de vue, (P) le plan de la figure proposée, (P′) le plan sur lequel on projette. Si l'on prend un triangle ABC dans le plan (P), il aura pour perspective un triangle A′B′C′ dans le plan (P′). Si, dans le plan (P), on passe des coordonnées cartésiennes homogènes aux coordonnées trilinéaires pour lesquelles ABC est le triangle de référence, on aura des formules telles que

les suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} x = aX + bY + cZ, \\ y = a'X + b'Y + c'Z, \\ z = a''X + b''Y + c''Z, \end{cases}$$

et nous savons que le point m déterminé par ces formules sera le centre de gravité des trois masses $a''X$, $b''Y$, $c''Z$, placées respecti-

Fig. 1.



vement en ses trois sommets. Il sera donc aussi sur la résultante des trois forces

$$(11)\qquad a''X \times \overline{OA},\quad b''Y \times \overline{OB},\quad c''Z \times \overline{OC},$$

appliquées au point O et cette résultante sera égale à

$$\overline{Om}(a''X + b''Y + c''Z).$$

Or, les trois forces définies par les formules précédentes (11) ont leurs expressions qui peuvent être mises sous la forme

$$(12)\qquad \frac{a''\times\overline{OA}}{\overline{OA'}}X\times\overline{OA'},\qquad \frac{b''\times\overline{OB}}{\overline{OB'}}Y\times\overline{OB'},\qquad \frac{c''\times\overline{OC}}{\overline{OC'}}Z\times\overline{OC'}$$

et il résulte du théorème que nous avons établi que le centre de gravité m' des masses $\frac{a''\times\overline{OA}}{\overline{OA'}}X$, $\frac{b''\times\overline{OB}}{\overline{OB'}}Y$, $\frac{c''\times\overline{OC}}{\overline{OC'}}Z$ placées respectivement en A′, B′, C′ sera sur la résultante Om et sera, par suite, la perspective du point m. Cette résultante aura d'ailleurs pour valeur, toujours d'après le même théorème,

$$\overline{Om'}\left(\frac{a''\times\overline{OA}}{\overline{OA'}}X + \frac{b''\times\overline{OB}}{\overline{OB'}}Y + \frac{c''\times\overline{OC}}{\overline{OC'}}Z\right).$$

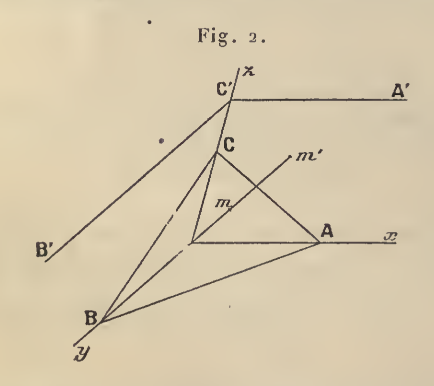
Le problème que nous nous étions proposé peut être considéré comme résolu. On voit que des coordonnées barycentriques $a''X$, $b''Y$, $c''Z$ du point m, on déduit celles du point m' rapporté au triangle $A'B'C'$. En égalant les deux expressions de la résultante, on aura même le rapport $\frac{Om'}{Om}$.

Le résultat essentiel de cette recherche est le suivant : Les coordonnées trilinéaires du point m par rapport au triangle ABC peuvent être aussi considérées comme des coordonnées trilinéaires du point m' par rapport au triangle $A'B'C'$; en sorte que toutes les propriétés d'une figure qui ne dépendent pas de la forme du triangle de référence s'étendront d'elles-mêmes à toutes celles qu'on en déduira par la perspective.

24. Pour bien montrer la portée de la méthode précédente, nous l'appliquerons au cas où le triangle $A'B'C'$ a deux de ses sommets à l'infini.

Soient toujours (*fig.* 2) O le centre de perspective et ABC le

Fig. 2.



triangle de référence qui devra être choisi de manière que le plan OAB soit parallèle au plan P′. Le point m étant le centre de gravité de trois masses $a''X$, $b''Y$, $c''Z$ placées respectivement en A, B, C, la droite Omm' est la direction de la résultante de trois forces

$$a''X \times \overline{OA}, \qquad b''Y \times \overline{OB}, \qquad c''Z \times \overline{OC}$$

ayant leur point d'application en O. Par conséquent, les coordonnées du point m' de cette résultante relatives aux trois axes Ox,

Oy, Oz seront proportionnelles aux composantes de cette résultante. Or si X_1, Y_1 désignent les coordonnées de m' par rapport aux axes $C'A'$, $C'B'$, X_1, Y_1 et OC' seront les coordonnées du même point par rapport au trièdre $Oxyz$. On aura donc

$$(13) \qquad \frac{X_1}{\overline{OA} \times a''X} = \frac{Y_1}{\overline{OB} \times b''Y} = \frac{OC'}{\overline{OC} \times c''Z}.$$

Ces formules résolvent la question proposée.

25. On voit tout le parti qu'on peut tirer des définitions adoptées par Möbius. Il y en a d'autres, équivalentes. Par exemple, on sait que, si un point M est le centre de gravité de masses λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 placées respectivement aux sommets α, β, γ, δ d'un tétraèdre, ces masses sont proportionnelles aux volumes affectés de signe des tétraèdres $M\beta\gamma\delta$, $M\alpha\gamma\delta$, $M\alpha\beta\delta$, $M\alpha\beta\gamma$. Dans son Mémoire sur les pyramides (*Œuvres complètes*, t. III), Lagrange avait eu l'idée de définir un point par les rapports de ces volumes; mais l'objet de son Mémoire ne l'entraînait pas à poursuivre cette idée.

Notre première définition concorde avec celle qui a été donnée par Plücker dans le *Journal de Crelle*. Il est évident qu'elle se prête immédiatement à une interprétation géométrique. Si l'on se reporte aux formules (1), on voit qu'on peut les mettre sous la forme

$$X = tp_1h_1, \qquad Y = tp_2h_2, \qquad Z = tp_3h_3, \qquad T = tp_4h_4,$$

h_1, h_2, h_3, h_4 étant des constantes et p_1, p_2, p_3, p_4 les distances du point considéré aux quatre faces du tétraèdre.

Mais cette interprétation, qui est souvent adoptée, exige la définition de la distance d'un point à un plan, quand l'un au moins de ces éléments est imaginaire. Elle est en défaut quand une des faces du tétraèdre devient isotrope, ou est rejetée à l'infini. La seule définition générale est celle de Plücker, et une autre que nous donnerons plus loin et qui repose sur la notion du rapport anharmonique.

26. Nous terminerons ce Chapitre en établissant une propriété fondamentale et caractéristique de la transformation homogra-

phique. Soient

$$(14)\quad \begin{cases} x_1 = ax + by + cz + dt, \\ y_1 = a'x + b'y + c'z + d't, \\ z_1 = a''x + b''y + c''z + d''t, \\ t_1 = a'''x + b'''y + c'''z + d'''t \end{cases}$$

les formules qui définissent une telle transformation. Il est aisé de démontrer qu'elles font correspondre un plan à un plan. En effet, si le point (x_1, y_1, z_1, t_1) se trouve dans le plan défini par l'équation

$$(15)\quad u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1 + p_1 t_1 = 0,$$

il est clair que le point (x, y, z, t) décrira le plan

$$(16)\quad ux + vy + wz + pt = 0$$

où l'on a

$$(17)\quad \begin{cases} u = au_1 + a'v_1 + a''w_1 + a'''p_1, \\ v = bu_1 + b'v_1 + b''w_1 + b'''p_1, \\ w = cu_1 + c'v_1 + c''w_1 + c'''p_1, \\ p = du_1 + d'v_1 + d''w_1 + d'''p_1. \end{cases}$$

Nous allons montrer que cette propriété est caractéristique. Appelons *transformation ponctuelle* toute transformation qui fait correspondre un point à un point. *Toute transformation ponctuelle dans laquelle chaque plan a pour homologue un plan est une transformation homographique.*

La difficulté de la démonstration tient au grand nombre des constantes qui figurent dans les formules. Pour la faire disparaître, nous raisonnerons de la manière suivante :

Étant donnés deux tétraèdres ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, il y a une infinité de transformations homographiques qui amènent A en A_1, B en B_1, C en C_1, D en D_1. Car soient, par exemple, x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t_1 les coordonnées homogènes de A et de A_1. En remplaçant dans les formules (14) x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t_1 par $x, y, z, t, \rho x_1, \rho y_1, \rho z_1, \rho t_1$, où ρ sera entièrement arbitraire, on obtient quatre relations entre les coefficients. Opérant de même avec B, B_1; C, C_1; D, D_1, on aura en tout seize relations, déterminant séparément les coefficients a, b, c, d; a_1, b_1, c_1, d_1; ... et contenant d'ailleurs quatre arbitraires telles que ρ. Ce sont quatre systèmes

d'équations du premier degré dont le déterminant ne serait nul que si, contrairement à l'hypothèse, A, B, C, D étaient dans un même plan.

Cela posé, soit S la transformation ponctuelle cherchée. Puisque, par hypothèse, elle transforme les plans en plans, elle devra faire correspondre à un tétraèdre ABCD de la figure (F) à laquelle on l'applique, un tétraèdre $A_1 B_1 C_1 D_1$ de la figure transformée (F_1). Nous venons de voir qu'on peut appliquer à la figure (F_1) une transformation homographique H qui donne une nouvelle figure (F_2) et amène le tétraèdre $A_1 B_1 C_1 D_1$ à coïncider avec ABCD. D'après cela, si nous considérons la transformation S′ par laquelle (F_2) se déduit de (F) et qui résulte de la composition de S et de H, cette transformation S′ devra : 1° conserver les quatre points A, B, C, D; 2° transformer un plan en plan. Du reste, si nous démontrons le théorème pour S′, il le sera pour S, puisque S résulte de la composition de S′ avec la substitution inverse de H, qui est une transformation homographique ; et il est clair que la composition de deux homographies donne encore une homographie.

Examinons donc la transformation S′ et, prenant pour tétraèdre de référence le tétraèdre ABCD, désignons par X, Y, Z, T; X′, Y′, Z′, T′ les coordonnées de deux points homologues quelconques ; X′, Y′, Z′, T′, ou du moins leurs rapports, seront des fonctions de X, Y, Z, T. Mais puisque la transformation respecte les sommets du tétraèdre, il faudra qu'à tout plan passant par une de ses arêtes elle fasse correspondre un plan passant par la même arête. Par exemple, à un plan défini par l'équation

$$Y = hZ$$

devra correspondre un plan

$$Y' = h'Z'$$

et h' devra être une fonction de h. Ainsi les équations qui définissent la transformation doivent être telles qu'on ait

$$\frac{Y'}{Z'} = \mathcal{F}\left(\frac{Y}{Z}\right),$$

et de même pour deux coordonnées quelconques.

27. Écrivons d'abord les trois équations

$$\frac{Y'}{Z'} = f\left(\frac{Y}{Z}\right), \quad \frac{Z'}{X'} = f_1\left(\frac{Z}{X}\right), \quad \frac{X'}{Y'} = f_2\left(\frac{X}{Y}\right).$$

En les multipliant membre à membre, on aura l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{Y}{Z}\right) f_1\left(\frac{Z}{X}\right) f_2\left(\frac{X}{Y}\right) = 1$$

qu'il faudra résoudre en premier lieu.

On peut tout ramener à la détermination de la fonction f. En effet, en faisant successivement $X = Z$ et $X = Y$, on a

$$(18) \qquad \begin{cases} f\left(\frac{Y}{X}\right) f_1(1) f_2\left(\frac{X}{Y}\right) = 1, \\ f\left(\frac{X}{Z}\right) f_1\left(\frac{Z}{X}\right) f_2(1) = 1. \end{cases}$$

Ces deux relations permettent d'éliminer f_1 et f_2 et nous conduisent à l'égalité

$$f\left(\frac{Y}{Z}\right) = f_1(1) f_2(1) f\left(\frac{Y}{X}\right) f\left(\frac{X}{Z}\right)$$

qui va nous permettre de définir f. Faisant d'abord $X = Y = Z$ on trouve

$$(19) \qquad f_1(1) f_2(1) = \frac{1}{f(1)}$$

et si l'on pose ensuite

$$f\left(\frac{Y}{Z}\right) = f(1)\varphi\left(\frac{Y}{Z}\right),$$

il vient

$$\varphi\left(\frac{Y}{Z}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)\varphi\left(\frac{X}{Z}\right),$$

ou encore, en posant

$$\frac{Y}{X} = u, \quad \frac{X}{Z} = v,$$

$$(20) \qquad \varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v).$$

La solution de cette équation est bien connue. On a

$$\varphi(u) = u^m,$$

d'où résulte la valeur

$$(21) \qquad f\left(\frac{Y}{Z}\right) = C\left(\frac{Y}{Z}\right)^m.$$

Avec cette valeur de f, les relations (18) nous donnent

$$f_1\left(\frac{Z}{X}\right) = C_1\left(\frac{Z}{X}\right)^m, \quad f_2\left(\frac{X}{Y}\right) = C_2\left(\frac{X}{Y}\right)^m,$$

sous la condition

$$C\,C_1\,C_2 = 1. \tag{22}$$

Ainsi, on aura ce premier système de formules

$$\frac{X'}{aX^m} = \frac{Y'}{bY^m} = \frac{Z'}{cZ^m}.$$

Si l'on avait considéré de même le groupe X', Y', T', on aurait eu à adjoindre aux rapports précédents $\frac{T'}{dT^m}$. On a donc, comme solution définitive, celle qui est fournie par les formules

$$\rho X' = aX^m, \quad \rho Y' = bY^m, \quad \rho Z' = cZ^m, \quad \rho T' = dT^m, \tag{23}$$

où ρ est un facteur de proportionnalité.

Ces formules nous donnent bien une transformation répondant aux conditions que nous avons posées. Tout plan passant par une des arêtes du tétraèdre est transformé en un plan. Mais un plan ne passant par aucune des arêtes devient, si m est différent de 1, une de ces surfaces très intéressantes qu'on appelle *tétraédrales* et qui ont été étudiées d'abord par Lamé. Pour qu'il devienne un plan, il faut que m soit égal à 1, et *alors la substitution devient une homographie.*

28. Notre proposition est donc démontrée. Il nous reste à faire voir comment on démontre le lemme sur lequel nous nous sommes appuyé et comment on trouve les fonctions satisfaisant à l'équation

$$\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v). \tag{24}$$

De cette équation fonctionnelle on déduit immédiatement la suivante :

$$\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n),$$

et par conséquent

$$\varphi(x_1^n) = [\varphi(x_1)]^n. \tag{25}$$

Changeant x_1^n en x, on trouve

$$(26) \qquad \varphi(x) = \left[\varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right]^n, \qquad \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = [\varphi(x)]^{\frac{1}{n}},$$

et la combinaison des deux relations précédentes nous donne

$$(27) \qquad [\varphi(x)]^{\frac{p}{q}} = \varphi\left(x^{\frac{p}{q}}\right).$$

Regardons maintenant x comme une constante, qu'on pourra remplacer par a et $\frac{p}{q}$ comme une variable. Posons, en outre,

$$a^{\frac{p}{q}} = x;$$

l'équation précédente nous donnera

$$\varphi(x) = \varphi(a)^{\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}} = x^{A},$$

ce qui est l'expression admise plus haut.

Dans son *Analyse algébrique*, Cauchy emploie la méthode que nous venons de suivre. On peut en donner une autre si l'on admet l'existence d'une dérivée pour $\varphi(u)$. Si l'on prend, en effet, les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation (24) par rapport à u, il vient

$$(28) \qquad \frac{uv\varphi'(uv)}{\varphi(uv)} = \frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)},$$

d'où l'on déduit que le quotient

$$\frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)}$$

doit être constant. Le reste de la recherche ne présente plus de difficulté.

La démonstration que nous avons préférée offre l'avantage de ne pas reposer sur la notion de dérivée.

CHAPITRE III.

LE RAPPORT ANHARMONIQUE.

Définition du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. Cette définition repose exclusivement sur l'emploi des coordonnées. — Le rapport anharmonique des quatre points où quatre plans fixes se coupant suivant une même droite (ou bien quatre droites concourantes dans le plan) sont coupés par une droite variable est un nombre constant qu'on appelle *rapport anharmonique des quatre plans* (*ou des quatre droites*). — Application à la démonstration de l'existence d'une surface doublement réglée. — Expressions du rapport anharmonique usitées en Géométrie pure. — Relations entre les 24 rapports anharmoniques qu'on peut former avec quatre éléments. — Le rapport anharmonique ne peut devenir indéterminé que si trois des éléments coïncident. — Étude des cas dans lesquels deux des six valeurs du rapport anharmonique formées avec quatre éléments sont égales. — Coïncidence, proportion harmonique, proportion équianharmonique. — Identité remarquable à laquelle conduit cette étude. — Application à l'équation du quatrième degré. — Identité de Cauchy et de Cayley. — Résolution de l'équation du quatrième degré par la méthode de Ferrari telle que l'a présentée M. Hermite. — Comment l'identité de Cauchy et de Cayley peut conduire à la résolution de l'équation du troisième degré.

---

29. Les développements que nous avons donnés dans les Chapitres précédents s'appliquent sans difficulté à la Géométrie plane ; il y a même grand intérêt à les employer aussi dans la Géométrie à une dimension. Nous allons être ainsi conduits à la notion du rapport anharmonique.

Soient

$$x,\ y,\ z,\ t;\qquad x',\ y',\ z',\ t'$$

les coordonnées homogènes, cartésiennes ou tétraédriques, de deux points A et B. On pourra représenter les coordonnées de tout point M situé sur la droite AB par les formules

$$\lambda x+\mu x',\ \ \lambda y+\mu y',\ \ \lambda z+\mu z',\ \ \lambda t+\mu t'$$

ou, plus simplement, par les suivantes :

$$x+\lambda x',\ \ y+\lambda y',\ \ z+\lambda z',\ \ t+\lambda t'$$

si l'on suppose que λ puisse prendre des valeurs infinies.

En effet, si un plan passe par A et B, on reconnaîtra qu'il passe aussi par M. Du reste, comme on peut disposer de λ de telle manière que M soit dans un plan quelconque ne contenant pas AB, le point M pourra occuper toutes les positions sur la droite AB. Par exemple, si les coordonnées sont cartésiennes, le point à l'infini de AB correspond à la valeur de λ définie par l'équation

$$t + \lambda t' = 0.$$

Cela posé, considérons quatre points en ligne droite A, B, M, M' dont les coordonnées seront

$$\begin{array}{lr} x,\quad y,\quad z,\quad t & \text{(pour A)},\\ x',\quad y',\quad z',\quad t' & \text{(pour B)},\\ x+\lambda x',\quad y+\lambda y',\quad z+\lambda z',\quad t+\lambda t' & \text{(pour M)},\\ x+\lambda' x',\quad y+\lambda' y',\quad z+\lambda' z',\quad t+\lambda' t' & \text{(pour M')}. \end{array}$$

Quand on changera les coordonnées des deux premiers points en les multipliant par un même nombre, les valeurs de λ et de λ' pourront être changées. Supposons, par exemple, qu'on ait multiplié les coordonnées de A par a, celles de B par a' ; il faudra, pour avoir les mêmes points M, M', remplacer λ par $\frac{a\lambda}{a'}$, λ' par $\frac{a\lambda'}{a'}$.

Si donc on n'avait que les trois points A, B, M en ligne droite, on ne pourrait attacher aucune signification géométrique à λ, puisque λ *dépend de la notation* et peut être réduite à une valeur quelconque, 1 ou -1 par exemple.

Mais si l'on a quatre points A, B, M, M', on constate que le rapport $\frac{\lambda}{\lambda'}$ ne dépend plus de la notation et, *par suite, définit une certaine grandeur géométrique relative aux quatre points.*

Cette grandeur géométrique *ne dépend en aucune manière de la position des quatre points par rapport aux axes.* En effet, si l'on fait un changement d'axes, une perspective et même une transformation homographique, ou si l'on emploie des coordonnées tétraédriques, les nouvelles coordonnées sont des fonctions linéaires des anciennes. Soit, par exemple, x_1 une des nouvelles coordonnées

$$x_1 = ax + by + cz + dt.$$

Si x_1, x'_1 correspondent respectivement à A et à B, $x_1 + \lambda x'_1$

correspondra à M, la valeur de λ ne sera pas changée. Cette grandeur géométrique ne dépend donc que de la situation respective et de l'ordre des quatre points. Nous l'appellerons *le rapport anharmonique des quatre points*, et nous la désignerons comme il suit :

$$\mathcal{R}(A, B, M, M') = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

On verra facilement qu'on a

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{R}(A, B, M, M')\mathcal{R}(B, A, M, M') = 1; \\ \mathcal{R}(A, B, M, M')\mathcal{R}(A, B, M', M) = 1. \end{cases}$$

30. Nous allons maintenant faire connaître au sujet du rapport anharmonique un théorème fondamental :

Si l'on considère dans l'espace quatre plans se coupant suivant une même droite (ou dans le plan quatre droites concourantes), le rapport anharmonique des quatre points où les quatre plans (ou les quatre droites) sont coupés par une droite quelconque est un nombre constant.

Soient, en effet,

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \alpha + k\beta = 0, \qquad \delta = \alpha + k'\beta = 0$$

les équations des quatre plans. Appelons α_M, β_M le résultat de la substitution des coordonnées d'un point M dans les polynomes α, β. Soient x, y, z, t; x', y', z', t', $x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z', t + \lambda t'$; $x + \lambda' x', y + \lambda' y', z + \lambda' z', t + \lambda' t'$ les coordonnées de quatre points A, B, C, D en ligne droite. Si l'on suppose que A soit dans le premier plan et B dans le second, on aura

$$\alpha_A = 0, \qquad \beta_B = 0.$$

En substituant les coordonnées de C et de D dans les polynomes λ et δ respectivement, on aura évidemment

$$\gamma_C = \alpha_A + \lambda\alpha_B + k(\beta_A + \lambda\beta_B) = \lambda\alpha_B + k\beta_A = 0,$$

et de même

$$\delta_D = \alpha_A + \lambda'\alpha_B + k'(\beta_A + \lambda'\beta_B) = \lambda'\alpha_B + k'\beta_A = 0.$$

Il viendra donc

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{k}{k'}.$$

Et, par conséquent, $\frac{\lambda}{\lambda'}$ sera constant. C. Q. F. D.

Nous appellerons $\frac{k}{k'}$ le rapport anharmonique des quatre plans (ou des quatre droites) et nous le désignerons par la notation

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

On voit que ce rapport est égal à celui des quatre points où une sécante quelconque rencontre les quatre plans ou les quatre droites.

31. Le théorème précédent conduit, nous le verrons, à de nombreuses conséquences. Dès à présent, nous signalerons la suivante : *La surface engendrée par une droite qui s'appuie sur trois droites fixes admet un double système de génératrices rectilignes. Quatre génératrices de l'un des systèmes coupent toutes les génératrices de l'autre système en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Soient, en effet, d, d_1, d_2 trois droites données de l'espace et δ la droite variable qui est assujettie à les rencontrer. Soient δ_1, δ_2 deux positions particulières de δ et désignons par A, B, C; A', B', C' les points où δ_1, δ_2 coupent d, d_1, d_2. On peut évidemment déterminer une correspondance entre deux points M, M' sur ces deux droites par la condition qu'on ait

$$\mathcal{R}(A, B, C, M) = \mathcal{R}(A', B', C', M').$$

Et alors, d'après le théorème que nous venons de démontrer, les quatre plans qui passent respectivement par A, B, C, M et une position quelconque de δ iront couper la droite δ_2 en quatre points A', B', C', M'_1, tels qu'on ait

$$\mathcal{R}(A, B, C, M) = \mathcal{R}(A', B', C', M'_1) = \mathcal{R}(A', B', C', M').$$

Donc M'_1 coïncidera avec M'. C'est dire que la droite MM' ira rencontrer toutes les positions de δ et, par conséquent, appartiendra à la surface engendrée par δ.

Prenons maintenant quatre génératrices d'un même système de la surface, d', d'_1, d'_2, d'_3. Comme elles vont toutes couper une géné-

ratrice δ de l'autre système, elles sont dans quatre plans passant par δ; elles sont donc coupées par toutes les génératrices de l'autre système en quatre points qui se trouvent dans ces quatre plans et *dont, par conséquent, le rapport anharmonique est constant.*

On peut appliquer les méthodes précédentes au cas où deux droites d, d_1 sont dans un même plan. Alors, si l'on prend arbitrairement trois points A, B, C sur l'une et trois points A', B', C' sur l'autre, une correspondance pourra être établie entre deux points M, M' pris respectivement sur les deux droites par la condition que les rapports anharmoniques

$$\mathcal{R}(A, B, C, M), \quad \mathcal{R}(A', B', C', M')$$

soient égaux. Nous verrons alors que les droites MM' sont, en général, tangentes à une conique admettant les cinq tangentes

$$d, d_1, AA', BB', CC'.$$

Mais, dans le cas particulier où les droites AA', BB', CC' iraient concourir en un point unique, la droite MM' devra aller passer par ce point. C'est une condition que l'on peut toujours réaliser en amenant, par une translation, le point A, par exemple, à coïncider avec le point A'.

32. Avant d'aller plus loin, il ne sera pas inutile de montrer que la définition précédente du rapport anharmonique est identique, pour les points réels, à celle qui a servi aux géomètres purs.

Reprenons, en effet, l'auxiliaire λ, et soient x, y, z, t; x', y', z', t'; $x+\lambda x'$, $y+\lambda y'$, $z+\lambda z'$, $t+\lambda t'$ les coordonnées homogènes de trois points en ligne droite A, B, M. Supposons que les coordonnées soient cartésiennes. Alors les coordonnées ordinaires de M seront

$$x_M = \frac{x+\lambda x'}{t+\lambda t'}, \qquad y_M = \frac{y+\lambda y'}{t+\lambda t'}, \qquad z_M = \frac{z+\lambda z'}{t+\lambda t'}.$$

Examinons d'abord le cas où t et t' sont différents de zéro; on aura, par exemple,

$$x_M = \frac{\dfrac{x}{t} + \dfrac{\lambda t'}{t}\dfrac{x'}{t'}}{1+\dfrac{\lambda t'}{t}}; \tag{2}$$

et, par suite, d'après une formule bien connue, on aura

$$(3) \qquad \frac{\lambda t'}{t} = -\frac{\overline{\text{AM}}}{\overline{\text{BM}}},$$

$\overline{\text{AM}}$, $\overline{\text{BM}}$ désignant des abscisses.

Si maintenant l'un des points, B par exemple, est à l'infini, on aura

$$x_{\text{M}} = \frac{x}{t} + \lambda\frac{x'}{t}, \qquad y_{\text{M}} = \frac{y}{t} + \lambda\frac{y'}{t}, \qquad z_{\text{M}} = \frac{z}{t} + \lambda\frac{z'}{t},$$

et si ρ désigne le segment dont les projections sur les axes sont x', y', z', on trouvera

$$(4) \qquad \overline{\text{AM}} = \frac{\lambda}{t}\rho.$$

Enfin, si A et B sont tous deux à l'infini, il faudra revenir aux coordonnées homogènes et l'on aura, pour le point M,

$$x_{\text{M}} = x + \lambda x', \qquad y_{\text{M}} = y + \lambda y', \qquad z_{\text{M}} = z + \lambda z', \qquad t_{\text{M}} = 0,$$

x_{M}, y_{M}, z_{M} définiront les composantes de deux forces appliquées à l'origine ; l'une ρ dont les composantes seront x, y, z ; l'autre $\lambda\rho_1$ dont les composantes seront λx_1, λy_1, λz_1. La considération du triangle formé par les forces et leur résultante nous donnera immédiatement, en grandeur et en signe,

$$(5) \qquad \lambda = -\frac{\rho}{\rho_1}\frac{\sin(\widehat{moa})}{\sin(\widehat{mob})}.$$

De ces diverses expressions de λ résultent les expressions connues du rapport anharmonique.

Si trois points au moins sont à distance finie, on a

$$(6) \qquad \mathcal{R}(\text{A, B, M, M}') = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\text{AM}}{\text{BM}} : \frac{\text{AM}'}{\text{BM}'}.$$

Si les points sont à distance infinie,

$$(7) \qquad \mathcal{R}(\text{A, B, M, M}') = \frac{\sin(\widehat{aom})}{\sin(\widehat{bom})} : \frac{\sin(\widehat{aom'})}{\sin(\widehat{bom'})}.$$

Quant au rapport anharmonique de quatre plans ou de quatre

droites, leur expression résulte de celles que nous venons de donner et du théorème fondamental.

Nous glisserons rapidement sur toutes ces définitions du rapport anharmonique, parce qu'elles ne pourront s'appliquer aux points et aux plans imaginaires que lorsqu'on aura étendu à ces éléments les notions d'angle et de distance, ce qui est assez délicat. Revenons donc à notre première définition et continuons à développer notre théorie analytique. Nous verrons plus tard qu'au lieu de rattacher la notion du rapport anharmonique à celles d'angle ou de distance, c'est le contraire qu'on peut faire en rattachant à l'unique considération du rapport anharmonique les notions, si différentes l'une de l'autre, d'angle et de distance.

33. Nous commencerons par résoudre le problème suivant :

Étant donnés sur une droite quatre points A, B, C, D, correspondants aux valeurs α, β, γ, δ de λ dans les expressions

$$x+\lambda x', \quad y+\lambda y', \quad z+\lambda z', \quad t+\lambda t',$$

déterminer leur rapport anharmonique.

Faisons le calcul pour une seule coordonnée. Nous poserons

$$x_1 = x+\alpha x', \qquad x_2 = x+\beta x', \qquad x_3 = x+\gamma x', \qquad x_4 = x+\delta x',$$

ce qui nous donnera

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & \alpha \\ x_2 & 1 & \beta \\ x_3 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

et par suite

$$x_3 = \frac{x_1(\gamma-\beta) - x_2(\gamma-\alpha)}{\alpha-\beta}.$$

On aurait de même

$$x_4 = \frac{x_1(\delta-\beta) - x_2(\delta-\alpha)}{\alpha-\beta}.$$

On peut donc écrire les coordonnées des quatre points comme il suit :

$$\begin{array}{lllll}
(\mathrm{A}) & x_1, & y_1, & z_1, & t_1, \\
(\mathrm{B}) & x_2, & y_2, & z_2, & t_2, \\
(\mathrm{C}) & x_1 - \dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}x_2, & y_1 - \dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}y_2, & z_1 - \dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}z_2, & t_1 - \dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}t_2, \\
(\mathrm{D}) & x_1 - \dfrac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}x_2, & y_1 - \dfrac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}y_2, & z_1 - \dfrac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}z_2, & t_1 - \dfrac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}t_2.
\end{array}$$

Et, par conséquent, on aura

$$\mathcal{R}(A, B, C, D) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} : \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}.$$

La fonction qui figure ici dans le second membre est ce qu'on appelle *le rapport anharmonique des quatre quantités* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. D'après la manière dont nous l'avons obtenu, il est clair qu'il ne changera pas, si l'on effectue sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ une même substitution linéaire. En le désignant par $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, on a

$$\mathcal{R}(A, B, C, D) = \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

La démonstration précédente s'étend évidemment aux plans (ou aux droites) définis par les équations

$$P + \alpha Q = 0, \qquad P + \beta Q = 0, \qquad P + \gamma Q = 0, \qquad P + \delta Q = 0.$$

34. L'expression que nous venons d'obtenir nous permet de reconnaître comment varie le rapport anharmonique de quatre points ou de quatre plans quand on change l'ordre des éléments. On a évidemment

$$(8)\quad \mathcal{R}(A, B, C, D) = \mathcal{R}(B, A, D, C) = \mathcal{R}(C, D, A, B) = \mathcal{R}(D, C, B, A).$$

On peut : 1° échanger le groupe des deux premiers éléments et le groupe des deux derniers; 2° échanger les deux premiers, pourvu qu'on échange les deux derniers. Il est donc possible d'amener toujours une lettre à la première place, et il y aura au plus six rapports anharmoniques distincts. Le procédé suivant permet de les trouver et *montre qu'ils sont fonctions les uns des autres.*

Considérons, par exemple, quatre points A, B, C, D. On pourra toujours supposer qu'ils correspondent aux valeurs

$$0, \quad \infty, \quad \lambda, \quad 1$$

du paramètre. On aura alors

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{R}(A, B, C, D) = \mathcal{R}(B, A, D, C) = \mathcal{R}(C, D, A, B) = \mathcal{R}(D, C, B, A) = \lambda, \\ &\mathcal{R}(A, B, D, C) = \mathcal{R}(B, A, C, D) = \mathcal{R}(C, D, B, A) = \mathcal{R}(D, C, A, B) = \frac{1}{\lambda}, \\ &\mathcal{R}(A, C, B, D) = \mathcal{R}(C, A, D, B) = \mathcal{R}(B, D, A, C) = \mathcal{R}(D, B, C, A) = 1 - \lambda, \\ &\mathcal{R}(A, C, D, B) = \mathcal{R}(C, A, B, D) = \mathcal{R}(B, D, C, A) = \mathcal{R}(D, B, A, C) = \frac{1}{1 - \lambda}, \\ &\mathcal{R}(A, D, C, B) = \mathcal{R}(D, A, B, C) = \mathcal{R}(C, B, A, D) = \mathcal{R}(B, C, D, A) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \\ &\mathcal{R}(A, D, B, C) = \mathcal{R}(D, A, C, B) = \mathcal{R}(B, C, A, D) = \mathcal{R}(C, B, D, A) = 1 - \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Ce Tableau s'obtient en appliquant les deux règles suivantes :

Si l'on échange les deux premiers ou les deux derniers éléments, le rapport anharmonique est remplacé par son inverse.

Si l'on échange les deux éléments du milieu ou les deux éléments extrêmes, le rapport anharmonique est remplacé par son complément à l'unité.

On obtiendrait les mêmes résultats en partant de l'identité d'Euler

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=0 \tag{10}$$

qui peut s'écrire

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)+\mathcal{R}(\alpha, \gamma, \beta, \delta)=1. \tag{11}$$

Mais la première méthode fait mieux comprendre pourquoi les six rapports sont fonctions l'un de l'autre.

35. Avant de continuer, nous allons présenter quelques remarques sur la théorie analytique du rapport anharmonique.

Soit

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)=\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}.$$

Pour qu'il devienne indéterminé, il faut qu'on ait

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)=0, \qquad (\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=0$$

et, par suite, que *trois éléments coïncident.*

Dans tous les autres cas, le rapport anharmonique est déterminé.

Examinons maintenant si deux des valeurs différentes de ce rapport peuvent devenir égales.

Il suffit évidemment de chercher dans quel cas λ est égale à une des valeurs qui le suivent dans le Tableau (9). Faisons d'abord

$$\lambda=\frac{1}{\lambda},$$

ce qui donne

$$\lambda^2=1, \qquad \lambda=\pm 1.$$

1° Si $\lambda=1$, $\mathcal{R}(\alpha, \gamma, \beta, \delta)=0$. Les éléments α et β ou γ et δ coïncident. Les valeurs des six rapports se réduisent à trois et sont

$$1,\ 1 \quad 0,\ 0, \quad \infty,\ \infty.$$

Ainsi, quand le rapport prend une des trois valeurs $1, 0, \infty$, il y a coïncidence de deux éléments.

2° Faisons maintenant $\lambda = -1$. Alors les valeurs des six rapports sont

$$-1, \quad -1, \quad 2, \quad 2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}.$$

Elles se réduisent encore à trois distinctes. On a

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = -1,$$

ou, en développant,

$$(12) \qquad 2\alpha\beta + 2\gamma\delta - (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 0.$$

Il y a symétrie en α et β, aussi bien qu'en γ et δ. Pour préciser, nous dirons que *les couples* α, β *et* γ, δ *sont en relation harmonique.*

3° Supposons enfin qu'on ait

$$\lambda = \frac{1}{1 - \lambda},$$

ce qui donne les deux valeurs

$$\lambda = -\theta, \qquad \lambda = -\theta^2,$$

θ étant une racine cubique imaginaire de l'unité. Alors les valeurs des six rapports sont

$$-\theta, \quad -\theta^2, \quad -\theta^2, \quad -\theta, \quad -\theta, \quad -\theta^2.$$

Ici, elles se réduisent à deux distinctes. On dit alors que la proportion est *équianharmonique.*

Tandis que la proportion harmonique peut exister entre des éléments réels, la proportion équianharmonique ne relie que des éléments dont un au moins est imaginaire.

Nous avons épuisé tous les cas dans lesquels deux rapports anharmoniques sont égaux.

Revenons à la proportion équianharmonique. L'équation qui la définit peut s'écrire

$$\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + 1 = 0,$$

où

$$(13) \quad (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\delta - \beta)^2 + (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2 = 0.$$

Elle est symétrique par rapport aux quatre éléments et plus

simple à certains égards que la proportion harmonique. Si l'on a, par exemple, à exprimer que les racines d'une équation du quatrième degré sont en proportion équianharmonique, la relation précédente sera symétrique par rapport aux racines, et du quatrième ordre seulement. Si l'on veut que les racines soient en proportion harmonique, il faudra former le produit des trois facteurs

$$[2\alpha\beta + 2\gamma\delta - (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)],$$
$$[2\alpha\gamma + 2\beta\delta - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta)],$$
$$[2\alpha\delta + 2\beta\gamma - (\alpha + \delta)(\beta + \gamma)],$$

qui est du sixième degré, et écrire qu'il est égal à zéro.

36. Les notions précédentes conduisent à une belle identité, découverte par Cauchy et Cayley.

Supposons qu'il s'agisse de déterminer le rapport anharmonique des racines d'une équation du quatrième degré.

Si deux racines étaient coïncidentes, on aurait

$$f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0.$$

S'il y avait proportion harmonique, on aurait

$$\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Cela posé, considérons la fraction rationnelle

$$\frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

Elle change de signe sans changer de valeur quand on change λ en $\frac{1}{\lambda}$ ou $1 - \lambda$. Donc le quotient

$$\frac{f^2(\lambda)}{\varphi^2(\lambda)}$$

demeurera invariable quand on permutera les racines de l'équation; ce sera donc une fonction symétrique de ces racines; et l'équation aux rapports anharmoniques sera de la forme

$$\frac{f^2(\lambda)}{\varphi^2(\lambda)} = a, \tag{14}$$

a étant une fonction symétrique qu'on pourra calculer.

Ainsi, l'équation précédente, où a est quelconque, donne les six valeurs du rapport anharmonique qui correspondent à un même groupe de quatre éléments.

Faisons maintenant

$$\lambda = -\theta;$$

on aura

$$f^2(\lambda) = 1, \qquad \varphi^2(\lambda) = -\frac{27}{4}.$$

Donc l'équation du sixième degré

$$\frac{f^2(\lambda)}{\varphi^2(\lambda)} = -\frac{4}{27}$$

aura deux racines triples $-\theta$ et $-\theta^2$. De là résulte l'identité remarquable

$$\varphi^2(\lambda) + \frac{27}{4} f^2(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda + 1)^3, \tag{15}$$

qu'on peut aisément vérifier.

Avant d'en faire des applications, nous pouvons remarquer qu'elle se décompose en deux autres,

$$\varphi(\lambda) + \frac{3}{2} f(\lambda)\sqrt{-3} = (\lambda + \theta)^3, \tag{16}$$

$$\varphi(\lambda) - \frac{3}{2} f(\lambda)\sqrt{-3} = (\lambda + \theta^2)^3, \tag{17}$$

où l'on a pris pour θ la valeur

$$\theta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}. \tag{18}$$

Mais ces identités, qui sont les conséquences nécessaires de la précédente, peuvent, comme elle et par la même méthode, se démontrer directement. Nous laissons ce point à l'examen du lecteur.

On peut d'abord faire usage des identités précédentes pour résoudre l'équation du sixième degré

$$\frac{f^2(\lambda)}{\varphi^2(\lambda)} = a.$$

Cette équation se décompose tout d'abord dans les deux sui-

vantes :

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda)\sqrt{a},$$

où $\sqrt{a}$ peut avoir deux déterminations.

En faisant usage des identités (16), (17), il vient

$$\varphi(\lambda)\left[1 + \frac{3}{2}\sqrt{a}\sqrt{-3}\right] = (\lambda + \theta)^3,$$

$$\varphi(\lambda)\left[1 - \frac{3}{2}\sqrt{a}\sqrt{-3}\right] = (\lambda + \theta^2)^3$$

et, par suite, on a

$$\frac{\lambda + \theta}{\lambda + \theta^2} = \sqrt[3]{\frac{2 + 3\sqrt{-3a}}{2 - 3\sqrt{-3a}}}.$$

37. Les remarques précédentes jettent beaucoup de jour sur la résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

Reprenons l'identité (15) et remplaçons-y λ par le rapport anharmonique de quatre éléments α, β, γ, δ. Elle prend la forme

$$\tag{19} \begin{aligned} &[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)]^2[(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]^2 \\ &\quad\times[(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)]^2+27\zeta^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \\ &\quad= \frac{1}{2}[(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2]^3, \end{aligned}$$

où $\zeta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ désigne le produit des six différences des quatre éléments α, β, γ, δ :

$$\zeta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta).$$

Si l'on suppose que α, β, γ, δ soient les racines d'une équation du quatrième degré

$$\tag{20} ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4b'x + a' = 0,$$

l'identité précédente deviendra celle qui a été trouvée par Cauchy et Cayley.

Désignons par i et j les deux fonctions des coefficients qui ont pour expressions

$$\tag{21} \begin{cases} i = aa' - 4bb' + 3c^2, \\ j = aca' + 2bcb' - ab'^2 - a'b^2 - c^3; \end{cases}$$

un calcul de fonctions symétriques nous donnera

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a^2}{24}[(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2+(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2]=i,\\ &-\frac{4a^3}{2^3}[(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)]\\ &\times[(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)][(\alpha-\delta)(\beta-\lambda)+(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)]=j,\end{aligned}\right.$$

de sorte que notre identité prendra la forme

$$(23)\qquad a^6\zeta^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=2^8(i^3-27j^2).$$

Ainsi, le discriminant de l'équation du quatrième degré s'exprime de la manière la plus simple au moyen des invariants i et j.

38. Au reste, on peut éviter le calcul de fonctions symétriques que nous venons d'indiquer si l'on emploie, pour résoudre l'équation du quatrième degré, la méthode de Ferrari, telle qu'elle a été présentée par M. *Hermite*.

Posons l'identité

$$(24)\quad \begin{aligned} a(ax^4+4bx^3+6cx^2+4b'x+a')&=(ax^2+2bx+c+2\lambda)^2\\ &-4(b^2-ac+a\lambda)x^2-4(bc-ab'+2b\lambda)x-[(c+2\lambda)^2-aa'].\end{aligned}$$

En exprimant que le polynome du second degré formé par les trois derniers termes est un carré parfait, on sera conduit à l'équation

$$(bc-ab'+2b\lambda)^2-(b^2-ac+a\lambda)[(c+2\lambda)^2-aa']=0,$$

qui est du troisième degré en λ. On a choisi les notations de telle manière qu'elle soit privée du terme en λ^2; et, en effet, elle se réduit à la suivante :

$$(25)\qquad 4\lambda^3-i\lambda+j=0,$$

où i et j sont les polynomes définis plus haut. Si l'on prend pour λ une des trois racines de cette équation, le premier membre de notre équation (20), multiplié par a, sera mis sous la forme d'une différence de carrés; il deviendra le produit des deux facteurs

$$ax^2+2bx+2\lambda+c\pm\left[2x\sqrt{b^2-ac+a\lambda}+\frac{bc-ab'+2b\lambda}{\sqrt{b^2-ac+a\lambda}}\right];$$

et l'on aura les quatre racines de l'équation en égalant successivement à zéro ces deux facteurs. Appelons α, β les racines qui appartiennent au premier facteur, γ, δ celles qui appartiennent au second. On aura

$$a(\alpha+\beta) = -2b + 2\sqrt{b^2 - ac + a\lambda},$$
$$a(\gamma+\delta) = -2b - 2\sqrt{b^2 - ac + a\lambda},$$

et de là on déduit

$$\sqrt{b^2 - ac + a\lambda} = \frac{a}{4}(\alpha+\beta-\gamma-\delta) \tag{26}$$

ou, en élevant au carré et remplaçant b et c par leurs expressions en fonction des racines,

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{a}{12}[2\alpha\beta + 2\gamma\delta - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)] \\ &= \frac{a}{12}[(\alpha-\delta)(\beta-\gamma) + (\alpha-\gamma)(\beta-\delta)].\end{aligned} \tag{27}$$

Cette expression de λ explique bien pourquoi elle dépend d'une équation du troisième degré. En permutant les racines α, β, γ, δ, on n'obtient que trois valeurs différentes de λ.

39. Nous pouvons maintenant indiquer comment on fera le calcul de fonctions symétriques qui conduit aux formules (22). Désignons par λ_1, λ_2, λ_3 les trois racines de l'équation (25) en λ. On aura, par exemple,

$$\left\{\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{a}{12}[2\alpha\beta + 2\gamma\delta - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)], \\ \lambda_2 &= \frac{a}{12}[2\alpha\gamma + 2\beta\delta - (\alpha+\gamma)(\beta+\delta)], \\ \lambda_3 &= \frac{a}{12}[2\alpha\delta + 2\beta\gamma - (\alpha+\delta)(\beta+\gamma)]\end{aligned}\right. \tag{28}$$

et de là on déduit

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{a}{4}(\alpha-\beta)(\gamma-\delta), \qquad \lambda_3 - \lambda_1 = \frac{a}{4}(\alpha-\gamma)(\delta-\beta), \\ &\qquad\qquad \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{a}{4}(\alpha-\delta)(\beta-\gamma).\end{aligned}\right. \tag{29}$$

En se servant des relations évidentes

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{j}{4},$$

$$(\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{3i}{2},$$

on retrouvera les équations (22).

On peut même se servir des relations précédentes pour obtenir l'identité de Cauchy et de Cayley.

On sait, en effet, que le discriminant de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0$$

a pour expression

$$\zeta^2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -4p^3 - 27q^2,$$

$\zeta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ désignant ici encore le produit

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$$

des différences des racines.

Appliquons ce résultat à l'équation (25), il viendra

$$2^4\zeta^2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = i^3 - 27j^2;$$

si l'on remplace les différences des racines λ par leurs expressions (29), on retrouve l'identité déjà obtenue

$$a^6\zeta^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 2^8(i^3 - 27j^2). \tag{23}$$

Nous ne quitterons pas ce sujet sans faire remarquer que la formule (26) nous conduit directement à la résolution de l'équation du quatrième degré. En l'appliquant successivement aux trois racines λ, elle nous donne, en effet, les résultats suivants :

$$\text{(30)} \quad \begin{cases} \dfrac{a}{4}(\alpha + \beta - \gamma - \delta) = \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}, \\ \dfrac{a}{4}(\alpha + \gamma - \beta - \delta) = \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2}, \\ \dfrac{a}{4}(\alpha + \delta - \beta - \gamma) = \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}. \end{cases}$$

En joignant à ces équations la relation évidente

$$\frac{a}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = -b,$$

et en ajoutant, on obtient la formule élégante

$$(31)\quad a\alpha = -b + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2} + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}.$$

L'inconvénient de cette formule, c'est qu'elle comporte huit déterminations. Mais, si l'on se reporte aux équations (30), on constate que le produit des trois radicaux $\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_i}$ est une fonction symétrique des racines et, par suite, doit être rationnel. Le calcul très simple de cette fonction symétrique conduit au résultat suivant :

$$\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2}\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3} = \frac{1}{2}(3abc - 2b^3 - a^2 b').$$

On voit que, lorsque le signe de deux des radicaux sera fixé, celui du troisième le sera également. La formule (31) ne nous donne donc que quatre déterminations pour α.

40. L'identité de Cauchy et de Cayley, dont nous avons fait usage et qui dérive de la considération du rapport anharmonique, nous donnera de même la résolution de l'équation du troisième degré. Si cette équation est

$$f(x) = 0,$$

et si nous désignons par α, β, γ ses racines, nous n'aurons qu'à écrire cette identité, en y remplaçant δ par la variable x. Nous serons ainsi conduits à une relation de la forme

$$f^2(x) = \text{H}^3(x) + \text{Q}^2(x),$$

où $\text{H}(x)$, $\text{Q}(x)$ sont des polynomes dont les coefficients se calculeront aisément et qui seront respectivement du second et du troisième degré. Pour qu'elle ait lieu, il faudra nécessairement que $f(x) - \text{Q}(x)$ et $f(x) + \text{Q}(x)$ soient des cubes parfaits.

En écrivant donc

$$f(x) - \text{Q}(x) = \text{H}'^3(x), \qquad f(x) + \text{Q}(x) = \text{H}''^3(x),$$

H' et H'' désignant des polynomes du premier degré, on aura l'identité

$$2f(x) = \text{H}'^3(x) + \text{H}''^3(x),$$

qui conduit immédiatement à la résolution de l'équation.

41. Nous nous contenterons de ces indications, et, revenant à l'équation du quatrième degré, nous indiquerons en terminant un moyen très simple de calculer la fonction symétrique

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2}\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3} \\ &= \frac{a^3}{4^3}(\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha + \gamma - \beta - \delta)(\alpha + \delta - \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Nous remarquerons qu'on a, par exemple,

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta = 2(\alpha + \beta) + \frac{4b}{a},$$

ce qui permet de donner à K l'expression

$$K = \frac{a^3}{8}\left(\alpha + \beta + \frac{2b}{a}\right)\left(\alpha + \gamma + \frac{2b}{a}\right)\left(\alpha + \delta + \frac{2b}{a}\right).$$

Cela posé, dans l'identité

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta),$$

remplaçons x par $-\alpha - \frac{2b}{a}$; il viendra

$$f\left(-\alpha - \frac{2b}{a}\right) = 2(a\alpha + b)\left(\alpha + \beta + \frac{2b}{a}\right)\left(\alpha + \gamma + \frac{2b}{a}\right)\left(\alpha + \delta + \frac{2b}{a}\right).$$

De là nous déduisons

$$f\left(-\alpha - \frac{2b}{a}\right) = \frac{16K}{a^3}(a\alpha + b),$$

ce qu'on peut écrire

$$16K = a^3 \frac{f\left(-\alpha - \frac{2b}{a}\right) - f(\alpha)}{a\alpha + b},$$

puisque $f(\alpha)$ est nulle. En supprimant, dans le second membre, le facteur $a\alpha + b$, on aura pour l'expression de $16K$ un polynome du troisième degré en α.

K étant une fonction symétrique, l'expression précédente ne devra pas changer quand on y remplacera α par β, γ ou δ. Cela ne peut arriver que si elle subsiste pour toutes les valeurs de x quand on y substitue x à α. Sans cela, on aurait une équation du troisième degré admettant les quatre racines α, β, γ, δ. Puisqu'on a,

pour toutes les valeurs de x,

$$16\,\mathrm{K} = a^3 \frac{f\left(-x-\frac{2b}{a}\right)-f(x)}{ax+b},$$

on pourra prendre la valeur du second membre lorsque x tendra vers $-\frac{b}{a}$, ce qui donnera, en appliquant une règle connue,

$$8\,\mathrm{K} = -a^2 f'\left(-\frac{b}{a}\right)$$

ou

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}(3abc - 2b^3 - a^2 b');$$

ce résultat concorde bien avec la valeur que nous avons indiquée.

CHAPITRE IV.

LA MÉTHODE DES NOTATIONS ABRÉGÉES DE BOBILLIER ET L'HOMOLOGIE DANS LE PLAN.

Définition tout à fait générale des coordonnées trilinéaires et tétraédriques par l'emploi du rapport anharmonique. — Méthode des notations abrégées de Bobillier. — Application aux propriétés harmoniques du quadrilatère complet. — Triangles homologiques. — Parti qu'en a tiré von Staudt pour sa théorie. — Tétraèdres homologiques. — L'homologie de Poncelet. — Deux coniques dans le plan peuvent être considérées comme homologiques de douze manières différentes. — Sauf dans un cas très spécial, l'homographie de deux figures planes peut, de deux manières différentes, être ramenée, par le déplacement relatif de l'une des figures, à une homologie. Sauf dans le cas où le centre d'homologie se trouve sur l'axe d'homologie, deux figures homologiques peuvent être mises en perspective d'une infinité de manières. — Deux coniques étant données dans le plan, en faire la perspective de telle manière qu'elles se transforment en deux cercles.

---

42. Au n° 25, nous avons annoncé que l'on peut donner, pour les coordonnées tétraédriques ou trilinéaires, une définition tout aussi générale que celle de Plücker. Les notions que nous avons données sur le rapport anharmonique vont nous permettre de justifier cette assertion et de donner une nouvelle définition de ces coordonnées.

Considérons à cet effet un tétraèdre quelconque, que nous prendrons pour tétraèdre de référence. Nous avons déjà remarqué que, même lorsqu'il est donné, les coordonnées correspondantes ne sont pas entièrement définies; car elles peuvent être multipliées par des constantes arbitraires sans que le tétraèdre de référence soit changé. Mais, pour compléter la définition, il suffira d'adjoindre au tétraèdre le point dont les coordonnées sont toutes égales. Si l'on désigne, en effet, les équations des faces par les formules

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0, \qquad S = 0,$$

les coordonnées relatives à ce tétraèdre sont définies par les relations

$$\rho X = aP, \qquad \rho Y = bQ, \qquad \rho Z = cR, \qquad \rho T = dS,$$

où a, b, c, d sont des constantes et ρ un facteur de proportionnalité, qu'on peut même remplacer par l'unité si les équations des faces sont homogènes. Or, si les coordonnées doivent être égales pour un point déterminé, on devra avoir

$$aP_1 = bQ_1 = cR_1 = dS_1,$$

P_1, Q_1, R_1, S_1 désignant les valeurs que prennent P, Q, R, S en ce point. Les rapports des constantes a, b, c, d sont donc pleinement déterminés, quel que soit le point choisi, pourvu qu'il soit en dehors des faces. Ainsi, *un système de coordonnées tétraédriques est pleinement déterminé si l'on se donne le tétraèdre de référence et le point dont les coordonnées doivent être égales.*

D'après cela, soient X, Y, Z, T les coordonnées relatives à un certain tétraèdre et soient X_1, Y_1, Z_1, T_1 les coordonnées d'un point quelconque M. Considérons l'une quelconque des arêtes du tétraèdre, par exemple celle pour laquelle on a

$$X = 0, \qquad Y = 0.$$

Nous avons quatre plans passant par cette arête : les deux faces précédentes du tétraèdre, le plan passant par M dont l'équation est

$$X - \frac{X_1}{Y_1} Y = 0$$

et le plan passant par le point P dont les coordonnées sont égales. Ce plan est défini par l'équation

$$X - Y = 0.$$

Or, le rapport anharmonique de ces quatre plans, que nous désignerons par la notation $\mathcal{R}(M, P, X, Y)$, est évidemment égal à $\frac{X_1}{Y_1}$. Cela résulte du théorème établi au n° 30; mais on peut aussi le voir en prenant les points d'intersection de ces quatre plans avec l'arête opposée du tétraèdre, définie par les équations

$$Z = 0, \qquad T = 0.$$

Ainsi, *le quotient de deux quelconques des quatre coordonnées*

s'exprime par un rapport anharmonique. On a, par exemple,

$$\mathcal{R}(M, P, X, Y) = \frac{X}{Y}.$$

Comme les rapports seuls des coordonnées interviennent dans les recherches, on voit que le système de coordonnées est pleinement défini par l'adjonction au tétraèdre de référence du point dont les coordonnées doivent être égales.

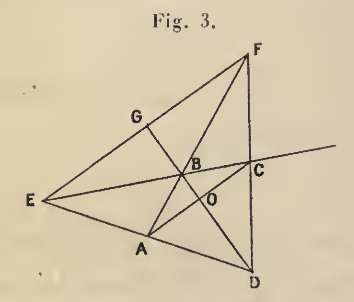
43. A peu près à la même époque que Möbius et avant Plücker, un géomètre français, *Bobillier*, dans deux Articles *Sur un nouveau mode de recherches des propriétés de l'étendue*, insérés en janvier 1828 au Tome XVIII des *Annales de Gergonne*, indiquait des méthodes plus compréhensives que l'emploi des coordonnées tétraédriques, et faisait un emploi très habile de ce que l'on appelle aujourd'hui la *méthode des notations abrégées*. On trouve déjà dans son travail les équations générales des coniques inscrites ou circonscrites à un triangle. Nous choisirons d'autres exemples.

Signalons d'abord les propriétés harmoniques du quadrilatère complet.

Si ABCD (*fig*. 3) est un quadrilatère plan, désignons respectivement par

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 0$$

Fig. 3.



les équations des côtés AB, BC, CD, DA. Les quatre polynomes α, β, γ, δ sont liés par une relation linéaire

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0$$

qu'on peut évidemment ramener à la forme

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \tag{1}$$

en faisant entrer les constantes a, b, c, d dans les polynomes α, β, γ, δ. Ce point étant admis, l'équation

$$\alpha + \beta = 0$$

pourra aussi s'écrire

$$\gamma + \delta = 0.$$

Elle représentera donc la droite BD. En raisonnant de même pour les autres combinaisons, on voit que

la droite BD aura pour équation $\alpha + \beta = -\gamma - \delta = 0$,
» EF » $\alpha + \gamma = -\beta - \delta = 0$,
» AC » $\alpha + \delta = -\beta - \gamma = 0$.

D'après cela,

la droite OE aura pour équation $\delta - \beta = 0$,
» OF » $\alpha - \gamma = 0$.

Si donc on pose

$$\alpha + \beta = 2x, \qquad \alpha + \gamma = 2y, \qquad \alpha + \delta = 2z,$$

les équations

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

représenteront les trois diagonales BD, EF, AC du quadrilatère complet, et l'on aura

$$(2) \qquad \begin{aligned} \alpha &= x + y + z, & \beta &= x - y - z, \\ \gamma &= -x + y - z, & \delta &= -x - y + z. \end{aligned}$$

On aperçoit immédiatement que chaque diagonale est partagée harmoniquement par les deux autres; car, sur la droite BD, par exemple, pour laquelle on a

$$x = 0,$$

les points B, D, O, G sont déterminés par les équations

$$y + z = 0, \qquad y - z = 0, \qquad z = 0, \qquad y = 0,$$

qui mettent en évidence la relation harmonique annoncée.

Si, à la place de x, z, on introduit les deux polynomes

$$x + z = x', \qquad x - z = z',$$

les expressions de α, β, γ, δ deviendront

$$(3) \qquad \alpha = y + x', \quad \beta = -y + z', \quad \gamma = -x' + y, \quad \delta = -y - z'.$$

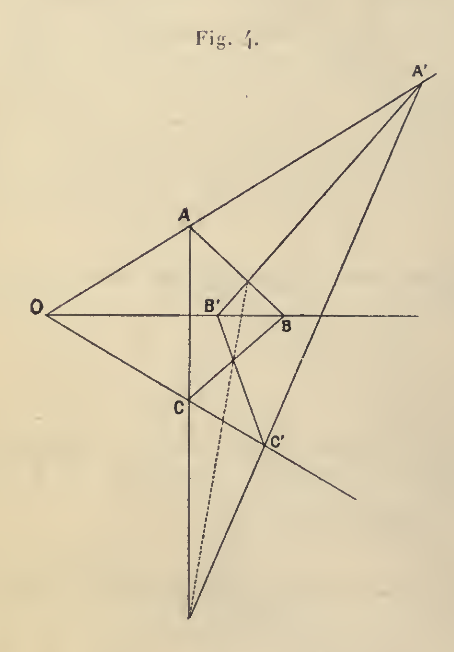
Le quadrilatère sera rapporté au triangle OEF et les formules précédentes mettront cette fois en évidence la propriété des diagonales AC, BD d'être divisées harmoniquement par les droites OE, OF. Cette méthode conduirait rapidement à l'équation des coniques inscrites ou circonscrites au quadrilatère ABCD.

Comme second exemple, nous prendrons le théorème qui sert de base à la théorie de von Staudt et que l'on peut énoncer ainsi :

Si deux triangles ont leur sommet sur trois droites concourantes, leurs côtés se coupent en trois points situés sur une droite (et réciproquement).

Soient (*fig.* 4) ABC, A′B′C′ les deux triangles tels que les

Fig. 4.



droites AA′, BB′, CC′ concourent en O. Nous allons envisager successivement les deux quadrilatères OABC, OA′B′C′.

Si les équations des côtés OA, AB, BC, CO du premier sont respectivement

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 0,$$

on peut supposer, nous l'avons vu, qu'elles peuvent être écrites de

manière à donner naissance à l'identité

$$(4) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

La diagonale OB aura pour équation

$$\alpha + \delta = 0.$$

Donc le second quadrilatère, dans lequel les côtés OA', A'B', B'C', C'O sont représentés de même par les équations

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \delta = 0,$$

devra, puisque OB coïncide avec OB', donner naissance à une identité

$$(5) \qquad \alpha + \beta' + \gamma' + \delta = 0.$$

Des deux identités (4), (5) on déduit la suivante :

$$(6) \qquad \beta + \gamma - \beta' - \gamma' = 0.$$

Dans le premier quadrilatère, la diagonale AC a pour équation

$$\alpha + \beta = 0$$

et, dans le second, la diagonale A'C' aura de même pour équation

$$\alpha + \beta' = 0.$$

Donc, dans les deux triangles, les côtés correspondants ont pour équations

$$\alpha + \beta = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$
$$\alpha + \beta' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0.$$

En vertu de l'identité (6), ces côtés se coupent sur la droite représentée par l'une ou l'autre des équations équivalentes :

$$\beta - \beta' = 0, \quad \gamma - \gamma' = 0.$$

C'est la proposition qu'il s'agissait d'établir.

44. Hâtons-nous de dire que, pour sa théorie, von Staudt avait besoin d'une démonstration purement géométrique. Voici comment on peut l'obtenir.

Supposons que les triangles ABC, A'B'C' ne soient pas dans un

même plan. Si les côtés BC, B′C′; CA, C′A′; AB, A′B′ se coupent, leurs trois points d'intersection seront nécessairement sur la ligne d'intersection des plans des deux triangles. Puisque BC et B′C′ se coupent, il en est de même des droites BB′, CC′. En étendant la remarque aux autres côtés, on voit que les trois droites AA′, BB′, CC′ se coupent deux à deux ; et, comme elles ne sauraient être dans un même plan, elles concourent en un point unique.

La démonstration s'étend au cas où les deux triangles ABC, A′B′C′ sont dans un même plan. Il suffit de prendre comme intermédiaire un triangle A″B″C″, non situé dans leur plan, et dont les côtés vont passer par le point d'intersection des côtés correspondants des deux triangles.

De cette proposition, von Staudt déduisait aisément une définition de la proportion harmonique, *indépendante de toute relation métrique*. Il suffit de remarquer, en s'appuyant sur la proposition précédente, que, si le quadrilatère ABCD (*fig.* 3) se déforme de manière que les points B, D, G demeurent fixes, il en sera de même du point O. On saura donc, avec la règle, construire le conjugué harmonique du point G par rapport au segment BD.

45. Une méthode analogue s'appliquerait à deux tétraèdres ABCD, A′B′C′D′ dont les sommets correspondants A, A′; B, B′; C, C′; D, D′ seraient sur des droites concourantes.

Soit en effet O le point de concours de ces quatre droites. Les trois plans OBC, OAC, OAB seront représentés par des équations telles que

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0.$$

On peut multiplier les premiers membres de ces équations par des nombres tels que la droite OD, qui passe en O, ait pour équations

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

Alors le plan

OCD aura pour équation $\alpha - \beta = 0$,
OAD » $\beta - \gamma = 0$,
OBD » $\gamma - \alpha = 0$.

On verra, pour des raisons analogues, que l'on peut donner à

l'équation

$$\delta = 0$$

du plan ABC une forme telle que le plan

BCD ait son équation de la forme $\alpha + \delta = 0$,
ACD » $\beta + \delta = 0$,
ABD » $\gamma + \delta = 0$.

De même, dans le second tétraèdre, le plan $A'B'C'$ ayant pour équation

$$\delta' = 0,$$

le plan

$B'C'D'$ aura pour équation $\alpha + \delta' = 0$,
$A'C'D'$ » $\beta + \delta' = 0$,
$A'B'D'$ » $\gamma + \delta' = 0$.

Donc, le plan défini par l'équation

$$\delta - \delta' = 0$$

contiendra les intersections des faces et des arêtes correspondantes des deux tétraèdres.

46. Les deux propositions précédentes peuvent se rattacher à une transformation célèbre, l'homologie de Poncelet, dont l'introduction dans la Science a précédé celle de l'homographie.

Considérons la transformation homographique particulière définie par les équations

$$(7) \qquad X = X', \qquad Y = Y', \qquad Z = Z', \qquad T = aX' + bY' + cZ' + dT',$$

où X, Y, Z, T; X', Y', Z', T' désignent les coordonnées tétraédriques des deux points que l'homographie met en correspondance. Si l'on cherche les points qui, dans cette transformation, coïncident, chacun avec son homologue, il faudra faire

$$X' = \rho X, \qquad Y' = \rho Y, \qquad Z' = \rho Z, \qquad T' = \rho T,$$

ce qui donnera les équations

$$X(1-\rho) = 0, \qquad Y(1-\rho) = 0, \qquad Z(1-\rho) = 0,$$
$$T(1-d\rho) = \rho(aX + bY + cZ).$$

On ne peut envisager que deux solutions : ou bien l'on aura $\rho = 1$;

il suffira alors que X, Y, Z, T vérifient la condition

$$(8) \qquad aX + bY + cZ + (d-1)T = 0,$$

et tous les points situés dans le plan défini par cette équation coïncideront avec leurs homologues. Ou bien, ρ étant différent de 1, on aura

$$(9) \qquad X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad \rho = \frac{1}{d},$$

ce qui donnera le sommet du tétraèdre opposé à la face

$$T = 0.$$

La transformation est alors celle que Poncelet appelait une *homologie*.

Le plan représenté par l'équation (8) est appelé *plan d'homologie*. Aucun de ses points n'est déplacé dans la transformation.

Le point défini par les équations (9) s'appelle *centre d'homologie*. Lui aussi demeure invariable par la transformation.

Toute droite passant par le centre d'homologie se correspond à elle-même.

L'homologie est définie quand on donne le centre, le plan d'homologie et un couple de points correspondants.

Soient, en effet, O le centre d'homologie et (P) le plan d'homologie. Soit de plus A, A' un couple de points correspondants. Pour trouver l'homologue d'un point M quelconque, on remarquera que la droite AM a deux points dont on connaît les homologues, le point A et aussi celui où elle coupe le plan (P) et qui se correspond à lui-même. Son homologue pourra donc être construite sans difficulté, et le point M' homologue de M sera à la rencontre de cette droite et de OM.

Les triangles et les tétraèdres que nous avons considérés plus haut sont évidemment homologiques.

L'homologie devient une transformation involutive si $d = -1$; elle se réduit à une homothétie si le plan d'homologie est rejeté à l'infini.

47. Dans le plan, deux coniques quelconques peuvent, généralement, être regardées comme homologiques de douze manières différentes. Cela est aisé à démontrer.

En effet, si deux courbes sont homologiques, il ne peut se présenter que deux cas. Ou bien elles passent par le centre d'homologie et y ont la même tangente; ou bien les tangentes menées à l'une du centre d'homologie sont aussi tangentes à l'autre. Ces deux hypothèses, inconciliables dans les coniques, peuvent même se trouver réunies pour les courbes de degré supérieur. Écartons la première, qui se rapporte à une relation particulière; nous voyons qu'alors *le centre d'homologie ne peut être qu'un des six sommets du quadrilatère circonscrit aux deux coniques*. Choisissons l'un de ces sommets et prenons un triangle de référence dont deux côtés soient les tangentes communes à ces coniques passant par le sommet choisi. Les équations des deux coniques seront

$$(10) \qquad xy - P^2 = 0, \qquad xy - Q^2 = 0.$$

Donc l'homologie qui les transformera l'une dans l'autre devra comprendre les deux équations

$$x = x', \qquad y = y'.$$

La troisième de ces équations sera donc

$$P = \pm Q',$$

Q' étant ce que devient Q lorsqu'on y remplace x, y, z par x', y', z'. On voit que l'axe d'homologie aura pour équation

$$P = \pm Q.$$

Ce sera donc *une des deux cordes communes aux deux coniques qui passent par le point de concours des polaires du centre d'homologie relatives aux deux coniques*.

48. Dans l'espace, on peut considérer deux quadriques. Les raisonnements précédents montrent ici que les deux quadriques doivent être inscrites dans un même cône du second degré ayant pour sommet le centre d'homologie. Elles doivent donc se couper suivant deux courbes planes, et leurs plans tangents communs doivent envelopper deux cônes distincts. Les deux équations (10) peuvent être remplacées par les deux suivantes :

$$(11) \qquad \varphi(x, y, z) = P^2, \qquad \varphi(x, y, z) = Q^2,$$

et le reste du raisonnement s'applique sans difficulté.

La plus belle application qu'on ait faite de l'homologie se rapporte à la théorie des foyers. Si l'on rapporte une conique à son foyer, son équation en coordonnées homogènes rectangulaires est

$$x^2 + y^2 - (ax + by + cz)^2 = 0$$

et l'homologie définie par les formules

$$x = x', \qquad y = y', \qquad ax + by + cz = Rz'$$

la transforme en un cercle de rayon R.

On pourra lire dans le *Traité des propriétés projectives des figures*, l'Ouvrage célèbre de Poncelet paru en 1822, le parti que l'illustre géomètre tire de cette méthode de transformation, qu'il obtient dans le plan en faisant la perspective de la transformation homothétique. C'est dans un Mémoire présenté en 1830 à l'Académie Royale de Bruxelles et imprimé seulement en 1837, dans l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, que Chasles a fait connaître pour la première fois les propriétés générales des figures homographiques. Voir le Mémoire qui forme la seconde partie de l'*Aperçu historique* et qui est intitulé : *Mémoire sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie.* Nous allons bientôt étudier le principe de dualité; mais auparavant nous examinerons certains cas particuliers de la transformation homographique.

49. Poncelet se plaisait à remarquer que, si l'on a dans le plan deux figures homographiques, on peut toujours déplacer l'une d'elles par rapport à l'autre de manière à les rendre homologiques. Cette proposition n'est pas absolument générale; elle est en défaut dans le cas où la droite de l'infini se correspond à elle-même dans les deux figures. L'examen de cette hypothèse particulière va d'abord nous occuper.

Les formules qui définissent la transformation homographique sont alors

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1, \\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z &= z_1, \end{aligned} \right.$$

le déterminant $ab' - ba'$ étant différent de zéro puisque les fonctions

x, y, z doivent être indépendantes. Sans changer la figure (F) lieu du point (x, y, z), on peut imprimer à la figure (F_1) une translation qui fera disparaître c et c' et réduira les formules aux suivantes :

$$x = ax_1 + by_1, \qquad y = a'x_1 + b'y_1, \qquad z = z_1. \tag{13}$$

Imprimons maintenant à la figure (F_1) une rotation autour de l'origine, c'est-à-dire effectuons sur x_1, y_1 la substitution

$$x_1 \mid x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \qquad y_1 \mid x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha.$$

Imprimons une rotation pareille à (F), c'est-à-dire effectuons sur x, y la substitution

$$x \mid x \cos\beta - y \sin\beta, \qquad y \mid x \sin\beta + y \cos\beta.$$

L'emploi simultané de ces deux substitutions nous donnera

$$\begin{aligned} x\cos\beta - y\sin\beta &= a\,(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) + b\,(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha),\\ x\sin\beta + y\cos\beta &= a'(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) + b'(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha). \end{aligned}$$

Disposons de α et de β de manière que ces deux relations se réduisent à la forme très simple

$$x = Ax_1, \qquad y = By_1. \tag{14}$$

Il faudra, pour cela, qu'on ait

$$\left\{\begin{aligned} A\cos\beta &= a\cos\alpha + b\sin\alpha, & A\sin\beta &= a'\cos\alpha + b'\sin\alpha,\\ -B\sin\beta &= -a\sin\alpha + b\cos\alpha, & B\cos\beta &= -a'\sin\alpha + b'\cos\alpha. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Ces équations vont nous donner des valeurs réelles pour A, B, α, β. On peut d'ailleurs les résoudre d'une manière élégante. Si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} a + b' &= r\cos\gamma, & b - a' &= r\sin\gamma,\\ a - b' &= r'\cos\gamma', & b + a' &= r'\sin\gamma', \end{aligned}\right. \tag{16}$$

on aura

$$\begin{aligned} (A + B)\cos\beta &= r\cos(\alpha - \gamma), & (A - B)\cos\beta &= r'\cos(\gamma' - \alpha),\\ (A + B)\sin\beta &= r\sin(\alpha - \gamma), & (A - B)\sin\beta &= r'\sin(\gamma' - \alpha), \end{aligned}$$

ce qui permet de prendre

$$A = \frac{r + r'}{2}, \qquad B = \frac{r - r'}{2}, \qquad \alpha = \frac{\gamma + \gamma'}{2}, \qquad \beta = \frac{\gamma' - \gamma}{2}. \tag{17}$$

On trouvera aisément la relation

$$AB = ab' - ba', \tag{18}$$

dont nous aurons à faire usage plus tard.

En résumé, par un déplacement relatif des deux figures (F), (F_1) et par un choix convenable des axes, on peut ramener les formules qui définissent la transformation homographique à la forme simple

$$x = Ax_1, \qquad y = By_1, \qquad z = z_1. \tag{19}$$

Cette forme ne correspond à une homologie que si A est égal à B, auquel cas les deux figures (F), (F_1) sont homothétiques, et l'axe d'homologie est à l'infini.

50. Passons maintenant au cas le plus général, celui pour lequel la droite de l'infini ne se correspond pas à elle-même quand on passe de (F) à (F_1). Soit d_1 la droite de (F_1) qui correspond à la droite de l'infini de (F). Elle va couper cette droite de l'infini en un point A_1 qui, considéré comme appartenant à (F_1), a pour homologue un autre point A de la droite de l'infini. A toutes les droites de (F) passant par A correspondent toutes les droites de (F_1) passant par A_1. Nous avons donc un faisceau de droites parallèles dans (F), et un seul, auquel correspond un faisceau de droites parallèles dans (F_1). En changeant l'orientation de l'une des figures par rapport à l'autre, on peut faire en sorte (et cela de deux manières différentes) que les deux faisceaux soient composés de droites parallèles les unes aux autres.

Choisissons des axes rectangulaires tels que l'axe des y soit parallèle à ces droites. Alors les formules qui définissent l'homographie seront de la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= ax_1 + b\,y_1 + c\,z_1, \\ y &= \qquad\; b'y_1 + c'z_1, \\ z &= \qquad\; b''y_1 + c''z_1, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

a et b'' étant essentiellement différents de zéro. Si l'on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes dans les deux figures, c'est-à-dire si l'on effectue les substitutions

$$x \mid x + \alpha z, \qquad y \mid y + \beta z, \qquad x_1 \mid x_1 + \alpha_1 z_1, \qquad y_1 \mid y_1 + \beta_1 z_1,$$

on verra facilement qu'en prenant

$$b - \alpha b'' = 0, \quad b' - \beta b'' = a, \quad a\alpha_1 + c - \alpha c'' = 0, \quad a\beta_1 + c' - \beta c'' = 0,$$

les formules (20) se réduisent aux suivantes :

$$(21) \qquad x = ax_1, \quad y = ay_1, \quad z = b''y_1 + (c'' + b''\beta_1)z_1,$$

qui définissent une homologie.

Il y a même une seconde manière d'obtenir une homologie. Si l'on fait subir à la figure (F_1) une rotation de 180° autour de l'origine, ce qui se fait en changeant simplement le signe de z_1, les formules (21) deviennent

$$(22) \qquad x = ax_1. \quad y = ay_1, \quad z = b''y_1 - (c'' + b''\beta_1)z_1$$

et caractérisent une nouvelle homologie dans laquelle le centre d'homologie est resté le même, mais l'axe d'homologie a été remplacé par un axe parallèle.

Ainsi, *toute transformation homographique dans laquelle la droite de l'infini ne se correspond pas à elle-même peut être ramenée de deux manières différentes à un déplacement, suivi ou précédé d'une homologie.*

Notons cette conséquence des calculs précédents. Dans toute homographie plane, ne conservant pas la droite de l'infini, il y a deux droites seulement auxquelles correspondent des droites telles que les points homologues tracent sur les deux droites correspondantes des divisions égales. Ces deux droites sont parallèles.

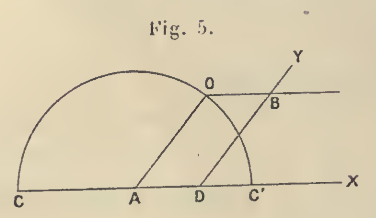
Ce sont elles qui deviennent les axes des deux homologies précédentes.

51. *Quand deux figures planes* (F), (F_1) *sont homologiques, il suffit de faire tourner le plan de l'une autour de l'axe d'homologie, et d'un angle arbitraire, pour qu'elles deviennent la perspective l'une de l'autre.*

Soient, en effet, A, A_1; B, B_1; M, M_1 trois couples de points correspondants dans les deux figures. AB et A_1B_1, AM et A_1M_1, BM et B_1M_1 viennent couper l'axe d'homologie aux trois mêmes points. Cette propriété ne cessera pas d'avoir lieu quand on fera tourner (F_1). Par suite, AA_1 et BB_1, AA_1 et MM_1, BB_1 et MM_1 seront concourantes deux à deux. Il faudra donc qu'elles concou-

rent en un point unique; et, par conséquent, que MM_1 aille passer par un point fixe. Il est donc établi que les deux figures sont devenues la perspective l'une de l'autre. Il est aisé de déterminer les différentes positions du point de vue. Construisons (*fig.* 5) le plan

Fig. 5.



qui passe par le centre d'homologie et est perpendiculaire à l'axe d'homologie; il coupera la figure (F) suivant une droite fixe AX et la figure (F_1) suivant une droite qui tournera autour du point D où AX rencontre l'axe d'homologie. Les droites qui joignent les points correspondants sur DX et DY iront passer par le point de vue. Si donc on mène par ce point de vue des parallèles OA, OB à DY, DX, les points A et B seront fixes; car A est le point qui correspond à l'infini sur DY et B le point qui correspond à l'infini sur DX. Le point de vue décrira donc un cercle de centre A et de rayon égal à DB.

Après une rotation de 180°, la figure (F_1) revient dans le plan de (F) et l'on obtient la seconde position dans laquelle les deux figures sont homologiques; C et C′ sont les deux centres d'homologie.

Si le centre d'homologie se trouve sur l'axe d'homologie, et c'est une hypothèse qui ne saurait être exclue, la proposition précédente n'a plus d'application. Le lecteur reconnaîtra aisément que, dans ce cas, les deux figures (F), (F_1) peuvent être regardées comme la perspective de deux autres figures qui se déduisent l'une de l'autre par une translation.

52. Puisque deux coniques peuvent toujours être regardées comme homologiques, on voit qu'on peut toujours les placer, et cela d'une infinite de manières, de telle sorte que l'une soit la perspective de l'autre. A ce sujet, on doit à Poncelet un théorème général dont voici l'énoncé : *Deux coniques étant données dans un plan, on peut toujours en faire la perspective de telle*

manière qu'elles se transforment en deux cercles. Voici comment on établit cette belle proposition, avec les restrictions qu'elle comporte et dont Poncelet ne tenait nul compte en invoquant son principe de continuité.

Tous les cercles, dans un plan, peuvent être considérés comme ayant en commun deux points à l'infini, définis en coordonnées rectangulaires par les équations

$$x^2+y^2=0, \qquad z=0.$$

Il faut donc faire la perspective de manière que deux points communs A et B aux deux coniques considérées soient rejetés à l'infini et deviennent les points précédents. Pour cela, il suffira de prendre le point de vue O sur le cercle d'intersection des deux sphères de rayon nul ayant pour centres A et B, et de projeter ensuite sur un plan parallèle à OAB.

Comme on peut combiner les quatre points d'intersection de six manières différentes, il y aura six cercles sur lesquels on pourra placer le point de vue. Aucun de ces cercles ne sera réel si les quatre points d'intersection des coniques le sont. Mais dans tous les autres cas, où deux au moins des points d'intersection sont imaginaires, on n'aura qu'à associer ceux de ces points qui sont imaginaires conjugués pour obtenir un cercle réel. Si donc les coniques n'ont aucun point commun réel, on pourra placer le point de vue sur deux cercles réels. Si les coniques n'ont que deux points communs, réels, le point de vue ne pourra être placé que sur un seul cercle.

Remarquons que l'opération précédente est de celles que l'on ne saurait effectuer, en général, avec la règle et le compas; car elle exige la résolution de l'équation du troisième degré dont dépend la détermination des points d'intersection.

CHAPITRE V.

L'HOMOLOGIE BIAXIALE.

L'homologie biaxiale de Sylvester. — Comment on la définit. — Elle dépend de neuf constantes et Sylvester paraissait croire que, par un déplacement relatif de deux figures en relation homographique la plus générale, on peut les amener à être les transformées l'une de l'autre dans une homologie biaxiale. — Étude de cette question. — Par le déplacement relatif de deux figures homographiques on peut ramener les formules qui définissent l'homographie à une forme particulièrement simple qui ne dépend plus que de trois constantes. — Dans le cas où l'homographie est une homologie biaxiale, ces trois constantes doivent satisfaire à une relation; de sorte que l'homographie ne peut s'obtenir, en général, par la combinaison d'une homologie biaxiale et d'un déplacement. — Cela peut se faire au contraire, et d'une infinité de manières, si la relation entre les constantes est vérifiée.

Étude du cas particulier de deux quadriques. Elles ne peuvent se déduire l'une de l'autre par une homologie biaxiale que si elles satisfont à une condition.

Le Chapitre se termine par l'étude des homographies qui conservent le plan de l'infini. — Celles qui conservent en outre le cercle de l'infini se réduisent à une homothétie, dont le centre peut être choisi arbitrairement, précédée ou suivie d'un déplacement. — Celles qui, sans conserver le cercle de l'infini, conservent le plan de l'infini, peuvent être amenées par un déplacement relatif des deux figures à une forme particulièrement simple.

---

53. Si, dans le cas général, et comme le croyait Poncelet, l'homographie des figures planes se ramène à l'homologie, il n'en est plus de même lorsqu'on passe du plan à l'espace. Et il est aisé de s'en rendre compte. Une transformation homologique est définie, nous le savons, si l'on se donne le centre, le plan d'homologie et un couple de points correspondants. Cela représente sept constantes qui, ajoutées aux six autres constantes introduites par le déplacement relatif des deux figures, donnent en tout treize constantes. Or, l'homographie la plus générale dépend de quinze constantes arbitraires.

Pour retrouver dans l'espace une proposition analogue à celle que nous avons établie pour le plan, *Sylvester* avait eu l'idée,

en 1885, de considérer dans l'espace une homographie plus étendue que l'homologie ([1]). On la définit comme il suit.

54. Soient D et Δ deux droites quelconques ne se coupant pas. Elles pourront être considérées comme les arêtes opposées d'une infinité de tétraèdres et représentées par les équations

$$X = 0, \quad Y = 0 \qquad \text{pour D,}$$
$$Z = 0, \quad T = 0 \qquad \text{pour } \Delta,$$

si l'on prend des coordonnées tétraédriques se rapportant à l'un quelconque de ces tétraèdres. Cela posé, les formules

$$X = aX_1, \qquad Y = aY_1, \qquad Z = bZ_1, \qquad T = bT_1$$

représentent l'homographie que nous avons en vue. On peut la caractériser en disant que tous les points des deux droites D, Δ se correspondent à eux-mêmes, ou encore que les plans qui passent par l'une des deux droites ne sont pas altérés par la transformation, ainsi que toutes les droites qui rencontrent à la fois D et Δ.

Cette transformation est définie dès qu'on donne les deux droites D, Δ et le rapport $\frac{a}{b}$. Nous l'appellerons *homologie biaxiale;* elle comprend évidemment l'homologie plane comme cas particulier. Elle se réduit même à cette homologie si l'on considère seulement les points situés dans un des plans passant par D ou par Δ.

Une homologie biaxiale est entièrement déterminée lorsqu'on donne ses deux axes D, Δ et un couple de points correspondants, *nécessairement situés sur une droite qui rencontre à la fois* D *et* Δ.

En effet, soient a, a' ces deux points. Pour avoir l'homologue m' d'un point quelconque m, on construira la droite d qui passe en m et rencontre à la fois D et Δ. La droite am, les axes D, Δ déterminent un hyperboloïde (H) qui doit se conserver dans la transformation; car il peut être engendré par des droites qui rencontrent à la fois D et Δ. L'homologie transformera donc les génératrices

[1] Voir les deux Notes : *Sur l'homographie de deux corps solides* et *Sur l'homographie de deux corps solides infiniment étendus*, insérées aux pages 35 et 139 des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. 101, 2e semestre 1885.

rectilignes de même système que D, Δ, les unes dans les autres, et par conséquent elle fera correspondre à la droite *am* la génératrice du même système qui passe par a'. Cette génératrice coupera la droite d au point m' cherché.

On voit que des constructions purement linéaires définiront complètement cette espèce particulière d'homographie.

Elle dépend de neuf constantes : huit, qui déterminent les deux droites, et une, qui fait connaître un couple de points correspondants. Il semblait donc qu'en ajoutant les six constantes propres à définir le déplacement de l'une des figures par rapport à l'autre, on devait introduire les quinze constantes dont dépend l'homographie la plus générale et, par suite, obtenir toute homographie en combinant l'homologie biaxiale avec un déplacement de l'une des figures par rapport à l'autre. Sylvester l'a cru un moment. En tout cas, il a laissé la question en suspens. Nous allons l'examiner ici d'une manière complète.

55. Considérons deux figures homographiques (F) et (F_1). On peut évidemment déplacer la seconde de telle manière que le plan (P_1) qui, dans (F_1), correspond au plan à l'infini de (F), soit parallèle au plan (P) qui, dans (F), est l'homologue du plan à l'infini de (F_1). Cette relation n'étant pas troublée par la translation, on peut ajouter la condition que le point O′ qui, dans la seconde figure, correspond au point de la première qui se trouve à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan (P), coïncide avec le point O qui, dans la première figure, correspond à ce même point considéré comme appartenant à la seconde.

Alors, si l'on a choisi des axes rectangulaires en prenant pour origine le point O et pour axe des z la perpendiculaire au plan (P), les formules générales

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d\,t_1,\\ y &= a'\,x_1 + b'\,y_1 + c'\,z_1 + d'\,t_1,\\ z &= a''\,x_1 + b''\,y_1 + c''\,z_1 + d''\,t_1,\\ t &= a'''x_1 + b'''y_1 + c'''z_1 + d'''t_1 \end{aligned}\right.$$

se simplifieront beaucoup; les conditions relatives au parallélisme des plans (P), (P_1) nous donneront

$$a'' = b'' = a''' = b''' = 0;$$

les deux autres, relatives aux points O, O', nous donneront

$$c = c' = c'' = d = d' = d''' = 0,$$

et les formules prendront la forme simple

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a\,x_1 + b\,y_1, \\ y = a'x_1 + b'y_1, \\ z = C t_1, \\ t = D z_1. \end{cases}$$

Nous avons vu plus haut (n° 49) que, par des opérations qui équivalent ici à des rotations autour de Ox, on peut ramener les deux premières équations à la forme

$$(3) \qquad x = A x_1, \qquad y = B y_1,$$

le produit AB ayant pour valeur

$$(4) \qquad AB = ab' - ba'.$$

On voit donc qu'en déplaçant la figure (F_1) par rapport à (F) et en choisissant des axes rectangulaires convenables, on peut ramener les formules qui définissent l'homographie à la forme très simple

$$(5) \qquad x = A x_1, \qquad y = B y_1, \qquad z = C t_1, \qquad t = D z_1.$$

Des seize constantes qui figurent dans les formules générales (1), on a éliminé les douze qui correspondent à la position particulière des deux figures.

56. Appliquons ces résultats, qui sont dus à *Richelot*, à deux figures en homologie biaxiale. Comme, dans cette transformation, les plans parallèles aux deux axes de l'homologie ont pour homologues des plans parallèles; comme d'autre part la perpendiculaire commune aux deux axes de l'homologie se correspond à elle-même, on voit qu'en prenant cette perpendiculaire pour axe des z, les formules qui définissent cette transformation seront nécessairement de la forme

$$(6) \qquad \begin{cases} h\,x + k\,y = \rho\,(h\,x_1 + k\,y_1), & z - \gamma\,t = \rho\,(z_1 - \gamma\,t_1), \\ h'x + k'y_1 = \rho'(h'x_1 + k'y_1), & z - \gamma'\,t = \rho'(z_1 - \gamma' t_1), \end{cases}$$

et, pour obtenir les formules (5), on ne pourra plus imprimer à la

figure (F_1) qu'un déplacement dans lequel l'axe des z ne cessera pas de coïncider avec lui-même, c'est-à-dire un déplacement hélicoïdal d'axe Oz ou une symétrie par rapport à une droite rencontrant cet axe à angle droit. Les formules qui caractérisent un tel déplacement sont les suivantes :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
x_1 &= x_1' \cos\alpha - y_1' \sin\alpha,\\
\varepsilon y_1 &= x_1' \sin\alpha + y_1' \cos\alpha,\\
\varepsilon z_1 &= z_1' \qquad + \delta t_1',\\
t_1 &= t_1',
\end{aligned}
\right.
$$

α, δ désignant deux constantes et ε l'unité, positive ou négative. En substituant les valeurs de x_1, y_1, z_1, t_1 dans les formules (5) et exprimant ensuite qu'elles se réduisent aux relations (3), où l'on aurait remplacé x_1, ... par x_1', ..., on obtient les conditions suivantes :

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
h\,A &= \rho\,(h\cos\alpha + k\,\varepsilon\sin\alpha), &\qquad k\,B &= \rho\,(-h\sin\alpha + k\,\varepsilon\cos\alpha),\\
h'A &= \rho'(h'\cos\alpha + k'\varepsilon\sin\alpha), &\qquad k'B &= \rho'(-h'\sin\alpha + k'\varepsilon\cos\alpha),\\
C &= \rho\,(\varepsilon\delta - \gamma\,), &\qquad -D\gamma &= \rho\,\varepsilon,\\
C &= \rho'(\varepsilon\delta - \gamma'), &\qquad -D\gamma' &= \rho'\varepsilon.
\end{aligned}
\right.
$$

L'élimination de $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$, γ, γ' entre ces équations nous montre que ρ et ρ' devront être les racines de chacune des deux équations du second degré

$$(9)\qquad \rho^2 - \rho\,(A + \varepsilon B)\cos\alpha + \varepsilon AB = 0,$$

$$(10)\qquad \rho^2 + D\delta\rho \qquad\qquad - \varepsilon CD = 0.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que l'on ait

$$(11)\qquad AB = -CD.$$

Cette condition n'est pas remplie en général. Donc l'homologie biaxiale ne saurait conduire, même par un déplacement relatif des deux figures qui se correspondent, à l'homographie la plus générale. Mais, comme la relation précédente peut toujours être vérifiée quand on multiplie les constantes A, B, C par un même nombre, on voit que l'homologie biaxiale, si elle ne fournit pas toutes les figures homographiques à une figure donnée (F_1), pourrait fournir, du moins, une figure semblable à (F_1).

Dans le cas où l'homographie considérée vérifie la condition que nous avons reconnue nécessaire (11), les calculs précédents conduisent à cette conclusion qu'il y a une infinité d'homologies biaxiales donnant la solution du problème proposé. On choisira α arbitrairement, ρ et ρ' seront les deux racines de l'équation (9), puis les autres inconnues seront déterminées par les formules

$$(12)\quad \begin{cases} h = \rho\varepsilon \sin\alpha, & h' = \rho'\varepsilon \sin\alpha, \\ k = \mathrm{A} - \rho\cos\alpha, & k' = \mathrm{A} - \rho'\cos\alpha, \qquad \mathrm{D}\delta = -(\rho+\rho'), \\ \gamma = -\dfrac{\rho\varepsilon}{\mathrm{D}}, & \gamma' = -\dfrac{\rho'\varepsilon}{\mathrm{D}}, \end{cases}$$

de sorte que les deux axes de l'homologie biaxiale seront définis par les équations

$$(13)\quad \begin{cases} \varepsilon\rho x \sin\alpha + (\mathrm{A} - \rho\cos\alpha) y = 0, \\ \mathrm{D}z + \rho\varepsilon t = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon\rho' x \sin\alpha + (\mathrm{A} - \rho'\cos\alpha) y = 0, \\ \mathrm{D}z + \rho'\varepsilon t = 0, \end{cases}$$

ρ et ρ' étant les racines de l'équation (9).

La surface engendrée par ces axes est le conoïde ayant pour équation

$$(14)\qquad (\mathrm{A}^2 y^2 + \mathrm{B}^2 x^2)\, t^2 = \mathrm{D}^2 z^2 (x^2 + y^2).$$

Les relations entre deux axes conjugués sont données par les formules

$$(15)\qquad zz' = -\varepsilon \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} tt', \qquad \mathrm{A}yy' - \mathrm{B}\varepsilon xx' = 0,$$

auxquelles on peut joindre la relation

$$\frac{z(x^2+y^2)}{txy} = \frac{z'(x'^2+y'^2)}{t'x'y'}$$

indépendante de A et de B.

57. Une propriété très simple de l'homologie biaxiale aurait pu nous permettre de prévoir quelques-uns des résultats précédents. Soient D, Δ les deux axes d'une telle homologie et E une droite quelconque de l'espace. La quadrique déterminée par ces trois droites jouit évidemment de la propriété que toutes celles de ses génératrices rectilignes qui s'appuient sur D, Δ et E se correspondent à elles-mêmes. Réciproquement, s'il existe une quadrique

telle qu'une homographie ne déplace pas les génératrices rectilignes d'un système déterminé de cette surface, l'homographie se réduit à une homologie biaxiale dont, à la vérité, les deux axes peuvent être imaginaires ou confondus. En effet, puisque cette homographie ne déplace pas les génératrices de l'un des systèmes, que nous appellerons le *premier*, elle doit échanger entre elles les génératrices du second système et, pour définir les lois de cet échange, il suffit de considérer le point m où ces génératrices vont couper une génératrice déterminée d du premier système; car ce point m est soumis à une homographie qui le déplace sur la droite d. Il y aura donc deux génératrices D, Δ du second système dont aucun point ne sera déplacé par la transformation, et l'homographie sera une homologie biaxiale d'axes D, Δ.

D'après cela, considérons une homologie biaxiale d'axes D, Δ et construisons l'un quelconque des paraboloïdes hyperboliques qui contiennent D, Δ et leur perpendiculaire commune P. Par le sommet de ce paraboloïde situé sur P passe une seconde génératrice P′ qui est, comme P, un axe de symétrie de la surface, et les génératrices qui rencontrent D, Δ rencontrent aussi P′ et lui sont perpendiculaires. Par suite, ces génératrices, qui sont à elles-mêmes leurs propres homologues dans l'homologie considérée, ne cessent pas de coïncider avec elles-mêmes si l'on imprime au paraboloïde une rotation de 180° autour de P′. Si l'on combine l'homologie biaxiale primitive avec cette rotation, on aura comme résultat une nouvelle transformation homographique dans laquelle les génératrices d'un système du paraboloïde ne cesseront pas de coïncider avec elles-mêmes et qui sera, par conséquent, une nouvelle homologie biaxiale.

Les droites P′ dépendent d'un paramètre variable et engendrent un conoïde droit du troisième degré contenant D, Δ et ayant pour axe P. Puisqu'on peut imprimer à la figure (F) un déplacement qui dépend d'un paramètre variable sans qu'elle cesse d'être en relation homologique avec (F_1), il est clair que l'homologie biaxiale combinée avec des déplacements peut donner naissance à une transformation contenant au plus quatorze constantes, soit une de moins que n'en comporte l'homographie la plus générale.

Nous avons ainsi une explication des résultats précédents, mais nous avons aussi une construction géométrique très simple des

deux séries d'homologies biaxiales, qui peuvent remplacer une homologie biaxiale donnée. Soient D, Δ les axes de cette homologie et P leur perpendiculaire commune. Les paraboloïdes qui passent par ces trois droites nous donneront les moyens d'obtenir toute une série d'homologies donnant des figures égales à celles que donne la première. En appliquant à une de ces homologies la même construction qu'à la première, on aura une seconde série d'homologies dont l'homologie initiale fera partie. Les deux séries d'homologies ainsi obtenues sont celles que nous avons déterminées par nos calculs.

58. Pour terminer ce sujet nous montrerons, de même, que deux quadriques ne peuvent être mises en correspondance et déduites l'une de l'autre par une homologie biaxiale si elles ne satisfont pas à une certaine relation.

Soient (Q) et (Q_1) les deux quadriques que nous envisageons. Les deux axes de l'homologie biaxiale qui les transformera l'une dans l'autre, si cela est possible, doivent évidemment rencontrer les quadriques aux quatre mêmes points. Rapportons les surfaces au tétraèdre dont ces quatre points sont les sommets. Les deux axes de l'homologie seront représentés, par exemple, par les équations

$$x = 0, \qquad y = 0$$

et

$$z = 0, \qquad t = 0.$$

Quant aux quadriques, elles seront définies par des équations telles que les suivantes :

$$(16)\qquad \begin{cases} Byz + B'xz + B''xy + Cxt + C'yt + C''zt = 0, \\ B_1yz + B'_1xz + B''_1xy + C_1xt + C'_1yt + C''_1zt = 0. \end{cases}$$

Les formules qui définissent l'homologie biaxiale sont évidemment de la forme suivante :

$$(17)\qquad x = ax_1, \qquad y = ay_1, \qquad z = bz_1, \qquad t = bt_1.$$

Par conséquent, la quadrique (Q_1) sera dérivée de (Q) par l'équation

$$(18)\qquad (Byz + B'xz + Cxt + C'yt)ab + B''a^2xy + C''b^2zt = 0,$$

qui devra être identique à la seconde des équations (16). Si l'on multiplie par ab l'équation de la quadrique (Q) et qu'on retranche de la précédente, on obtiendra, en supprimant le facteur $a-b$, l'équation

$$B''axy - C''bzt = 0 \tag{19}$$

d'une quadrique (Q') qui passera par l'intersection de (Q) et de (Q_1). Cette quadrique, contenant les côtés du quadrilatère gauche défini par les équations

$$xy = 0, \qquad zt = 0,$$

donne lieu au théorème suivant : *Les deux axes de l'homologie biaxiale cherchée doivent être les diagonales d'un quadrilatère gauche inscrit dans la courbe d'intersection de* (Q) *et de* (Q_1) *et situé tout entier sur une quadrique contenant cette courbe d'intersection.*

Nous ne suivrons pas l'indication donnée par ce théorème ; mais nous allons montrer que les deux axes de l'homologie cherchée rencontrent deux arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun.

A cet effet, et pour obtenir ce tétraèdre conjugué commun, nous ajouterons à l'équation de la quadrique (Q_1), prise sous la forme (18), celle de la quadrique (Q) multipliée par $-\lambda$, ce qui donnera

$$(Byz + B'xz + Cxt + C'yt)(\lambda - ab) + B''(\lambda - a^2)xy + C''(\lambda - b^2)zt = 0,$$

et il ne restera plus qu'à exprimer que l'équation précédente représente un cône. En égalant à zéro les quatre dérivées par rapport à x, y, z, t nous obtiendrons le système

$$\left\{\begin{aligned} &(B'z + Ct)(\lambda - ab) + B''(\lambda - a^2)y = 0,\\ &(Bz + C't)(\lambda - ab) + B''(\lambda - a^2)x = 0,\\ &(B'x + By)(\lambda - ab) + C''(\lambda - b^2)t = 0,\\ &(Cx + C'y)(\lambda - ab) + C''(\lambda - b^2)z = 0. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

L'élimination de λ nous conduirait aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &(B'z + Ct)x - (Bz + C't)y = 0,\\ &(B'x + By)z - (Cx + C'y)t = 0, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

d'où l'on déduit immédiatement deux équations du second degré en $\frac{z}{t}$ et en $\frac{x}{y}$. En interprétant ce résultat, nous obtenons la pro-

position suivante : les quatre sommets du tétraèdre conjugué commun à (Q) et à (Q_1) sont sur deux droites rencontrant les deux axes de l'homologie cherchée. En d'autres termes, *les deux axes de l'homologie cherchée doivent rencontrer deux arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun à* (Q) *et à* (Q_1).

Ce n'est pas tout. On peut aisément éliminer, dans les équations (20), x, y, z, t et former l'équation en λ, qui se présente immédiatement sous la forme

$$4\,\mathrm{BCB'C'}(\lambda - ab)^4 - [\mathrm{B''C''}(\lambda - a^2)(\lambda - b^2) - (\lambda - ab)^2(\mathrm{BC} + \mathrm{B'C'})]^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux équations du second degré, qui sont

$$\mathrm{B''C''}(\lambda - a^2)(\lambda - b^2) - (\lambda - ab)^2(\sqrt{\mathrm{BC}} \pm \sqrt{\mathrm{B'C'}})^2 = 0.$$

Pour chacune d'entre elles, le produit des racines est égal à a^2b^2. Cette remarque nous donne la solution : Les deux quadriques (Q), (Q_1) ne pourront se déduire l'une de l'autre par une homologie biaxiale que si l'équation en λ dont dépend la détermination du tétraèdre conjugué commun est telle que le produit de deux de ses racines soit égal au produit des deux autres, ce qui n'a pas lieu en général.

Comme ces racines sont des invariants, il faudra donc que les équations des deux quadriques puissent être ramenées à la forme

$$(22)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ \mathrm{A}^2x^2 + \mathrm{B}^2y^2 + \mathrm{C}^2z^2 + \mathrm{D}^2t^2 = 0, \end{cases}$$

où l'on aura, par exemple,

$$(23)\qquad \mathrm{AB} = \mathrm{CD}.$$

Cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante et même, quand elle est remplie, les deux quadriques peuvent se déduire l'une de l'autre par une infinité d'homologies biaxiales.

Pour le montrer, nous remarquerons qu'on peut déduire la seconde quadrique de la première à l'aide de la substitution définie par les formules

$$(24)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{A}x_1 \cos\alpha - \mathrm{B}y_1 \sin\alpha, \\ y = \mathrm{A}x_1 \sin\alpha + \mathrm{B}y_1 \cos\alpha, \end{cases}$$

$$(25)\qquad \begin{cases} z = \mathrm{C}z_1 \cos\beta - \mathrm{D}t_1 \sin\beta, \\ t = \mathrm{C}z_1 \sin\beta + \mathrm{D}t_1 \cos\beta, \end{cases}$$

où α et β désignent deux arbitraires. La première de ces substitutions peut être mise sous la forme canonique

$$(26)\qquad \begin{cases} h\,x + k\,y = \rho\,(h\,x_1 + k\,y_1), \\ h'x + k'y = \rho'(h'x_1 + k'y_1). \end{cases}$$

Il suffit pour cela de prendre

$$h = -\text{A}\sin\alpha,\qquad h' = -\text{A}\sin\alpha,$$
$$k = \text{A}\cos\alpha - \rho,\qquad k' = \text{A}\cos\alpha - \rho',$$

ρ et ρ' étant les racines de l'équation

$$(27)\qquad \rho^2 - (\text{A} + \text{B})\cos\alpha.\rho + \text{AB} = 0.$$

De même, les formules (25) peuvent être ramenées à la forme

$$(28)\qquad \begin{cases} lz + mt = \rho\,(lz_1 + mt_1), \\ l'z + m't = \rho'(l'z_1 + m't_1), \end{cases}$$

l, m, l', m' ayant les valeurs suivantes :

$$(29)\qquad \begin{cases} l = -\text{C}\sin\beta, & l' = -\text{C}\sin\beta, \\ m = \text{C}\cos\beta - \rho, & m' = \text{C}\cos\beta - \rho', \end{cases}$$

et ρ, ρ' étant les racines de l'équation

$$(30)\qquad \rho^2 - (\text{C} + \text{D})\cos\beta + \text{CD} = 0.$$

En vertu de la relation (23), il suffit que les arbitraires α, β satisfassent à la condition

$$(\text{A} + \text{B})\cos\alpha = (\text{C} + \text{D})\cos\beta$$

pour que les deux équations (27) et (30) en ρ aient les mêmes racines. Et alors les deux systèmes (26) et (28) définiront une homologie biaxiale dont les axes seront déterminés par les équations

$$(31)\qquad \begin{cases} hx + ky = 0, \\ lz + mt = 0, \end{cases}$$

$$(32)\qquad \begin{cases} h'x + k'y = 0, \\ l'z + m't = 0. \end{cases}$$

Ces axes engendreront une surface du quatrième ordre, qui aura pour équation

$$(x^2 + y^2)(\text{C}^2 z^2 + \text{D}^2 t^2) = (z^2 + t^2)(\text{A}^2 x^2 + \text{B}^2 y^2)$$

et passera par l'intersection des deux quadriques (Q), (Q'). L'homologie sera involutive si l'on a

$$(A + B) \cos\alpha = (C + D) \cos\beta = 0.$$

59. Les discussions précédentes ont laissé entièrement de côté les homographies qui conservent le plan de l'infini. Il ne sera pas inutile d'en donner aussi la forme réduite et quelques propriétés.

Nous commencerons par chercher celles qui conservent non seulement le plan de l'infini, mais le cercle commun à toutes les sphères et défini par les équations

$$(33) \qquad t = 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Soient

$$(34) \qquad \begin{cases} x = a x_1 + b y_1 + c z_1 + h t_1, \\ y = a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 + h' t_1, \\ z = a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 + h'' t_1, \\ t = t_1 \end{cases}$$

les formules qui définissent l'homographie cherchée. Puisqu'elle conserve le plan et le cercle de l'infini, elle doit faire correspondre une sphère à une sphère. A deux plans tangents parallèles de la première sphère doivent correspondre deux plans tangents parallèles de la seconde; et, par conséquent, à tout diamètre de la première sphère correspondra un diamètre de la seconde. Prenons, dans la première sphère, trois diamètres rectangulaires. Comme ils sont caractérisés par cette propriété que le plan tangent au point où l'un quelconque d'entre eux coupe la sphère est parallèle au plan des deux autres, et comme cette propriété est conservée par notre homographie, il correspondra à ces trois diamètres trois diamètres rectangulaires de la seconde sphère. D'ailleurs, il est évident que, tous les diamètres se correspondant, les centres seront des points homologues dans les deux sphères.

D'après cela, je prends dans la première sphère de centre O trois rayons rectangulaires OA, OB, OC. Il leur correspondra trois rayons rectangulaires O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 dans la seconde sphère. Les coordonnées des trois points A, B, C par rapport au trièdre OABC seront

$$(35) \qquad R, \ 0, \ 0; \qquad 0, \ R, \ 0; \qquad 0, \ 0, \ R.$$

De même, les coordonnées des trois points A_1, B_1, C_1 par rapport au trièdre $OA_1B_1C_1$ seront

$$(36) \qquad R_1, \quad 0, \quad 0; \qquad 0, \quad R_1, \quad 0; \qquad 0, \quad 0, \quad R_1.$$

Si les deux trièdres OABC, $O_1A_1B_1C_1$ ont la même disposition, on peut les amener à coïncider par un simple déplacement. Si cette condition n'est pas remplie, on substituera au trièdre $O_1A_1B_1C_1$ le trièdre symétrique $O_1A'_1B'_1C'_1$ et les points A_1, B_1, C_1 auront toujours leurs coordonnées exprimées par les formules, pourvu qu'on donne à R_1 un signe négatif.

Dans l'un et dans l'autre cas, amenons à coïncider les deux trièdres qui ont la même disposition. L'homographie que nous étudions aura maintenu sa propriété caractéristique de conserver le cercle de l'infini; car tout déplacement conserve ce cercle. Mais maintenant, elle devra faire correspondre aux trois points A, B, C situés respectivement sur les axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, à une distance égale à R de l'origine, trois points situés respectivement sur les mêmes axes à la distance R_1. En exprimant que les formules satisfont à cette condition et que l'origine des coordonnées n'est pas déplacée par l'homographie, on trouve qu'elles se réduisent à la forme simple

$$x = \frac{R}{R_1} x_1, \qquad y = \frac{R}{R_1} y_1, \qquad z = \frac{R}{R_1} z_1.$$

Elles définissent une homothétie dont le centre est l'origine des coordonnées et pour laquelle le rapport de similitude, positif ou négatif, est $\frac{R}{R_1}$. Ainsi,

Toute homographie qui conserve le cercle de l'infini, et par conséquent le plan de l'infini, peut être remplacée par un déplacement, précédé ou suivi d'une homothétie dont le centre peut être choisi arbitrairement.

Si $\frac{R}{R_1}$ est égal à l'unité, l'homothétie disparaît; s'il est égal à -1, elle est remplacée par une symétrie.

60. Examinons maintenant les homographies qui, sans conserver le cercle de l'infini, conservent néanmoins le plan de l'infini.

Soient (F) et (F_1) deux figures correspondantes dans une telle homographie : au cercle de l'infini de (F_1) correspond, dans (F), une certaine conique (C). L'homographie qui transforme (F) en (F_1) pourra donc se composer de deux homographies, l'une qui pourra être choisie arbitrairement parmi celles qui amènent la conique (C) à coïncider avec le cercle de l'infini ; l'autre qui devra conserver le cercle de l'infini.

Pour déterminer une des homographies qui amènent la conique (C) sur le cercle de l'infini, nous prendrons le cône ayant pour sommet un point quelconque de l'espace O et pour base la conique (C). Ce cône, rapporté à son sommet et à ses axes, aura pour équation

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = 0.$$

Une des homographies qui amèneront la conique (C) à coïncider avec le cercle de l'infini sera donc définie par les formules

$$(37) \qquad x = A x_1, \qquad y = B y_1, \qquad z = C z_1, \qquad t = t_1,$$

et il ne restera plus qu'à lui adjoindre une transformation conservant le cercle de l'infini. Or nous savons que cette transformation résulte de la combinaison d'une homothétie, ayant pour centre le point O, par exemple, avec un déplacement quelconque. L'homothétie ne pourra que changer les valeurs des constantes A, B, C. Nous obtenons donc le résultat suivant :

Si deux figures (F), (F_1) *sont correspondantes dans une homographie qui conserve le plan de l'infini, on peut, par un déplacement de l'une d'elles, ramener l'homographie à être représentée par les formules* (37) *où les coordonnées sont rapportées à des axes rectangulaires.*

CHAPITRE VI.

LE PRINCIPE DE DUALITÉ.

La création par Poncelet de la théorie des polaires réciproques a conduit Gergonne à dégager un principe général auquel il donna le nom de principe de dualité des propriétés de l'étendue. Ce principe une fois admis devait conduire à la notion des coordonnées tangentielles qui ont été introduites en premier lieu par Plücker et par Chasles. — Quelques théorèmes corrélatifs des plus simples relatifs aux coordonnées ponctuelles et aux coordonnées tangentielles dans l'espace. — Degré et classe d'une surface. — Propriétés de la tangente; tangentes conjuguées. — Définitions diverses que l'on peut donner des coordonnées tangentielles. — Théorème de Carnot sur les transversales. — Centre des moyennes harmoniques.

---

61. Dans un Chapitre antérieur, nous avons expliqué comment l'homologie de Poncelet avait conduit Chasles à l'homographie la plus générale dans le plan et dans l'espace. Une autre découverte capitale de Poncelet, celle de la théorie des polaires réciproques, conduisit Gergonne à dégager un principe général, auquel il donna le nom de *principe de dualité*, et qui permettait de déduire, de toute proposition de Géométrie plane où figurent des relations entre des points et des droites, une proposition nouvelle où les droites de la première figure sont remplacées par des points et *vice versa*. Il était tout naturel qu'une telle méthode de transformation assimilant une droite de l'une des figures à un point de l'autre conduisît à introduire, à côté des systèmes de coordonnées définissant des points, d'autres systèmes de coordonnées propres à définir les lignes droites. Ce pas a été franchi simultanément par Chasles et Plücker. Mais c'est Plücker qui a, le premier, publié ses résultats. Pour gagner du temps, nous nous bornerons à l'espace.

Étant donné un plan défini par l'équation

$$ux + vy + wz + pt = 0,$$

nous dirons que u, v, w, p sont les coordonnées homogènes du

plan et le parallélisme entre ces coordonnées dites *tangentielles*, et les coordonnées *ponctuelles* pour tout ce qui concerne le premier degré s'établira de la manière suivante par le système à deux colonnes, cher à Gergonne.

Coordonnées ponctuelles.

Toute équation du premier degré définit les points d'un plan, c'est-à-dire est l'équation d'un plan.

Deux équations du premier degré définissent les points communs à deux plans, c'est-à-dire l'intersection de deux plans.

Trois équations du premier degré définissent le point d'intersection de trois plans.

Si x, y, z, t; x', y', z', t' désignent les coordonnées de deux points A, B,

$$x+\lambda x', \quad y+\lambda y',$$
$$z+\lambda z', \quad t+\lambda t'$$

sont les coordonnées de tout point M situé sur AB, et le rapport anharmonique des quatre points M qui correspondent à quatre valeurs différentes de λ est égal à celui de ces quatre valeurs.

Si x, y, z, t; x', y', z', t'; x'', y'', z'', t'' sont les coordonnées de trois points A, B, C non en ligne droite,

$$\lambda x+\lambda' x'+\lambda'' x'',$$
$$\lambda y+\lambda' y'+\lambda'' y'',$$
$$\lambda z+\lambda' z'+\lambda'' z'',$$
$$\lambda t+\lambda' t'+\lambda'' t''$$

sont les coordonnées de tout point dans le plan ABC.

Coordonnées tangentielles.

Toute équation du premier degré définit les plans passant par un point, c'est-à-dire est l'équation tangentielle de ce point.

Deux équations du premier degré définissent les plans passant par deux points, c'est-à-dire la droite de jonction de ces deux points.

Trois équations du premier degré définissent le plan passant par trois points.

Si u, v, w, p; u', v', w', p' désignent les coordonnées de deux plans α, β,

$$u+\lambda u', \quad v+\lambda v',$$
$$w+\lambda w', \quad p+\lambda p'$$

sont les coordonnées de tout plan passant par l'intersection de α et de β, et le rapport anharmonique de quatre plans correspondants à quatre valeurs différentes de λ est égal à celui de ces quatre valeurs.

Si u, v, w, p; u', v', w', p'; u'', v'', w'', p'' sont les coordonnées de trois plans α, β, γ ne passant pas par une même ligne droite,

$$\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'',$$
$$\lambda v+\lambda' v'+\lambda'' v'',$$
$$\lambda w+\lambda' w'+\lambda'' w'',$$
$$\lambda p+\lambda' p'+\lambda'' p''$$

sont les coordonnées de tout plan passant par leur intersection.

Coordonnées ponctuelles.

Si $x, y, z, t; x', y', z', t'; x'', y'', z'', t''; x''', y''', z''', t'''$ sont les coordonnées de quatre points A, B, C, D non situés dans un même plan,

$$\begin{aligned}&\lambda x + \lambda' x' + \lambda'' x'' + \lambda''' x''',\\ &\lambda y + \lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''',\\ &\lambda z + \lambda' z' + \lambda'' z'' + \lambda''' z''',\\ &\lambda t + \lambda' t' + \lambda'' t'' + \lambda''' t'''\end{aligned}$$

sont les coordonnées de tout point de l'espace.

Coordonnées tangentielles.

Si $u, v, w, p; u', v', w', p'; u'', v'', w'', p''; u''', v''', w''', p'''$ sont les coordonnées de quatre plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ne se coupant pas en un point,

$$\begin{aligned}&\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'' + \lambda''' u''',\\ &\lambda v + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \lambda''' v''',\\ &\lambda w + \lambda' w' + \lambda'' w'' + \lambda''' w''',\\ &\lambda p + \lambda' p' + \lambda'' p'' + \lambda''' p'''\end{aligned}$$

peuvent être prises pour les coordonnées de tout plan de l'espace.

Le parallélisme, comme on voit, est parfait, et nous pouvons même remarquer, ce que Poncelet et Gergonne ne savaient pas, qu'il s'étend aux rapports anharmoniques. Pour montrer qu'il se conserve dans les équations de degré supérieur, nous allons traiter simultanément deux questions fondamentales.

L'équation homogène de degré supérieur

$$f(x, y, z, t) = 0$$

définit une double infinité de points. Nous dirons qu'ils forment un lieu.

Si $x, y, z, t; x_1, y_1, z_1, t_1$ sont les coordonnées de deux points A, A_1 de l'espace, l'équation

$$f(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1, t + \lambda t_1) = 0$$

fera connaître les points du lieu situés sur la droite AA_1. Le degré de f sera dit le *degré* du lieu; c'est le nombre de points qu'il a sur une droite quelconque.

L'équation homogène de degré supérieur

$$\varphi(u, v, w, p) = 0$$

définit une double infinité de plans. Nous dirons qu'ils ont une enveloppe.

Si $u, v, w, p; u_1, v_1, w_1, p_1$ sont les coordonnées de deux plans α, α_1 de l'espace, l'équation

$$\varphi(u + \lambda u_1, v + \lambda v_1, w + \lambda w_1, p + \lambda p_1) = 0$$

fera connaître les plans de l'enveloppe passant par l'intersection des plans $\alpha, \alpha_1, \ldots$ Le degré de φ est appelé la *classe* de l'enveloppe; c'est le nombre des plans de l'enveloppe passant par une droite quelconque.

Supposons que le point A se trouve sur le lieu. L'équation précédente développée prendra la forme

$$\lambda\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}+t_1\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\lambda^2\ldots=0.$$

Par conséquent, l'équation

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}+t_1\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

où x, y, z, t sont considérés comme des données et x_1, y_1, z_1, t_1 comme des coordonnées variables, représentera un plan qui passera évidemment par le point A et sera le lieu des points A_1 tels que la droite AA_1 coupe le lieu en deux points confondus en A, c'est-à-dire soit tangente en A.

Supposons que le plan α soit un des plans de l'enveloppe. L'équation précédente développée prendra la forme

$$\lambda\left(u_1\frac{\partial \varphi}{\partial u}+v_1\frac{\partial \varphi}{\partial v}+w_1\frac{\partial \varphi}{\partial w}+p_1\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)+\lambda^2\ldots=0.$$

Par conséquent, l'équation

$$u_1\frac{\partial \varphi}{\partial u}+v_1\frac{\partial \varphi}{\partial v}+w_1\frac{\partial \varphi}{\partial w}+p_1\frac{\partial \varphi}{\partial p}=0,$$

où u, v, w, p sont considérés comme des données et u_1, v_1, w_1, p_1 comme des coordonnées variables, représentera un point qui se trouvera évidemment dans le plan α et par lequel passeront tous les plans α_1 tels que deux des plans tangents menés à l'enveloppe par la droite d'intersection des deux plans α, α_1 se confondent avec le plan α.

Comme il n'est pas douteux pour nous que l'enveloppe ne soit en général une surface, on voit que les deux méthodes fondées sur l'emploi des deux systèmes de coordonnées fournissent deux propriétés distinctes de la tangente. C'est la droite de jonction de deux points infiniment voisins. C'est aussi la droite d'intersection de deux plans tangents infiniment voisins. Pour opérer la liaison entre ces deux résultats il faut ajouter le raisonnement suivant :

Considérons le plan dont les coordonnées sont définies par les relations

$$\frac{u}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{v}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{w}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{p}{\frac{\partial f}{\partial t}}$$

qui donnent lieu à la relation

$$ux+vy+wz+pt=0,$$

Considérons le point défini par les relations

$$\frac{x}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}=\frac{y}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}=\frac{z}{\frac{\partial \varphi}{\partial w}}=\frac{t}{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}$$

qui donnent lieu à la relation

$$ux+vy+wz+pt=0,$$

ou, en employant le signe $\mathbf{S}$ de Lamé qui désigne une somme étendue à toutes les coordonnées,

$$\mathbf{S}\, ux = 0.$$

Si l'on différentie cette relation, il vient

$$\mathbf{S}\, u\, dx + \mathbf{S}\, x\, du = 0$$

et, comme la première partie de cette somme est nulle en vertu de l'équation

$$\mathbf{S}\, \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = 0,$$

il reste

$$\mathbf{S}\, x\, du = 0.$$

Ce qui prouve que le point (x, y, z, t) se trouve sur la droite d'intersection de deux plans tangents infiniment voisins.

ou, en employant le signe $\mathbf{S}$ de Lamé qui désigne une somme étendue à toutes les coordonnées,

$$\mathbf{S}\, ux = 0.$$

Si l'on différentie cette relation, il vient

$$\mathbf{S}\, u\, dx + \mathbf{S}\, x\, du = 0$$

et, comme la seconde partie de cette somme est nulle en vertu de la relation

$$\mathbf{S}\, \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du = 0,$$

il reste

$$\mathbf{S}\, u\, dx = 0.$$

Ce qui prouve que le plan tangent contient la droite qui joint deux points infiniment voisins.

Ainsi se trouve établi le lien entre les deux propriétés de la tangente.

Dupin a introduit dans la théorie des surfaces une notion d'intérêt capital : celle des tangentes conjuguées. Si l'on se déplace sur une surface, la droite d'intersection des deux plans tangents en deux points infiniment voisins M, M′ est dite la tangente conjuguée de la tangente MM′. Il est facile de voir que la relation entre ces deux tangentes est réciproque ou involutive. Chacune est la conjuguée de l'autre.

Reprenons en effet les relations

$$\mathbf{S}\, ux = 0, \qquad \mathbf{S}\, u\, dx = 0, \qquad \mathbf{S}\, x\, du = 0,$$

entre un point d'une surface et le plan tangent en ce point. La caractéristique d se rapporte à un certain déplacement du point sur la surface. Désignons par δ la caractéristique relative à un

autre déplacement. On aura

$$\mathrm{S}\, u\,\delta x = 0, \qquad \mathrm{S}\, x\,\delta u = 0.$$

Si l'on veut que ce déplacement soit celui qui se rapporte à la direction conjuguée, il faudra que la première des deux équations précédentes soit vérifiée quand on y remplacera u, v, w, p par $u + du$, $v + dv$, $w + dw$, $p + dp$, ce qui donnera la condition

$$\mathrm{S}\, du\,\delta x = 0$$

qui exprime la propriété considérée. Or, si l'on remplace u, v, w, p par les quantités proportionnelles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$, l'équation précédente devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx\,\delta x + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, dy}(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + \ldots = 0.$$

Comme elle est parfaitement symétrique par rapport aux caractéristiques d, δ, on voit que la relation entre deux tangentes conjuguées est bien involutive comme nous l'avons annoncé. Elle pourra s'exprimer, par exemple, par la relation

$$\mathrm{S}\, \delta u\, dx = 0,$$

qui montre que l'on peut échanger les coordonnées ponctuelles et les coordonnées tangentielles. En d'autres termes, la propriété des tangentes conjuguées est *dualistique* [1].

62. On peut se proposer pour les coordonnées tangentielles, comme nous l'avons fait pour les coordonnées homogènes, de donner une définition géométrique de ces nouvelles coordonnées.

D'abord si, dans l'équation

$$\mathrm{S}\, ux = 0,$$

---

[1] On pourra lire une autre démonstration dans l'Ouvrage de l'Auteur : *Leçons sur la théorie des surfaces et sur les applications géométriques du Calcul infinitésimal*, 2e édition, Première Partie, n° 106.

x, y, z, t sont des coordonnées cartésiennes homogènes, il est clair que

$$-\frac{u}{p}, \quad -\frac{v}{p}, \quad -\frac{w}{p}$$

désignent les inverses des longueurs interceptées sur les axes coordonnés par le plan précédent.

S'il s'agit de coordonnées tétraédriques générales, nous avons vu que ces coordonnées ont leurs rapports parfaitement définis dès que l'on donne le tétraèdre de référence ABCD et le point P dont les coordonnées sont égales. Par ce point P et l'une des arêtes, AB par exemple, faisons passer un plan qui coupera l'arête opposée CD en un certain point P'. Ce point P' étant défini par des relations telles que les suivantes :

$$X = Y, \qquad Z = T = 0,$$

il est clair que son conjugué harmonique sera dans le plan (ϖ) défini par l'équation

$$X + Y + Z + T = 0. \tag{1}$$

Ainsi nous avons ce théorème : *Si, par un point quelconque et les six arêtes du tétraèdre, on fait passer six plans, qui coupent les arêtes opposées en six points, les conjugués harmoniques de ces six points par rapport aux sommets du tétraèdre situés sur l'arête qui les contient sont dans un même plan.*

Ce théorème peut donner de deux manières une définition tout à fait générale des coordonnées tangentielles. Voici la première :

Le point où le plan défini par l'équation

$$ux + vy + wz + pt = 0$$

coupe l'arête du tétraèdre intersection des deux faces

$$z = 0, \qquad t = 0$$

est déterminé par la relation

$$\frac{x}{y} = \frac{-v}{u}.$$

Or, sur l'arête considérée, on connaît quatre points : d'abord les

deux sommets du tétraèdre définis respectivement par les équations

$$X = 0, \qquad Y = 0;$$

nous les désignerons par B et A; on connaît aussi le point p défini par l'équation précédente et le point p' où le plan (ϖ) coupe la même arête et qui est défini par l'équation

$$X + Y = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre points A, B, p, p' est donc égal, d'après les règles données, à $\frac{u}{v}$. On a

$$\mathcal{R}(A, B, p, p') = \frac{u}{v}.$$

Ainsi, le quotient de deux quelconques des coordonnées tangentielles s'exprime par un rapport anharmonique.

Dans le cas d'un véritable tétraèdre et de points réels, on a évidemment

$$\frac{Ap}{Bp} = \frac{\delta_A}{\delta_B}, \qquad \frac{Ap'}{Bp'} = \frac{\delta'_A}{\delta'_B},$$

δ_A, δ_B désignant les distances affectées de signes des points A, B au plan considéré et δ'_A, δ'_B les distances au plan fixe (ϖ) qu'il faut adjoindre au tétraèdre de référence pour définir entièrement les coordonnées; et alors on peut écrire la proportion

$$\frac{u\,\delta'_A}{\delta_A} = \frac{v\,\delta'_B}{\delta_B} = \frac{w\,\delta'_C}{\delta_C} = \frac{p\,\delta'_D}{\delta_D}.$$

En d'autres termes, les coordonnées tangentielles sont proportionnelles aux distances du plan aux quatre sommets du tétraèdre multipliées par quatre nombres fixes.

On verra facilement que ces nombres sont tous égaux quand les coordonnées ponctuelles sont barycentriques; car alors le plan défini par l'équation (1) est rejeté à l'infini.

63. En résumé, tout, dans les considérations préliminaires que nous venons de développer, repose sur la considération des substitutions linéaires et du rapport anharmonique. On peut même rattacher à cette considération des théorèmes qui ont une apparence

absolument métrique. Nous choisirons comme exemple le célèbre théorème de Carnot sur les transversales.

Soit

$$f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation homogène d'une surface, que nous supposerons du degré n. Si $x, y, z, t; x', y', z', t'$ désignent les coordonnées de deux points A et B, on pourra, pour obtenir l'intersection de la droite AB avec la surface, exprimer que les coordonnées

$$x + \lambda x', \quad y + \lambda y', \quad z + \lambda z', \quad t + \lambda t'$$

d'un point quelconque de la droite AB vérifient l'équation de la surface, et l'on sera ainsi conduit à l'équation

$$f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z', t + \lambda t') = 0$$

qui définit n valeurs de λ. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ces valeurs. On aura évidemment

$$(2) \qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n = (-1)^n \frac{f(x, y, z, t)}{f(x', y', z', t')},$$

$$(3) \qquad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} = -\frac{1}{f(x, y, z, t)} \left[x' \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z} + t' \frac{\partial f}{\partial t} \right].$$

Ces relations donnent lieu aux conséquences suivantes.

Prenons sur AB le point H qui se trouve, par exemple, dans le plan (P) représenté par l'équation

$$\varphi(x, y, z, t) = ax + by + cz + dt = 0.$$

La valeur λ' de λ qui correspond au point H sera déterminée par l'équation

$$\lambda' = -\frac{\varphi(x, y, z, t)}{\varphi(x', y', z', t')}.$$

Désignons par M_i le point de AB qui se trouve sur le lieu et correspond à la valeur λ_i de λ; d'après notre équation fondamentale, on aura donc

$$(4) \qquad \frac{\lambda_i}{\lambda'} = \mathcal{R}(A, B, M_i, H)$$

et l'équation (2) prendra la forme

$$(5) \qquad \prod \mathcal{R}(A, B, M_i, H) = \frac{f(x, y, z, t)}{f(x', y', z', t')} \frac{\varphi^n(x', y', z', t')}{\varphi^n(x, y, z, t)}.$$

Désignons le premier membre par (AB). Il résulte de la formule précédente que, si l'on considère un polygone plan ou gauche ABC...LA, on aura

$$(AB)(BC)\ldots(KL)(LA) = 1. \tag{6}$$

C'est le théorème de Carnot mis sous forme projective. L'interprétation de tous nos raisonnements pourrait d'ailleurs se faire en coordonnées tangentielles.

Pour retrouver la forme ordinaire du théorème de Carnot, il suffit de supposer que le plan (P) soit le plan de l'infini. Alors on a

$$\mathcal{R}(A, B, M_i, H) = \frac{\overline{AM_i}}{\overline{BM_i}}$$

et, par suite,

$$(AB) = \frac{\overline{AM_1}.\overline{AM_2}\ldots\overline{AM_n}}{\overline{BM_1}.\overline{BM_2}\ldots\overline{BM_n}};$$

et si l'on pose

$$[AB] = \overline{AM_1}.\overline{AM_2}\ldots\overline{AM_n},$$

l'équation fondamentale prend la forme

$$[AB][BC]\ldots[LA] = [AL][LK]\ldots[CB][BA]. \tag{7}$$

Si nous interprétons de même l'équation (3) en tenant compte de la formule (4), on voit que le plan défini par l'équation

$$\mathbf{S}\, x' \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} = 0$$

définit, le point A étant considéré comme fixe, le lieu des points B tels que l'on ait

$$\sum \frac{1}{\mathcal{R}(A, B, M_i, H)} = \sum \mathcal{R}(B, A, M_i, H) = 0.$$

Si l'on remplace le rapport anharmonique par son expression, il vient

$$\sum \frac{\overline{BM_i}}{\overline{AM_i}} = 0. \tag{8}$$

Telle est l'équation qui définit le point B sur chaque sécante passant par A. Poncelet l'a nommé *centre des moyennes harmoniques du point* A *par rapport au groupe des points* M_i.

Dans le cas d'une quadrique, on a deux points seulement M_1, M_2 et l'équation

$$\frac{\overline{BM_1}}{\overline{AM_1}} + \frac{\overline{BM_2}}{\overline{AM_2}} = 0$$

ou, si l'on veut, la relation

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

montre que B est le conjugué harmonique de A par rapport au segment $\overline{M_1M_2}$.

Pour un lieu de degré supérieur, on peut transformer comme il suit la relation (8). Remplaçons-y $\overline{BM_i}$ par $\overline{AM_i} - \overline{AB}$, elle prendra la forme

$$\frac{n}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM_1}} + \frac{1}{\overline{AM_2}} + \ldots + \frac{1}{\overline{AM_n}} \tag{9}$$

qui semble avoir perdu son caractère projectif.

On pourra lire, dans le *Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques* inséré par Poncelet au Tome III du *Journal de Crelle* et dans l'*Aperçu historique* de Chasles, de nombreuses propriétés du centre des moyennes harmoniques.

CHAPITRE VII.

LES FIGURES CORRÉLATIVES.

Opinion de Michel Chasles relative à l'emploi des méthodes de transformation. — Elle paraît trop absolue. — Emploi des coordonnées tangentielles dans l'homographie et dans la transformation corrélative. — Définition complète de cette dernière transformation. — Dans le cas le plus général, elle se réduit à une transformation par polaires réciproques, précédée ou suivie d'un déplacement. — Application de cette proposition générale aux transformations considérées pour la première fois par Möbius et dans lesquelles à un point correspond un plan passant par ce point.

---

64. Chasles, qui a tant fait pour développer l'homographie et la corrélation, pensait que les méthodes de transformation ne doivent pas être utilisées systématiquement en Géométrie, parce qu'elles masquent la véritable origine des théorèmes qu'on obtient par leur emploi. Cette opinion est trop absolue, et contrairement aux prévisions de Chasles, les transformations jouent en Géométrie et en Analyse un rôle de plus en plus important. Lorsqu'on n'en abuse pas, comme on l'a fait au début, elles nous permettent, au contraire, de nous arrêter à des démonstrations qui n'introduisent aucun élément étranger au but que l'on veut atteindre et mettent en évidence les connexions essentielles des théorèmes. Dira-t-on par exemple que, lorsqu'on déduit du théorème de Pascal le théorème de Brianchon par la méthode des polaires réciproques, on n'a acquis aucune notion sur le lien qui rattache ce dernier théorème aux autres propriétés des coniques ; mais il suffit de remarquer que, parmi les démonstrations différentes que l'on peut donner du théorème de Pascal, il n'en est *aucune* qui, convenablement interprétée, ne conduise au théorème de Brianchon.

Les remarques que nous avons faites précédemment sur la transformation homographique justifient ces affirmations. Nous avons vu, par exemple, que la transformation homographique la plus

générale est définie par des équations de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} X = ax + by + cz + dt, \\ Y = a'x + b'y + c'z + d't, \\ Z = a''x + b''y + c''z + d''t, \\ T = a'''x + b'''y + c'''z + d'''t, \end{cases}$$

où X, Y, Z, T; x, y, z, t désignent les coordonnées homogènes de deux points correspondants. L'emploi des coordonnées tangentielles va nous permettre d'abord de compléter ces formules en leur adjoignant celles qui établissent une correspondance entre les plans des deux figures.

Soit

$$UX + VY + WZ + PT = 0$$

l'équation d'un plan de la première figure. Si l'on y remplace X, Y, Z, T par leurs expressions (1), on trouve un résultat de la forme

$$ux + vy + wz + pt = 0,$$

où l'on a

$$(2)\quad \begin{cases} u = aU + a'V + a''W + a'''P, \\ v = bU + b'V + b''W + b'''P, \\ w = cU + c'V + c''W + c'''P, \\ p = dU + d'V + d''W + d'''P. \end{cases}$$

Ces nouvelles formules définissent la relation entre les plans correspondants des deux figures.

Revenons aux formules (1); les fonctions linéaires de x, y, z, t qui figurent dans leur second membre peuvent être prises pour les coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 du point (x, y, z, t) par rapport à un tétraèdre (T_1) différent de celui (T) auquel se rapportaient les relations (1).

Ainsi, les formules de la transformation homographique *la plus générale* peuvent être mises sous la forme

$$X = x_1, \qquad Y = y_1, \qquad Z = z_1, \qquad T = t_1,$$

en sorte que deux points correspondants ont les mêmes coordonnées, mais par rapport à deux tétraèdres différents, dont l'un peut être choisi arbitrairement. Dans ces conditions les formules (2) nous donnent

$$u_1 = U, \qquad v_1 = V, \qquad w_1 = W, \qquad p_1 = P.$$

65. L'emploi des coordonnées tangentielles nous permet d'associer à la transformation homographique une autre transformation linéaire dans laquelle un plan correspond à un point. Elle est définie par des formules telles que les suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} U = ax + a'y + a''z + a'''t, \\ V = bx + b'y + b''z + b'''t, \\ W = cx + c'y + c''z + c'''t, \\ P = dx + d'y + d''z + d'''t. \end{cases}$$

En raisonnant comme tout à l'heure, on verra qu'au point (X, Y, Z, T) de la première figure correspond le plan

$$ux + vy + wz + pt = 0$$

de la seconde, u, v, w, p ayant pour valeurs

$$(4)\quad \begin{cases} u = aX + bY + cZ + dT, \\ v = a'X + b'Y + c'Z + d'T, \\ w = a''X + b''Y + c''Z + d''T, \\ p = a'''X + b'''Y + c'''Z + d'''T. \end{cases}$$

Opérons comme précédemment. Les fonctions linéaires qui figurent dans les seconds membres des formules (3) sont les coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 du point (x, y, z, t) de la seconde figure relatives à un nouveau tétraèdre (T_1); en sorte que les formules de la transformation corrélative la plus générale peuvent être ramenées à la forme

$$U = x_1, \qquad V = y_1, \qquad W = z_1, \qquad P = t_1,$$

les coordonnées U, V, W, P et x_1, y_1, z_1, t_1 étant relatives à deux tétraèdres différents. Les formules (4) nous donnent alors

$$X = u_1, \qquad Y = v_1, \qquad Z = w_1, \qquad T = p_1.$$

On voit donc que toute proposition dans laquelle n'interviendront, ni la forme du tétraèdre, ni la valeur des paramètres de référence, s'appliquera d'elle-même à toutes les figures homographiques et corrélatives. Les démonstrations qui la donneront ne pourront, par cela même, employer que les éléments sur lesquels cette proposition repose essentiellement.

66. Avant de continuer cette exposition des principes, nous examinerons une question qui nous paraît nouvelle. C'est Poncelet qui, par sa théorie de l'homologie et sa théorie des polaires réciproques, a été le grand initiateur. A l'exemple de ce que nous avons fait pour l'homographie, demandons-nous si la transformation corrélative peut donner des figures plus générales que la méthode des polaires réciproques.

Cette méthode, remplaçant un point par son plan polaire, nous conduit évidemment à des formules telles que les suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \mathrm{A}x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'z + \mathrm{C}t, \\ v = \mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}z + \mathrm{C}'t, \\ w = \mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}''t, \\ p = \mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z + \mathrm{D}t, \end{cases}$$

où nous pouvons supposer que les coordonnées soient cartésiennes et rapportées à un système d'axes rectangulaires.

Soit, d'autre part,

$$(6)\qquad \begin{cases} u = ax + by + cz + dt, \\ v = a'x + b'y + c'z + d't, \\ w = a''x + b''y + c''z + d''t, \\ p = a'''x + b'''y + c'''z + d'''t \end{cases}$$

une transformation corrélative quelconque, rapportée aux mêmes axes. Il faut examiner si, en soumettant la figure lieu du point (x, y, z, t) à un déplacement défini par les formules

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1 + \alpha''' t_1, \\ y = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1 + \beta''' t_1, \\ z = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1 + \gamma''' t_1, \\ t = t_1, \end{cases}$$

on peut ramener les formules (6) aux précédentes; c'est-à-dire faire en sorte que, dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix},$$

les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale soient égaux. Il y aura lieu d'écrire ainsi six relations. Les for-

mules (7) dépendent bien de six arbitraires, α''', β''', γ''' et les trois quantités dont dépendent les neuf cosinus. Il y aura donc autant d'inconnues que d'équations. Nous étudierons d'abord les trois relations qui doivent être satisfaites et qui contiennent les neuf cosinus. Elles sont

$$(8) \quad \begin{cases} a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma', \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'', \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \end{cases}$$

et elles doivent, à elles trois, suffire à déterminer ces cosinus.

A cet effet, remplaçons les neuf cosinus par leurs expressions en fonction de trois arbitraires

$$(9) \quad \begin{cases} D\alpha = \rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, & D\beta = 2\lambda\mu - 2\nu\rho, & D\gamma = 2\lambda\nu + 2\mu\rho, \\ D\alpha' = 2\lambda\mu + 2\nu\rho, & D\beta' = \rho^2 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2, & D\gamma' = 2\mu\nu - 2\lambda\rho, \\ D\alpha'' = 2\lambda\nu - 2\mu\rho, & D\beta'' = 2\mu\nu + 2\lambda\rho, & D\gamma'' = \rho^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2, \end{cases}$$

où l'on a

$$(10) \qquad D = \rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

En substituant ces expressions dans les relations (8), on obtiendra trois équations du second degré qui, si l'on y regardait λ, μ, ν, ρ comme des coordonnées homogènes, représenteraient trois quadriques et, par conséquent, fourniraient généralement huit solutions. Mais on ne saurait se contenter de cet aperçu; et nous allons obtenir le résultat essentiel en poursuivant cette étude.

67. Pour cela nous remarquerons qu'on peut simplifier les formules (6). En effet, on peut toujours les écrire comme il suit.

Posons

$$(11) \quad \begin{cases} f(x,y,z) = ax^2 + b'y^2 + c''z^2 + (b+a')xy + (c+a'')xz + (c'+b'')xy, \\ \qquad 2a_1 = c' - b'', \qquad 2b_1 = a'' - c, \qquad 2c_1 = b - a'; \end{cases}$$

les formules (6) pourront s'écrire

$$(12) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2}f'_x + c_1 y - b_1 z + dt, \\ v = \frac{1}{2}f'_y + a_1 z - c_1 x + d't, \\ w = \frac{1}{2}f'_z + b_1 x - a_1 y + d''t, \\ p = a'''x + b'''y + c'''z + d'''t. \end{cases}$$

On verra facilement que ces expressions conservent la forme précédente quand on change les axes sans changer l'origine des coordonnées. En effet, si X, Y, Z désignent les coordonnées d'un point quelconque, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{X}u + \mathrm{Y}v + \mathrm{Z}w = \frac{1}{2}(\mathrm{X}f'_x + \mathrm{Y}f'_y + \mathrm{Z}f'_z) \\ + \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} + t(d\mathrm{X} + d'\mathrm{Y} + d''\mathrm{Z}). \end{aligned}$$

Il est clair que les trois parties dont se compose le second membre se reproduisent lorsqu'on soumet X, Y, Z et x, y, z à cette substitution homogène qui définit un déplacement autour de l'origine. Il en est de même du premier membre de la relation précédente ainsi que de p. Notre proposition est donc établie.

Ce point étant admis, choisissons comme axes coordonnés les axes principaux du cône défini par l'équation [1]

$$f(x, y, z) = 0.$$

On pourra donner aux équations (12) la forme plus simple

$$(13)\quad \begin{cases} u = ax + c_1 y - b_1 z + ht, \\ v = by + a_1 z - c_1 x + h't, \\ w = cz + b_1 x - a_1 y + h''t, \\ p = kx + k'y + k''z + lt, \end{cases}$$

et les équations qu'il s'agit de vérifier deviendront

$$(14)\quad \begin{cases} a_1(\beta' + \gamma'') - b_1\alpha' - c_1\alpha'' + b\beta'' - c\gamma' = 0, \\ b_1(\gamma'' + \alpha) - c_1\beta'' - a_1\beta + c\gamma - a\alpha'' = 0, \\ c_1(\alpha + \beta') - a_1\gamma - b_1\gamma' + a\alpha' - b\beta = 0. \end{cases}$$

En y substituant les expressions des neuf cosinus, on obtient les

---

[1] Nous supposons, on le voit, que ces axes existent et nous laissons de côté le cas où le cône représenté par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

est imaginaire et tangent en un seul point au cercle de l'infini. Il n'existe pas alors de substitution orthogonale ramenant $f(x, y, z)$ à une somme de carrés.

relations

$$(15)\quad \begin{cases} a_1(\rho^2-\lambda^2)-b_1(\mu\lambda+\nu\rho)+c_1(\mu\rho-\lambda\nu)+b(\mu\nu+\lambda\rho)+c(\lambda\rho-\mu\nu)=0,\\ b_1(\rho^2-\mu^2)-c_1(\nu\mu+\lambda\rho)+a_1(\nu\rho-\lambda\mu)+c(\nu\lambda+\mu\rho)+a(\mu\rho-\lambda\nu)=0,\\ c_1(\rho^2-\nu^2)-a_1(\lambda\nu+\mu\rho)+b_1(\lambda\rho-\mu\nu)+a(\lambda\mu+\nu\rho)+b(\nu\rho-\lambda\mu)=0,\end{cases}$$

dont la discussion, comme on va le voir, peut être entreprise avec succès.

Remarquons d'abord que, si l'on connaît une solution du problème, on peut choisir les axes de telle manière que l'on ait

$$a_1 = b_1 = c_1 = 0,$$

et les équations précédentes se réduiront aux suivantes :

$$(16)\quad \begin{cases} (b-c)\mu\nu+(b+c)\lambda\rho=0,\\ (c-a)\nu\lambda+(c+a)\mu\rho=0,\\ (a-b)\lambda\mu+(a+b)\nu\rho=0.\end{cases}$$

Elles admettent, comme il fallait s'y attendre, la solution

$$\lambda = \mu = \nu = 0,$$

qui correspond à celle qui a été prise comme point de départ, mais elles ont sept autres solutions convenant toutes au problème proposé.

Les huit solutions du système (16) peuvent se distribuer dans les deux groupes suivants :

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda=0, & \mu=0, & \nu=0;\\ \rho=0, & \mu=0, & \nu=0;\\ \lambda=0, & \rho=0, & \nu=0;\\ \lambda=0, & \mu=0, & \rho=0;\end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda=\varepsilon\rho\sqrt{\dfrac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}},\\ \mu=\varepsilon'\rho\sqrt{\dfrac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}},\\ \nu=\varepsilon''\rho\sqrt{\dfrac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}},\end{cases}$$

ε, ε', ε'' étant trois valeurs de l'unité positive ou négative, liées par la relation

$$(18)\quad \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''=-1.$$

Les quatre solutions du second groupe sont à rejeter ; car elles sont imaginaires et d'ailleurs liées par la relation

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=0,$$

qui est inadmissible et donnerait à tous les cosinus des valeurs infinies. Il ne nous reste donc que les solutions fournies par le premier des groupes (17). La première équation de ce groupe correspond, nous l'avons remarqué, à la solution du problème qui nous a servi de point de départ. Les autres s'obtiennent en prenant des symétries par rapport aux axes coordonnés, c'est-à-dire en changeant le signe de deux des coordonnées x, y, z. Leur existence pouvait donc être prévue.

Mais alors, il nous reste à résoudre le problème suivant : Comment éliminer, parmi les solutions du système (15), celles qui ne conviennent pas au problème proposé? On peut effectuer cette élimination en remarquant que la relation

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 0$$

est invariante quand on fait un changement d'axes et, par conséquent, que les solutions à éliminer seront celles qui satisferont à cette relation.

Nous opérerons comme il suit. Résolvons les équations (15) par rapport à a, b, c. Si nous éliminons b et c, par exemple, nous serons conduits à la relation

$$\begin{aligned}&(\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\\ &\quad\times [a_1\mu\nu(\rho^2 + \lambda^2) - b_1\lambda\mu(\rho^2 - \mu^2) - c_1\lambda\mu(\rho^2 - \nu^2) - 2a\lambda\mu\nu\rho] = 0.\end{aligned}$$

Les solutions propres du problème devront donc satisfaire à l'équation

$$(19) \qquad a_1\mu\nu(\rho^2 + \lambda^2) - b_1\lambda\nu(\rho^2 - \mu^2) - c_1\lambda\mu(\rho^2 - \nu^2) - 2a\lambda\mu\nu\rho = 0$$

et à celles qu'on en déduit par des permutations circulaires

$$(19') \quad \left\{\begin{aligned} &b_1\lambda\nu(\rho^2 + \mu^2) - c_1\lambda\mu(\rho^2 - \nu^2) - a_1\mu\nu(\rho^2 - \lambda^2) - 2b\lambda\mu\nu\rho = 0,\\ &c_1\lambda\mu(\rho^2 + \nu^2) - a_1\mu\nu(\rho^2 - \lambda^2) - b_1\lambda\nu(\rho^2 - \lambda^2) - 2c\lambda\mu\nu\rho = 0.\end{aligned}\right.$$

En retranchant membre à membre ces équations, on obtient les suivantes :

$$(20) \qquad \frac{a_1\rho}{\lambda} - a = \frac{b_1\rho}{\mu} - b = \frac{c_1\rho}{\nu} - c,$$

qui permettent de poser, en profitant de l'homogénéité,

$$\frac{a_1\rho}{\lambda} - a = \frac{b_1\rho}{\mu} - b = \frac{c_1\rho}{\nu} - c = -\rho,$$

ou encore

$$(21)\qquad \lambda = \frac{a_1 \rho}{a-\rho}, \qquad \mu = \frac{b_1 \rho}{b-\rho}, \qquad \nu = \frac{c_1 \rho}{c-\rho}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'une quelconque des équations précédentes, conduisent à l'équation du quatrième degré

$$(22)\qquad \rho - a - b - c + \frac{a_1^2}{a-\rho} + \frac{b_1^2}{b-\rho} + \frac{c_1^2}{c-\rho} = 0,$$

qui fournit les quatre solutions véritables du problème.

La substitution des valeurs $-\infty$, a, b, c, $+\infty$ dans le premier membre montre que l'équation aura toujours ses quatre racines réelles.

68. La solution du problème précédent permet donc de ramener les formules qui définissent la corrélation à la forme plus simple

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= ax + b''y + b'z + ht, \\ v &= b''x + a'y + bz + h't, \\ w &= b'x + by + a''z + h''t, \\ p &= kx + k'y + k''z + lt. \end{aligned}\right.$$

Comme nous l'avons fait tout à l'heure, prenons pour axes coordonnés les axes principaux du cône représenté par l'équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0;$$

les formules se simplifieront encore et deviendront

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &u = ax + ht, \qquad v = by + h't, \qquad w = cz + h''t; \\ &p = kx + k'y + k''z + lt. \end{aligned}\right.$$

Déplaçons les axes parallèlement à eux-mêmes dans la figure lieu du point (x, y, z, t), c'est-à-dire faisons la substitution

$$x \mid x + x_0 t, \qquad y \mid y + y_0 t, \qquad z \mid z + z_0 t.$$

En prenant pour x_0, y_0, z_0 les valeurs suivantes :

$$x_0 = \frac{k-h}{a}, \qquad y_0 = \frac{k'-h'}{b}, \qquad z_0 = \frac{k''-h''}{c},$$

et posant

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = {} & ax^2 + by^2 + cz^2 + 2kxt + 2k'yt + 2k''zt \\ & + (l + kx_0 + k'y_0 + k''z_0)t^2, \end{aligned}$$

on ramènera les formules (24) à la forme cherchée

$$(25) \qquad u = \frac{1}{2}\varphi'_x, \quad v = \frac{1}{2}\varphi'_y, \quad w = \frac{1}{2}\varphi'_z, \quad p = \frac{1}{2}\varphi'_t.$$

Et, si l'on rapporte à son centre la quadrique obtenue en égalant φ à zéro, on sera conduit aux formules plus simples

$$(26) \qquad u = ax, \quad v = by, \quad w = cz, \quad p = \mathrm{H}t.$$

Il faut observer toutefois que la méthode tombe en défaut dès que l'une des quantités a, b, c est nulle. Supposons, par exemple, que c soit nulle : h'' ne pourra l'être, sans quoi w serait nulle ; k'' ne pourra être nulle non plus, et l'on pourra disposer de z_0 de manière à annuler le coefficient de t dans l'expression de p. Alors, les formules de transformation se réduiront à la forme

$$(27) \qquad u = ax + kt, \quad v = by + k't, \quad w = h''t, \quad p = kx + k'y + k''z,$$

ou, plus simplement,

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = h''t, \quad p = kz.$$

Si k est égal à h'', on pourra poser encore

$$(28) \qquad u = \frac{1}{2}\varphi'_x, \quad v = \frac{1}{2}\varphi'_y, \quad w = \frac{1}{2}\varphi'_z, \quad p = \frac{1}{2}\varphi'_t,$$

en prenant

$$(29) \qquad \varphi = ax^2 + by^2 + 2kzt.$$

Mais si k n'est pas égal à h'', le problème sera impossible. On peut caractériser ce cas d'exception en disant qu'à tout point de l'infini dans la seconde figure, lieu du point (x, y, z), correspond, dans la première, un plan qui passe par un point déterminé de l'infini $(x = 0, y = 0, t = 0)$.

Si l'on remplaçait la figure lieu du point (x, y, z, t) par une figure homothétique, la solution du problème pourrait être obtenue.

69. Il existe certaines transformations corrélatives considérées pour la première fois par Möbius, dans lesquelles le plan correspondant à un point passe par ce point. On les rencontre en Cinématique et en Statique. Par exemple si, dans un déplacement infiniment petit, on envisage les droites normales au déplacement

d'un de leurs points, toutes celles de ces droites qui passent par un point engendrent un plan, et toutes celles qui sont dans un plan y passent par un point, le *foyer* du plan. La relation entre un plan et son foyer nous donne un premier exemple des transformations que nous voulons envisager.

De même, en Statique, si l'on considère un système de forces appliquées à différents points d'un corps solide, les droites par rapport auxquelles la somme des moments des forces est nulle donnent naissance à une transformation analogue.

Les transformations corrélatives auxquelles on est ainsi conduit sont celles pour lesquelles les formules générales prennent la forme plus simple

$$(30)\qquad \begin{cases} u = c'y - b'z + at, \\ v = a'z - c'x + bt, \\ w = b'x - a'y + ct, \\ p = -ax - by - cz \end{cases}$$

qui entraîne la relation caractéristique

$$(31)\qquad ux + vy + wz + pt = 0.$$

On peut déduire des remarques que nous avons faites, et il serait facile de démontrer directement, qu'en changeant les axes on peut les ramener à une forme dans laquelle c et c' seules ne seront pas nulles.

Adoptons cette hypothèse et appliquons notre méthode générale. Les équations (15) et (19), qui déterminent λ, μ, ν, ρ, deviendront ici

$$\mu\rho - \lambda\nu = 0, \qquad \nu\mu + \lambda\rho = 0, \qquad \rho^2 - \nu^2 = 0,$$
$$\lambda\mu(\rho^2 - \nu^2) = 0, \qquad \lambda\mu(\rho^2 + \nu^2) = 0.$$

Ces équations admettent la solution

$$\nu = 0, \qquad \rho = 0.$$

Nous aurons donc à soumettre la figure lieu du point (x, y, z) au changement d'axes défini par les formules

$$(32)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}x_1 + \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2}y_1 = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha, \\ y = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2}x_1 - \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}y_1 = x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha, \\ z = -z_1, \end{cases}$$

c'est-à-dire à prendre sa symétrique par rapport à une droite située dans le plan des xy et rencontrant Oz.

Les formules (30) qui définissent la transformation deviendront alors

$$u = c'(x_1 \sin\alpha - y_1 \cos\alpha), \qquad v = c'(-x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha),$$
$$w = ct_1, \qquad p = cz_1;$$

et si l'on pose

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = c'x_1^2 \sin\alpha - 2c'x_1y_1 \cos\alpha - c'y_1^2 \sin\alpha + 2czt,$$

elles prendront la forme requise

$$(33) \qquad u = \frac{1}{2}\varphi'_x, \qquad v = \frac{1}{2}\varphi'_y, \qquad w = \frac{1}{2}\varphi'_z, \qquad p = \frac{1}{2}\varphi'_t.$$

Les deux figures corrélatives selon la définition de Möbius seront devenues polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à un paraboloïde hyperbolique.

CHAPITRE VIII.

LES CONIQUES ET LES DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES.

Du rapport anharmonique dans la théorie des sections coniques. — Les coniques sont des courbes unicursales. — Relations entre leurs divers modes de représentation. — Intersection des coniques et des courbes de degré supérieur. — Théorème de Paul Serret. — Le rapport anharmonique des droites qui joignent un point variable d'une conique à quatre points fixes de cette courbe est constant. — Réciproque. — Théorèmes corrélatifs. — Définitions diverses du rapport anharmonique de quatre points pris sur une conique. — Faisceaux et divisions homographiques. — Théorème fondamental sur le lieu du point d'intersection de deux rayons homologues ou sur l'enveloppe de la droite qui joint deux points homologues. — Théorème de Pascal. — Théorèmes de Newton et de Maclaurin. — Démonstration nouvelle du théorème de Pascal. — Théorèmes de Desargues et de Sturm. — Premières notions sur l'involution. — Différentes manières de la définir. — Application du théorème de Desargues à la construction d'une conique déterminée par cinq points. — Les divisions homographiques sur une conique. — Comment elles conduisent à des solutions élégantes pour les principaux problèmes relatifs aux divisions et aux faisceaux homographiques. — Etude du problème dans lequel il s'agit de construire un polygone dont les sommets soient sur une conique donnée et dont les côtés passent par des points donnés ou soient tangents à des coniques inscrites dans la proposée. — Applications nouvelles du théorème de Paul Serret. — Si deux triangles jouissent de l'une des propriétés suivantes : être conjugués par rapport à une conique, être circonscrits ou inscrits à une même conique, ils possèdent les deux autres. — Corollaires. — On ne peut, en général, inscrire à une conique un triangle circonscrit à une autre conique, et quand le problème est possible, il a une infinité de solutions. — Conditions de possibilité dans le cas de deux cercles. — Étant données deux coniques, il existe en général quatre coniques par rapport auxquelles elles sont polaires réciproques l'une de l'autre.

70. Avant d'aborder toute étude générale et, en particulier, celle des relations métriques, nous allons montrer comment le rapport anharmonique joue un rôle fondamental dans la théorie des courbes du second degré. Nous commencerons par la propriété suivante :

Les coniques sont des courbes unicursales; c'est-à-dire qu'on peut exprimer les coordonnées d'un quelconque de leurs points

en fonction rationnelle d'un paramètre. Pour le démontrer, rapportons une conique quelconque à un triangle de référence ayant un de ses sommets sur la conique. L'équation de cette courbe sera alors de la forme

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

et elle passera par le sommet défini par les équations

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Toute droite passant par ce point a une équation de la forme

$$y = \lambda x,$$

où λ désigne un paramètre variable. Pour trouver son intersection avec la conique, il faudra remplacer, dans l'équation (1), y par λx, ce qui donnera

$$x[Ax + A'\lambda^2 x + 2(B\lambda + B')z + 2B''\lambda x] = 0.$$

La solution

$$x = 0$$

correspond au sommet du triangle. En égalant à zéro le second facteur, on obtiendra le point variable où la droite coupe la conique. On a ainsi

$$z = -x\frac{A'\lambda^2 + 2B''\lambda + A}{2(B\lambda + B')},$$

ce qui permettra de prendre

$$\begin{aligned} x &= -2B\lambda - 2B', \\ y &= -2B\lambda^2 - 2B'\lambda, \\ z &= A'\lambda^2 + 2B''\lambda + A. \end{aligned}$$

En remplaçant λ par $\frac{t}{u}$ et rendant homogène, on a des expressions de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= at^2 + btu + cu^2, \\ y &= a't^2 + b'tu + c'u^2, \\ z &= a''t^2 + 2b''tu + c''u^2, \end{aligned} \right.$$

et, réciproquement, il est évident que toutes les formules de ce

genre dans lesquelles le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul représentent une conique.

Une conique peut être représentée d'une infinité de manières par des formules telles que les précédentes (2). Il est aisé d'établir la relation entre tous les systèmes que l'on peut obtenir. Considérons, en effet, deux droites représentées par les équations

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0,$$

et se coupant en un même point P de la conique. Si l'on substitue, dans les polynomes α et β, les valeurs (2) de x, y, z, on obtiendra évidemment des résultats de la forme

$$\alpha = (tu_1 - ut_1)(At + Bu), \qquad \beta = (tu_1 - ut_1)(Ct + Du),$$

$\frac{t_1}{u_1}$ étant la valeur de $\frac{t}{u}$ qui correspond au point P. On aura donc

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{Ct + Du}{At + Bu}.$$

Avec tout autre système de formules de la forme (2), on trouverait de même

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{C't' + D'u'}{A't' + B'u'}.$$

On aura donc nécessairement

$$\frac{Ct + Du}{At + Bu} = \frac{C't' + D'u'}{A't' + B'u'},$$

ce qui donne

$$\frac{t}{u} = \frac{A_1 t' + B_1 u'}{C_1 t' + D_1 u'}.$$

Ainsi on passera d'un système de formules à tout autre par une simple substitution linéaire faite sur t et u.

71. La propriété précédente des coniques permet de démontrer, sans employer le théorème de Bézout, que toute conique coupe en $2p$ points au plus une courbe de degré p. Car si l'on substitue

dans l'équation de cette courbe les expressions (2) de x, y, z, on obtient bien une équation de degré $2p$ en $\frac{t}{u}$.

Nous pouvons aussi démontrer de la même manière une proposition élégante et peu connue de *Paul Serret*. Cet habile géomètre a établi dans sa *Géométrie de Direction* que, si l'on prend sur une conique six points de coordonnées x_i, y_i, z_i, on peut attribuer à chaque point (x_i, y_i, z_i) un coefficient λ_i tel que $\varphi(x, y, z)$ désignant un polynome homogène *quelconque* du second degré, on ait

$$\sum_i \lambda_i \varphi(x_i, y_i, z_i) = 0. \tag{3}$$

Faisons, en effet, $u = 1$ dans les formules et soit t_i la valeur de t qui correspond au point (x_i, y_i, z_i). Si l'on pose

$$f(t) = (t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_6),$$

on sait que la somme

$$\sum \frac{\varphi(t_i)}{f'(t_i)},$$

où $\varphi(t)$ est un polynome du quatrième degré au plus, est égale à zéro. Or, si l'on substitue dans $\varphi(x, y, z)$ les valeurs de x_i, y_i, z_i, on obtient un polynome du quatrième degré au plus. On a donc

$$\sum \frac{\varphi(x_i, y_i, z_i)}{f'(t_i)} = 0, \tag{3'}$$

ce qui donne le théorème de Paul Serret et fournit une expression élégante de ses coefficients λ_i.

72. Nous allons voir comment le théorème conduit, sans autre postulat, à l'équation générale des coniques passant par quatre points. Soient S et T deux polynomes tels que $\varphi(x, y, z)$, s'annulant pour les quatre premiers points d'indices 1, 2, 3, 4. En leur appliquant la relation (3) on aura

$$\lambda_5 S_5 + \lambda_6 S_6 = 0, \qquad \lambda_5 T_5 + \lambda_6 T_6 = 0,$$

d'où

$$\frac{S_5}{T_5} = \frac{S_6}{T_6}.$$

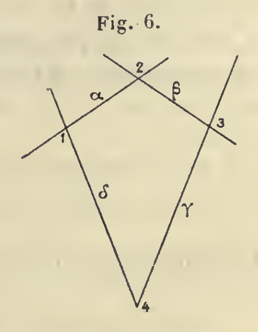
Cette équation, qui s'applique à tout point (6) quand le point (5) est donné, nous montre bien que l'équation générale des coniques passant par les quatre points est

$$S - kT = 0.$$

Ce résultat a été établi pour la première fois par *Lamé* dans un Opuscule célèbre publié en 1818 ([1]).

D'après cela, si l'on prend deux systèmes de droites passant par les quatre points 1, 2, 3, 4 (*fig.* 6), on voit que l'équation de toute

Fig. 6.



conique passant par ces quatre points pourra s'écrire

$$\alpha\gamma = \beta\delta.$$

De là se déduit la propriéte fondamentale des coniques, relative au rapport anharmonique.

Les équations

$$\alpha = \lambda\beta, \qquad \delta = \lambda\gamma$$

représentent évidemment deux droites qui se coupent en un même point M de la conique. Quand λ varie, la première équation représente un faisceau de droites ayant pour sommet le point 2; la seconde, un faisceau de droites ayant pour sommet le point 4. Comme les rapports anharmoniques des quatre droites de chaque faisceau ne dépendent que des valeurs de λ, nous obtenons le résultat suivant : le rapport anharmonique des quatre droites qui joignent le point 2 à quatre points de la conique est égal au rapport anharmonique des quatre droites qui joignent le point 4 à ces mêmes points.

([1]) LAMÉ (G.), *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*. Paris, 1818.

Considérant les quatre points comme fixes et les points 2 et 4 comme variables, nous sommes conduits au théorème fondamental suivant :

Étant donnés quatre points A, B, C, D *sur une conique, le rapport anharmonique des droites* MA, MB, MC, MD *qui joignent un point* M *quelconque de la conique à ces quatre points est un nombre constant.*

La réciproque est aisée à démontrer.

Soient $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_4, y_4, z_4$ les coordonnées des quatre points A, B, C, D; x, y, z celles du point M. L'équation de l'une quelconque des droites MA, MB, MC, MD sera

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = 0.$$

Pour avoir le rapport anharmonique de ces quatre droites, supposons que l'on ait

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \neq 0$$

et prenons le rapport anharmonique des quatre points où elles coupent la droite

$$X = 0.$$

Introduisant cette hypothèse dans l'équation (4), on aura

$$\frac{Y}{Z} = \frac{xy_i - yx_i}{xz_i - zx_i}.$$

Le rapport anharmonique des quatre droites sera celui de ces quatre valeurs de $\frac{Y}{Z}$, rapport qui, après quelques réductions, prend la forme

$$\frac{\begin{vmatrix} x & x_1 & x_3 \\ y & y_1 & y_3 \\ z & z_1 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & x_2 & x_4 \\ y & y_2 & y_4 \\ z & z_2 & z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x_1 & x_4 \\ y & y_1 & y_4 \\ z & z_1 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ z & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

En l'égalant à une constante, on a bien l'équation d'une conique.

C. Q. F. D.

L'expression que nous venons de donner pour le rapport anharmonique nous permet d'indiquer quelle est sa valeur quand on introduit les paramètres t figurant dans les formules (2) où l'on aura fait $u = 1$. Un des déterminants qui entrent dans l'expression précédente, le premier par exemple, devient égal à

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} (t - t_1)(t - t_3)(t_1 - t_3),$$

t, t_1, t_3 étant les valeurs du paramètre pour les points M, A, C. En appliquant la même expression aux trois déterminants, on trouve que le rapport anharmonique des quatre droites MA, MB, MC, MD est égal à celui des paramètres relatifs aux quatre points.

73. En coordonnées tangentielles, les mêmes calculs nous donneront les théorèmes suivants.

Une tangente variable à une courbe de seconde classe intercepte sur quatre tangentes fixes quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

Si une droite se meut de manière à couper quatre droites fixes en quatre points dont le rapport anharmonique soit constant, elle enveloppe une courbe de seconde classe tangente aux quatre droites.

Et il ne reste plus qu'à montrer qu'une courbe de seconde classe est aussi du second degré, ce qui appartient aux éléments, mais la démonstration suivante ajoutera quelque chose à ce que nous savons.

Comme une courbe du second degré et, pour les mêmes raisons, une courbe de seconde classe peut être représentée par les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} u = a\lambda^2 + 2b\lambda + c, \\ v = a'\lambda^2 + 2b'\lambda + c', \\ w = a''\lambda^2 + 2b''\lambda + c'', \end{cases}$$

où λ désigne un paramètre variable et qui sont analogues aux équations (2). Le point de contact de la droite qui correspond à une valeur de λ avec son enveloppe sera défini par les relations

$$ux + vy + wz = 0, \qquad x\,du + y\,dv + z\,dw = 0$$

qui nous conduisent aux expressions suivantes de x, y, z :

$$(6) \quad \begin{cases} x = (b'\lambda + c')(a''\lambda + b'') - (b''\lambda + c'')(a'\lambda + b'), \\ y = (b''\lambda + c'')(a\lambda + b) - (b\lambda + c)(a''\lambda + b''), \\ z = (b\lambda + c)(a'\lambda + b') - (b'\lambda + c')(a\lambda + b). \end{cases}$$

Ces valeurs, qui sont du second degré en λ, définissent bien une courbe du second degré. La démonstration prouve en outre qu'on peut employer le même paramètre λ dans les deux systèmes de formules relatives aux coordonnées ponctuelles et aux coordonnées tangentielles.

Il résulte de ce qui précède qu'on peut définir nettement le rapport anharmonique de quatre points sur une conique. C'est : ou bien le rapport anharmonique des quatre droites qui joignent ces points à un point variable de la conique, ou bien le rapport anharmonique des quatre points où une tangente variable de la conique coupe les tangentes en ces quatre points à la conique, ou enfin le rapport anharmonique des quatre valeurs du paramètre λ qui figure dans les formules (5) ou (6).

74. Les démonstrations précédentes nous conduisent naturellement à introduire une notion dont on fait grand usage en Géométrie, celle des faisceaux et des divisions homographiques.

D'une manière générale, nous dirons que les deux faisceaux (ponctuels ou tangentiels) définis par les équations

$$(7) \qquad \alpha = \lambda\beta, \qquad \delta = \lambda'\gamma$$

sont homographiques quand λ et λ' sont liés par la relation

$$(8) \qquad A\lambda\lambda' + B\lambda + C\lambda' + D = 0,$$

où A, B, C, D désignent des constantes quelconques. Nous avons déjà rencontré le cas où la relation précédente se réduit à $\lambda = \lambda'$.

Si l'on élimine λ, λ' entre les trois équations (7), (8), on est conduit à une relation du second degré. Donc

Le point d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques de droites décrit une conique passant par les sommets des deux faisceaux.

La droite de jonction des points correspondants de deux divisions homographiques sur deux droites décrit une conique tangente à ces deux droites.

Cette conique se décompose dans les deux cas suivants :

1° *Si*, O, O′ *étant les centres des deux faisceaux*, OO′ *correspond à* O′O. *Alors le point d'intersection de deux rayons correspondants décrit une droite.*

2° *Si l'homographie est telle que la relation* (8) *se décompose en deux facteurs*

1° *Si* A, *point d'intersection des deux droites, se correspond à lui-même dans les deux divisions. Alors la droite de jonction de deux points correspondants va passer par un point fixe.*

2° *Si l'homographie est telle que la relation* (8) *se décompose en deux facteurs*

$$(A\lambda + C)(A\lambda' + B) = 0.$$

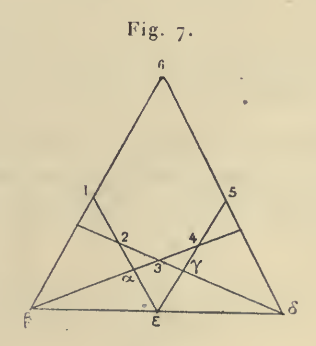
Alors la conique se réduit à deux droites passant respectivement par O *et* O′.

Alors la conique se réduit à deux points situés respectivement sur les deux droites.

75. Les propositions précédentes sont fondamentales dans la théorie des coniques. On en déduit d'abord le théorème de Pascal.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6 (*fig.* 7) six points d'une conique. Met-

Fig. 7.



tons à part les points 1 et 5. Les deux faisceaux qui ont ces points pour sommets

$$1\,(2346),\quad 5\,(2346)$$

donnent quatre droites ayant le même rapport anharmonique.

Les droites du premier faisceau coupent la droite 34 aux points α, 3, 4, β; celles du second faisceau coupent la droite 23 aux points 2, 3, γ, δ. Puisque les divisions homographiques sur deux droites différentes $\alpha 34 \beta$ et $23\gamma\delta$ ont en commun le point d'inter-

section 3 de ces deux droites, les droites 2α, 4γ et $\beta\delta$ sont concourantes, ce qui est le théorème de Pascal.

Dans la figure précédente considérons le triangle $\beta 6 \delta$. Quand le point 6 décrira la conique, ce triangle aura ses côtés qui passeront par trois points fixes 1, ε, 5. Deux de ses sommets β, δ décriront deux droites fixes, 34 et 23 respectivement. Ces conditions suffisent à définir le mouvement du triangle. On a donc le théorème suivant de Newton et de Mac Laurin :

Quand les côtés d'un triangle passent par trois points fixes, tandis que deux de ses sommets décrivent des droites fixes, le sommet libre décrit une conique.

Mais la théorie des faisceaux homographiques nous conduit à un théorème bien plus général, qui a été aussi donné par Mac Laurin :

Considérons un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ *dont tous les côtés passent par des points fixes,* $A_1 A_2$ *par* a_1, $A_2 A_3$ *par* a_2, *et ainsi de suite,* $A_n A_1$ *par* a_n. *Si les* $n-1$ *sommets* A_1, A_2, ..., A_{n-1} *décrivent des droites fixes, le sommet libre décrira une conique.*

Cela résulte immédiatement de ce que les faisceaux formés par les différents côtés sont homographiques les uns aux autres.

76. Nous avons donné plus haut une démonstration du théorème de Pascal. En voici une très simple, qui est peut-être nouvelle :

Considérons (*fig.* 8) l'hexagone inscrit et soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

Fig. 8.

les équations des côtés 12, 23, 34, 45, 56, 61 respectivement. Soit en outre

$$\delta = 0$$

l'équation de la diagonale 36. La conique étant circonscrite au quadrilatère 1236, son équation pourra s'écrire

$$\alpha\delta + \beta\gamma' = 0. \tag{9}$$

Elle est circonscrite de même au quadrilatère 3645. Son équation pourra donc aussi s'écrire

$$\alpha'\delta + \beta'\gamma = 0. \tag{10}$$

Les deux équations (9) et (10) représentant la même courbe, on peut admettre qu'elles ont été écrites de manière que leurs premiers membres soient identiques. On aura donc

$$\alpha\delta + \beta\gamma' = \alpha'\delta + \gamma\beta'$$

ou encore

$$\delta(\alpha - \alpha') = \gamma\beta' - \beta\gamma'.$$

Les deux équations

$$\delta(\alpha - \alpha') = 0, \qquad \gamma\beta' - \beta\gamma' = 0$$

représenteront donc la même courbe. Comme la première se réduit à un couple de droites, il faut qu'il en soit de même de la seconde. Or celle-ci contient les quatre points définis par les équations

$$\gamma = 0, \quad \beta = 0; \qquad \gamma' = 0, \quad \beta' = 0; \qquad \gamma = 0, \quad \gamma' = 0; \qquad \beta = 0, \quad \beta' = 0.$$

Les deux premiers sont évidemment sur la droite

$$\delta = 0.$$

Il faut donc que les deux autres soient sur la droite

$$\alpha - \alpha' = 0,$$

qui se trouve ainsi contenir les points de concours des côtés opposés de l'hexagone. C'est le théorème de Pascal.

77. Une autre proposition fort importante, le théorème de Desargues, généralisé et complété par Sturm, permet d'établir une relation entre six points d'une conique. Mais, avant de l'exposer, il faut que nous donnions quelques notions sur l'involution.

La relation homographique la plus générale, celle qui relie deux éléments tels qu'à une valeur de l'un d'eux corresponde une seule valeur de l'autre est nécessairement de la forme

$$A\lambda\lambda' + B\lambda + C\lambda' + D = 0. \tag{11}$$

Généralement, cette relation change quand on permute λ et λ'. Mais, si l'on a $B = C$, elle est symétrique relativement aux deux variables λ, λ'; nous dirons qu'alors *elles sont en involution.*

Dans toute relation homographique, il y a lieu de considérer les éléments doubles. Ils sont donnés par l'équation

$$A\lambda^2 + (B + C)\lambda + D = 0$$

obtenue en faisant $\lambda = \lambda'$ dans la relation (11). Ces éléments sont généralement distincts. Désignons-les par α, β. Si λ, λ'; λ_0, λ'_0 désignent deux couples d'éléments correspondants, on aura évidemment

$$\mathcal{R}(\lambda, \lambda_0, \alpha, \beta) = \mathcal{R}(\lambda', \lambda'_0, \alpha, \beta)$$

et, par conséquent, la relation homographique pourra prendre la forme canonique

$$\frac{\lambda - \beta}{\lambda - \alpha} = h\frac{\lambda' - \beta}{\lambda' - \alpha}. \tag{12}$$

Ainsi le rapport anharmonique

$$\mathcal{R}(\lambda, \lambda', \alpha, \beta)$$

est un nombre constant.

Si l'homographie devient une involution, ce nombre constant, ne devant pas changer quand on échangera λ et λ', sera nécessairement égal à -1. Ainsi, *deux éléments en involution sont ceux qui divisent harmoniquement un couple donné d'éléments* α, β.

Dans le cas où $\alpha = \beta$, la relation involutive prend la forme

$$(\lambda - \alpha)(\lambda' - \alpha) = 0.$$

Elle se décompose en facteurs. C'est bien là un cas limite de la division harmonique.

Quant à la relation homographique, on s'assurera aisément qu'elle prend la forme

$$\frac{1}{\lambda - \alpha} = \frac{1}{\lambda' - \alpha} + h. \tag{13}$$

78. Une relation homographique est déterminée quand on connaît trois couples d'éléments correspondants a, a'; b, b'; c, c'; et cela se comprend puisque alors la relation entre deux éléments

correspondants quelconques m, m' est déterminée par la relation

$$\mathcal{R}(m, a, b, c) = \mathcal{R}(m', a', b', c').$$

Mais il suffit de deux couples d'éléments correspondants pour déterminer une involution. La condition pour que trois couples α, α'; β, β'; γ, γ' soient, comme on dit, en involution, c'est que l'on ait

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} \alpha\alpha' & \alpha+\alpha' & 1 \\ \beta\beta' & \beta+\beta' & 1 \\ \gamma\gamma' & \gamma+\gamma' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation se transforme d'un grand nombre de manières. En multipliant le déterminant précédent par le suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 1 & -y & y^2 \\ 1 & -z & z^2 \end{vmatrix}$$

qui n'est pas nul tant que x, y, z sont différents, on trouve

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} (\alpha-x)(\alpha'-x) & (\alpha-y)(\alpha'-y) & (\alpha-z)(\alpha'-z) \\ (\beta-x)(\beta'-x) & (\beta-y)(\beta'-y) & (\beta-z)(\beta'-z) \\ (\gamma-x)(\gamma'-x) & (\gamma-y)(\gamma'-y) & (\gamma-z)(\gamma'-z) \end{vmatrix} = 0.$$

Donnons d'abord à x, y, z des valeurs choisies parmi les trois couples, par exemple α', β', γ'. Il viendra, après la suppression de $\zeta(\alpha', \beta', \gamma')$ [1], la relation

$$(16)\qquad (\alpha-\beta')(\beta-\gamma')(\gamma-\alpha') = (\beta-\alpha')(\gamma-\beta')(\alpha-\gamma'),$$

équation que l'on obtiendrait aussi en écrivant l'égalité des deux rapports

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \alpha', \gamma'), \qquad \mathcal{R}(\alpha', \beta', \alpha, \gamma).$$

En échangeant dans la formule (16) quelques-uns des éléments α et α', β et β', γ et γ', on obtiendra quatre relations de même forme. La remarque suivante a plus d'intérêt. Dans la relation (15) faisons $x=\alpha$, $y=\alpha'$; elle prendra la forme

$$(17)\qquad \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta')}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma')} = \frac{(\alpha'-\beta)(\alpha'-\beta')}{(\alpha'-\gamma)(\alpha'-\gamma')}.$$

---

[1] La fonction $\zeta(u, v, w)$ a déjà été employée plus haut (Chapitre III).

que l'on obtiendrait aussi en écrivant l'égalité des deux rapports anharmoniques

$$\mathcal{R}(\alpha, \alpha', \beta, \gamma), \qquad \mathcal{R}(\alpha', \alpha, \beta', \gamma').$$

Ainsi, *lorsqu'on a deux couples de l'involution*, (β, β') *et* (γ, γ'), *tout autre couple est déterminé par l'équation*

$$(x-\beta)(x-\beta')-k(x-\gamma)(x-\gamma')=0, \tag{18}$$

où k *est un paramètre variable.*

On peut prendre cette dernière propriété comme une définition de l'involution et dire que l'équation

$$ax^2+2bx+c+\lambda(\alpha'x^2+2b'x+c')=0, \tag{19}$$

où λ est une variable, définit tous les couples appartenant à une involution qui est déterminée, par exemple, par les deux couples fixes

$$ax^2+2bx+c=0, \qquad a'x^2+2b'x+c'=0.$$

Nous dirons que des points sont en involution sur une droite, que des droites passant par un point sont en involution, quand les éléments qui les déterminent forment une involution.

Desargues, qui, le premier, a défini et étudié l'involution, a fait connaître le théorème suivant :

Une transversale quelconque coupe les côtés opposés d'un quadrilatère et ses diagonales suivant trois couples de points qui forment une involution.

Les couples de côtés opposés d'un quadrilatère et les deux diagonales peuvent être considérés comme des coniques passant par les quatre mêmes points, les sommets du quadrilatère. Par conséquent, le théorème de Desargues peut être considéré comme un cas particulier du suivant, qui a été donné par *Sturm :*

Les coniques passant par quatre points ou, plus généralement, appartenant à un faisceau ponctuel, sont coupées par une droite quelconque suivant des segments qui forment une involution.

Les remarques précédentes nous permettent de donner une démonstration presque immédiate de cette importante proposition.

Soit, en effet,

$$(20) \qquad S + \lambda T = 0$$

l'équation du faisceau de coniques considéré. On les coupe par une droite quelconque. On peut évidemment supposer que l'on a choisi le triangle de référence de telle manière que l'équation de cette droite soit

$$z = 0.$$

Si l'on introduit cette hypothèse dans l'équation (20), on voit que les points d'intersection des coniques du faisceau avec la transversale considérée sont déterminés par une équation de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \lambda(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2) = 0$$

qui, d'après les remarques faites plus haut, met en évidence le théorème à démontrer.

Il est clair que, si une conique du faisceau devient tangente à la transversale, le point de contact devient un point double de l'involution. Ainsi

Il y a, dans tout faisceau ponctuel, deux coniques qui sont tangentes à une droite quelconque. Les points de contact de ces coniques sont les points doubles de l'involution déterminée sur la droite par les coniques du faisceau.

En interprétant autrement les équations, ou en transformant par polaires réciproques, on obtient le théorème suivant :

Si l'on mène d'un point des tangentes à toutes les coniques d'un faisceau tangentiel, les couples de tangentes ainsi obtenus engendrent une involution dont les rayons doubles sont les tangentes aux deux coniques du faisceau qui passent par le point considéré.

Un faisceau tangentiel est formé généralement des coniques inscrites dans un quadrilatère.

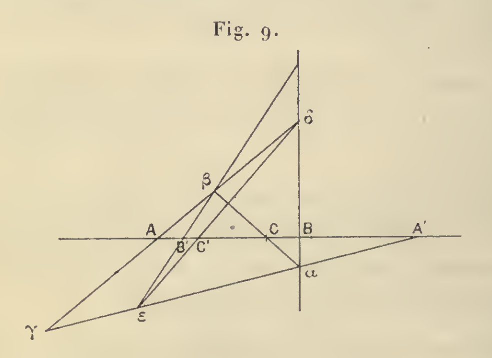
Si, par exemple, deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit sont les deux points I et J, les autres couples de sommets opposés sont les foyers des coniques du faisceau. Ces coniques sont homofocales; celles d'entre elles qui passent par un point M

y ont pour tangentes deux droites qui divisent harmoniquement l'angle IMJ et sont, par conséquent, rectangulaires. De plus, les tangentes menées de M à l'une quelconque des coniques homofocales déterminent une involution dont les rayons doubles sont les tangentes en M ; elles sont donc placées symétriquement par rapport à ces tangentes. Nous retrouvons ainsi un théorème bien connu.

79. Desargues a fait usage de son théorème pour construire avec la règle le sixième point d'une involution quand on connaît les cinq autres.

Soient, en effet, sur une droite deux couples AA', BB' déterminant une involution et proposons-nous de trouver le point C' qui correspond à un point C dans cette involution (*fig.* 9). Par A, A', C

Fig. 9.



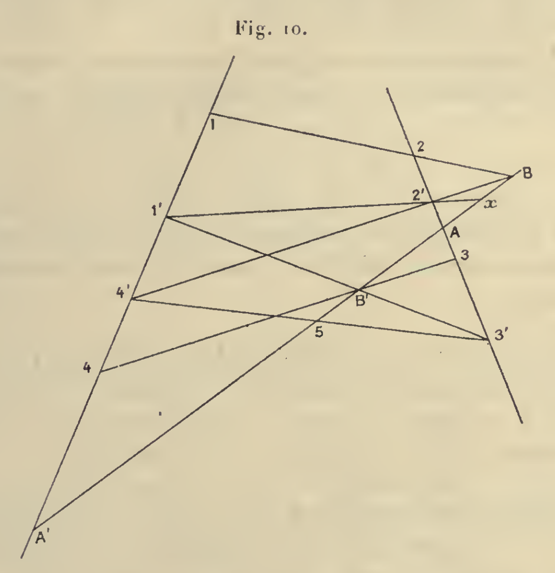
on mènera arbitrairement trois droites formant un triangle $\alpha\beta\gamma$. On joindra $B\alpha$, $B'\beta$ et l'on formera ainsi un quadrilatère $\beta\delta\alpha\varepsilon$ dont les côtés opposés couperont la transversale suivant les couples AA', BB' et dont une diagonale passera par C. Pour avoir l'homologue C' de C, il suffira donc de mener la seconde diagonale $\delta\varepsilon$.

Cette construction permet évidemment de suppléer au théorème de Pascal et de construire avec la règle la conique déterminée par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5.

Considérons en effet la conique définie par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 (*fig.* 10). Appliquons la construction précédente. Une droite $5x$ menée arbitrairement par le point 5 coupe les côtés opposés du quadrilatère 1, 2, 3, 4 suivant deux segments AA', BB' qui déterminent une involution dans laquelle le point cherché x de

la conique est l'homologue du point 5. Les trois droites 14, 23 et une droite arbitraire fixe $3'4'$ menée par le point 5 jouent le rôle des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ de la construction précédente. On joindra $4'B$, $3'B'$, ce qui déterminera les points $1'$, $2'$. Le quadrilatère $1'2'3'4'$ sera tel que deux de ses côtés opposés $1'4'$, $2'3'$ détermineront sur la transversale le segment AA', que ses diago-

Fig. 10.



nales $1'3'$ et $2'4'$ détermineront sur la même transversale le segment BB' et, enfin, que l'un de ses côtés $3'4'$ ira passer par le point 5. Donc l'autre côté $1'2'$ ira couper la transversale au point cherché.

Cette construction nous donne le point x comme le sommet de deux triangles variables $B2'x$ ou $x1'B'$. Prenons le second, par exemple. Deux de ses côtés passent par des points fixes : $1'B'$, qui passe par $3'$, et xB', qui passe par le point 5 ; deux de ses sommets décrivent des droites : $1'$ décrit la droite 14 et B' décrit la droite 34 ; mais le côté $1'2'$ ne passe pas généralement par un point fixe ; car, $1'$ et $2'$ étant en relation homographique, la droite $1'2'$ enveloppe une conique tangente aux droites 14 et 23. Cette construction est donc toute différente de celle de Newton et de Mac Laurin. Mais *elle la comprend comme cas particulier* et elle la donne immédiatement si l'on suppose que la transversale

fixe $3'4'$, assujettie à passer par le point 5, va passer aussi par le point 3.

80. Dans ce qui précède, nous avons envisagé les relations homographiques entre les points d'une droite ou entre les droites d'un faisceau. On peut aussi considérer les divisions homographiques sur une conique.

λ étant le paramètre dont dépend la position de chaque point de la conique conformément aux formules données plus haut, la relation

$$A\lambda\lambda' + B\lambda + C\lambda' + D = 0 \tag{20}$$

définira la relation homographique la plus générale entre deux points d'une conique. Voici les propriétés essentielles relatives à cette relation :

D'abord, *la corde qui réunira les deux points correspondants enveloppera une conique doublement tangente à la proposée si la relation n'est pas involutive. Si l'homographie se réduit à une involution, la corde passera par un point fixe.*

Pour le démontrer, supposons que l'on ait choisi le triangle de référence de telle manière que les équations qui définissent un point de la conique proposée soient de la forme simple

$$x = \lambda^2, \qquad y = \lambda, \qquad z = 1.$$

Alors l'équation de la conique sera

$$y^2 - xz = 0. \tag{21}$$

Les valeurs de λ qui déterminent les points de la conique situés sur la droite

$$ux + vy + wz = 0 \tag{22}$$

seront déterminées par l'équation

$$u\lambda^2 + v\lambda + w = 0, \tag{23}$$

en sorte que l'équation tangentielle de la conique proposée sera

$$v^2 - 4uw = 0. \tag{24}$$

Si l'on veut que la droite définie par l'équation (21) rencontre la conique en deux points qui se correspondent dans la relation homographique considérée, il faudra exprimer que les deux racines de l'équation (23) satisfont à la relation (20). On est ainsi conduit par un calcul facile à l'équation

$$(25)\qquad [2Aw-(B+C)v+2Du]^2=(B-C)^2(v^2-4uw),$$

qui représente, en coordonnées tangentielles, une conique doublement tangente à la proposée. Les points de contact sont évidemment les points doubles de la division homographique.

Si l'on a $B=C$, l'homographie devient une involution et la relation (25) se réduit au premier degré. La droite qui joint les points homologues va passer par un point fixe. Les tangentes menées de ce point à la conique la touchent aux points doubles de l'involution.

Revenons au cas où B est différent de C. Si l'on considère une conique doublement tangente à la proposée, son équation est de la forme

$$(A'w+B'v+C'u)^2=v^2-4uw.$$

En identifiant cette équation avec la précédente (25), on voit que toutes les tangentes à cette conique couperont la conique proposée en deux points liés par la relation homographique

$$A'\lambda\lambda'-B'(\lambda+\lambda')+C'\pm(\lambda-\lambda')=0.$$

Le double signe tient à ce que l'on peut intervertir les deux points d'intersection.

Voici une autre propriété fondamentale. Considérons deux divisions homographiques sur une conique. Si, prenant deux points fixes quelconques O, O' sur la conique, et deux points m, m' qui se correspondent dans les deux divisions, on mène les droites Om, $O'm'$, d'après la propriété fondamentale des coniques, les deux rayons Om, $O'm'$ engendreront deux faisceaux homographiques. Car le rapport anharmonique de quatre rayons du premier faisceau sera égal à celui des points m correspondants, qui est égal lui-même à celui des points homologues m' dans la division homographique et, par suite, égal à celui des quatre rayons $O'm'$. Or, prenons arbitrairement deux points n, n' qui se

correspondent dans les deux divisions, et plaçons le point O en n' et le point O' en n. Alors, dans les deux faisceaux de droites ayant pour sommets O et O', le rayon O'O et le rayon OO' seront correspondants; par suite, deux rayons homologues quelconques des deux faisceaux se couperont suivant une droite d. Cette droite est pleinement déterminée, car elle va couper la conique aux deux points doubles de la division homographique. Ainsi on a cet élégant théorème :

Étant données deux divisions homographiques sur une conique, et deux couples m, m'; n, n' *de points homologues dans cette division, les deux droites* mn' *et* nm' *se coupent sur une droite fixe qui va rencontrer la conique aux deux points doubles de l'homographie considérée.*

Ce théorème peut se déduire de celui de Pascal. Il peut aussi servir à le démontrer. Considérons, en effet, six points d'une conique 1, 2, 3, 4, 5, 6. On peut imaginer une homographie dans laquelle les points 1, 3, 5 ont respectivement pour homologues les points 4, 6, 2. Alors les droites 16 et 34, 12 et 45, 23 et 56 se coupent en trois points qui sont en ligne droite. C'est le théorème de Pascal. Et cette démonstration est moins artificielle que celle qui repose (n° 75) sur la considération de deux divisions homographiques.

Si l'on joint deux points fixes O, O' d'une conique à un point variable μ d'une droite fixe, les droites Oμ, O'μ coupent la conique en deux points variables m, m' qui sont en correspondance homographique sur la conique, le point O faisant partie de la seconde division et le point O' de la première. On obtient ainsi évidemment la relation homographique la plus générale entre deux points d'une même conique. Cela résulte du théorème précédent.

Pour obtenir les involutions les plus générales, il suffira de couper la conique par une droite tournant autour d'un point fixe.

81. Les propositions précédentes nous fournissent des constructions élégantes pour les principaux problèmes relatifs aux divisions homographiques.

Considérons d'abord les divisions homographiques sur une droite. Une telle division est déterminée quand on connaît trois

couples de points correspondants m, m'; n, n'; p, p'. Comment la construire? On tracera une conique quelconque, un cercle par exemple, et l'on prendra un point O sur ce cercle. Les droites Om, Om', On, On', Op, Op' couperont ce cercle en de nouveaux points M, M', N, N', P, P'. Et M, N, P correspondront à M', N', P' dans une division homographique tracée maintenant sur la conique. Les points d'intersection des droites MN' et NM', MP' et PM', NP' et PN' détermineront une droite qui permettra de résoudre tous les problèmes relatifs à l'homographie considérée. Par exemple, elle coupera la conique en deux points qui, projetés de O sur la droite, donneront les points doubles de l'homographie. Pour avoir l'homologue Q' d'un point Q de la conique, il faudra faire en sorte que MQ' et M'Q se coupent sur la droite précédente, puis projeter les deux points Q, Q' sur la droite lieu des points m, m', etc.

De même, si l'on veut construire deux faisceaux homographiques composés de droites passant par un point O, on fera passer une conique quelconque, un cercle par exemple, par le point O, et l'on sera ramené aux mêmes problèmes que précédemment.

Remarquons que, si l'on transforme par polaires réciproques le théorème sur lequel nous nous sommes appuyé, on sera conduit au suivant qui pourrait servir de base à de nouvelles constructions :

Étant donnés trois couples de points correspondants m, m'; n, n'; p, p' dans une division homographique tracée sur une conique, les droites qui joignent le point de concours des tangentes en m, n' et des tangentes en n, m'; des tangentes en n, p' et des tangentes en p, n'; des tangentes en p, m' et des tangentes en m, p' concourent en un même point où viennent concourir aussi les tangentes à la conique aux deux points doubles de la division homographique.

82. La théorie des correspondances homographiques sur une conique permet de résoudre avec élégance des problèmes qui, depuis longtemps, ont fait l'objet des études des géomètres.

Étant donnés une conique (C) *et n points fixes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, proposons-nous de trouver un polygone de n côtés inscrit dans la conique et dont les côtés passent respectivement par a_1, $a_2, \ldots, a_n$.*

Considérons un point quelconque M de la conique, la droite Ma_1 ira couper la conique en un point variable M_1 qui sera en correspondance involutive, c'est-à-dire homographique, avec M. Joignons M_1 à a_2, la droite M_1a_2 coupera la conique en un point M_2 qui sera évidemment en relation homographique avec M. En continuant de cette manière, c'est-à-dire en construisant la droite M_2a_3, qui coupera la conique en M_3, puis en joignant M_3 à a_4 et ainsi de suite, on finira par obtenir un point M_n qui sera en relation homographique avec M. Il n'y a aucune difficulté à définir cette correspondance homographique. A trois positions du point M correspondront trois positions du point M_n et les trois couples de points ainsi obtenus définiront la correspondance homographique entre M et M_n. Soient, par exemple, M', M'', M''' trois positions de M auxquelles correspondent trois positions M'_n, M''_n, M'''_n de M_n. Nous avons vu que les points doubles de la correspondance homographique seront à l'intersection de la conique avec la ligne droite sur laquelle se trouvent les intersections des trois couples de droites $M'M''_n$ et $M''M'_n$, $M''M'''_n$ et M''_nM''', $M'''M'_n$ et M'''_nM'. Toutes ces constructions pourront se faire sans même que la conique soit tracée. Si, par exemple, elle est déterminée par cinq points, l'emploi de la *règle seule* et du théorème de Pascal permettra de déterminer les trois couples de points correspondants $M'M'_n$, $M''M''_n$, $M'''M'''_n$. Seule, la détermination des points doubles exigera une construction quadratique, qui pourra se faire par l'emploi du théorème de Desargues.

Ces points établis, le problème que nous nous étions proposé se trouve résolu. Il suffira, pour que le polygone $MM_1\ldots$ se ferme, que le point M coïncide avec un des deux points doubles que nous venons de déterminer. Il y aura donc en général deux solutions, réelles ou imaginaires, du problème. Mais nous devons remarquer que la relation homographique entre M et M_n peut se réduire à la coïncidence. S'il en est ainsi, le polygone se fermera toujours et il y aura une infinité de solutions.

Ainsi, le problème posé a deux solutions, réelles ou imaginaires, ou bien, s'il en a plus de deux, il en a une infinité.

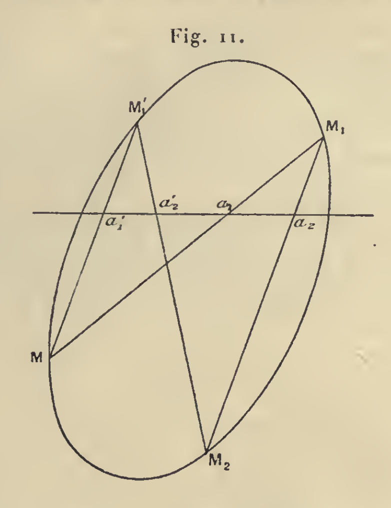
Considérons par exemple un triangle conjugué *abc*. Si les côtés d'un triangle variable ABC doivent passer par ces trois points, la théorie des polaires nous montre immédiatement que, lorsqu'on

prendra pour côté AB une droite quelconque passant par c, le triangle ABC se fermera toujours.

83. On peut donner une autre solution élégante du problème proposé. Elle repose sur la remarque suivante :

Si l'on joint le point M à a_1 puis le point M_1 à a_2, il y a (*fig.* 11)

Fig. 11.



entre M et M_2 une correspondance homographique; mais cette correspondance est si simple que nous pouvons la définir immédiatement. Ses points doubles, par exemple, sont, évidemment, à l'intersection de la conique avec la droite $a_1 a_2$.

D'après cela, joignons le point M à un point quelconque M'_1 de la conique. Les droites MM'_1, $M'_1 M_2$ coupent la droite $a_1 a_2$ en deux points a'_1, a'_2 dont l'un au moins, le premier ou le second, pourra être choisi arbitrairement. Il est aisé de voir que l'on pourra substituer a'_1, a'_2 à a_1, a_2. En effet, la correspondance définie par le premier couple a évidemment mêmes points doubles que celle qui est définie par le second. De plus, elle fait correspondre M à M_2. Or, une correspondance homographique est évidemment déterminée lorsqu'on donne ses points doubles et un couple de points correspondants. Notre proposition est donc établie.

Servons-nous en pour déplacer a_1, a_2 de telle manière que le point a_2 vienne se placer au point de concours α_3 de a_1, a_2 et de a_3, a_4; puis déplaçons de même les points a_3, a_4 de telle

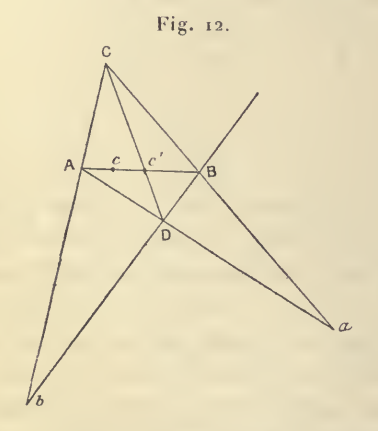
manière que a_3 vienne coïncider avec α_3. Alors le sommet M_3 viendra en M_1. On pourra supprimer α_3 et tout se passera comme si le polygone avait deux côtés de moins.

Si le polygone primitif est d'un nombre pair de côtés, la méthode précédente permettra de réduire les points à deux a_1, a_2. Alors la solution est évidente; la droite $a_1 a_2$ coupe la conique en deux points A, B et le polygone final est la droite double AB ou BA. Il y a donc deux solutions seulement, à moins que a_2 ne coïncide avec a_1, auquel cas il y en a une infinité.

Si l'on a un polygone d'un nombre impair de côtés, on pourra le réduire à un triangle dont les côtés AB, BC, CA devront passer par les points fixes c, a, b.

On pourra supposer qu'on ait fait glisser les points a et c sur la ligne qui les joint de manière que le point a soit sur la polaire de b (*fig.* 12). Alors, si l'on joint Bb, Aa, ces deux droites se couperont

Fig. 12.



en un point D de la conique, et le point c' d'intersection de AB et de CD sera le pôle de ab. Ce point est donc connu, et le côté AB est déterminé, en général, par les deux points c, c'.

La méthode que nous venons de suivre conduit à des corollaires évidents. Par exemple, prenons un polygone inscrit d'un nombre pair $2n$ de côtés et coupons-le par une droite. On peut établir que, sans cesser d'être inscrit, il peut se déformer de manière que ses côtés pivotent autour de leurs points d'intersection primitifs avec la droite considérée. En effet, dans ce cas, nous pouvons considérer que nous avons trois polygones satisfaisant aux conditions posées :

d'abord le polygone proposé, puis le polygone aplati dont les sommets de rang pair sont confondus avec un des points où la droite coupe la conique et les sommets de rang impair avec le second de ces points. Puisque nous avons trois solutions du problème, il y en aura une infinité.

84. La méthode que nous avons suivie s'appliquerait aussi au problème suivant : *Inscrire dans une conique* (C) *un polygone dont tous les côtés soient tangents à des coniques qui soient elles-mêmes doublement tangentes à* (C). Car, si l'on considère un côté PQ de ce polygone, la condition à laquelle ce côté doit satisfaire d'être tangent à une conique doublement tangente à (C), c'est-à-dire de couper cette conique en deux points P, Q qui soient en relation homographique, peut se remplacer par la suivante : on peut adjoindre aux deux points P et Q un point P′ de la conique tel que les droites PP′, P′Q aillent passer par deux points fixes situés sur la ligne droite qui joint les points doubles de la division homographique. Et alors le problème à résoudre est ramené à celui que nous avons étudié dans le cas où le nombre des côtés du polygone à inscrire est pair.

Comme conséquence de ces méthodes, le lecteur démontrera aisément le théorème suivant :

Quand un polygone inscrit dans une conique (C) *se meut de telle manière que tous ses côtés moins un soient tangents à des coniques doublement tangentes à* (C), *ou passent par des points fixes, le côté laissé libre enveloppera une ou plusieurs coniques inscrites de même dans* (C), *ou passera par un point fixe.*

85. Nous allons indiquer maintenant quelques conséquences intéressantes du théorème de Paul Serret.

Nous avons vu que, si x_i, y_i, z_i désignent les coordonnées homogènes de six points sur une conique, on peut écrire l'identité

$$\sum_1^6 \lambda_i \varphi(x_i, y_i, z_i) = 0, \tag{26}$$

$\varphi(x, y, z)$ étant une fonction homogène arbitraire du second degré et les λ_i étant des coefficients, analogues à des masses,

affectés aux différents points de la conique. Prenons pour la fonction $\varphi(x, y, z)$ le carré d'une fonction linéaire

$$\varphi(x, y, z) = (ux + vy + wz)^2.$$

L'identité précédente pourra s'écrire

$$(27) \qquad \sum_1^3 \lambda_i (ux_i + vy_i + wz_i)^2 = -\sum_4^6 \lambda_i (ux_i + vy_i + wz_i)^2.$$

Il suit de là que les deux équations

$$(28) \qquad \sum_1^3 \lambda_i (ux_i + vy_i + wz_i)^2 = 0,$$

$$(29) \qquad \sum_4^6 \lambda_i (ux_i + vy_i + wz_i)^2 = 0$$

représentent, en coordonnées tangentielles, une seule et même conique; et, comme cette conique est conjuguée à la fois par rapport aux triangles formés respectivement par les points 1, 2, 3 et par les points 4, 5, 6, on peut énoncer le théorème suivant :

Si l'on partage d'une manière quelconque six points d'une conique en deux groupes de trois points, on obtient deux triangles qui sont conjugués par rapport à une même conique.

Cela constitue bien un théorème, car la condition pour que deux groupes de trois points donnent deux triangles conjugués se traduit par six équations.

Réciproquement, *si deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, leurs six sommets appartiennent à une autre conique.*

Pour le montrer, il suffit de reprendre en sens inverse les raisonnements précédents. La conique par rapport à laquelle les deux triangles sont conjugués pouvant être représentée par l'une ou l'autre des équations (28), (29), dont on peut toujours supposer les premiers membres égaux et de signes contraires, on sera conduit à l'identité (26) et, celle-ci devant être vérifiée pour toutes les valeurs de u, v, w, on verra aisément qu'elle conduit à l'iden-

tité qui, d'après le théorème de Paul Serret, caractérise six points d'une conique.

Si l'on applique la méthode des polaires réciproques, ou si l'on reprend les raisonnements précédents en remplaçant les points par des droites et les coordonnées tangentielles par des coordonnées ponctuelles, on sera conduit au théorème suivant :

Si l'on partage d'une manière quelconque six tangentes d'une conique en deux groupes de trois tangentes, on obtient deux triangles qui sont conjugués par rapport à une même conique.

Réciproquement, *si deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, leurs six côtés sont des tangentes d'une autre conique.*

En rapprochant ces théorèmes des précédents, on en obtient de nouveaux qui n'ont pas moins d'intérêt. Il suffit de remarquer que la relation d'une conique à l'un de ses triangles conjugués est *dualistique*.

Si deux triangles sont inscrits dans une même conique, ils sont circonscrits à une autre conique.

Si deux triangles sont circonscrits à une même conique, ils sont inscrits dans une autre conique.

Pour démontrer la proposition de gauche, par exemple, il suffit de remarquer que, d'après deux des propositions précédentes, les deux triangles sont conjugués par rapport à une même conique et que, par conséquent, leurs côtés sont tangents à une autre conique.

86. Les conséquences des propositions précédentes, qui présentent sous une forme nouvelle les relations entre six points ou six tangentes d'une conique, sont nombreuses. Nous signalerons, plus particulièrement, les deux suivantes :

D'abord, *si deux coniques sont telles qu'il existe un triangle inscrit à l'une* (C) *et circonscrit à l'autre* (C'), *il existe une simple infinité de triangles jouissant de la même propriété.*

En effet, soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle inscrit à (C) et circonscrit à (C'). Si, d'un autre point α' de (C), on mène les deux tangentes à (C'), elles coupent (C) en deux nouveaux points β', γ'. Les deux

triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, étant inscrits dans une même conique (C), seront circonscrits à une même conique. Cette conique ne peut être que (C'), qui est déjà tangente à cinq des six côtés des deux triangles. Donc $\beta'\gamma'$ sera tangente à (C').

Le point α' ayant été choisi arbitrairement, on voit que l'on aura une suite continue de triangles inscrits dans (C) et circonscrits à (C').

Il suit de là qu'étant données deux coniques (C), (C'), il n'existe pas, en général, de triangle inscrit à l'une et circonscrit à l'autre. Car, s'il existait un tel triangle, on pourrait choisir un de ses sommets arbitrairement, et il faudrait une condition pour exprimer que le côté $\beta\gamma$ est tangent à (C').

On reconnaît, dans les résultats précédents, le cas le plus simple des célèbres théorèmes de Poncelet.

87. Cherchons, par exemple, la relation qui doit exister entre deux cercles pour qu'un triangle inscrit au premier soit circonscrit au second.

On peut prendre les équations des deux cercles sous la forme

$$(30)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ (x-d)^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

Un sommet du triangle pouvant être choisi arbitrairement sur le premier cercle, nous supposerons qu'il ait été placé au point de coordonnées $y = 0$, $x = R$. Les deux tangentes menées de ce point au second cercle ont pour équation

$$[(x-d)^2 + y^2 - r^2][(R-d)^2 - r^2] - [(x-d)(R-d) - r^2]^2 = 0.$$

Elles coupent le premier cercle en deux points, et il faudra exprimer que la droite qui les joint est tangente au second cercle. Un calcul facile donne l'équation de cette droite, qui est

$$(R+x)(R-d)^2 - 2Rr^2 = 0.$$

En exprimant que la valeur de x donnée par cette équation a pour valeur $d \pm r$, on est conduit à la relation cherchée qui se présente sous la forme

$$(R + d \pm r)(R-d)^2 - 2Rr^2 = 0$$

et se décompose en deux facteurs

$$(R - d \mp r)(d^2 - R^2 \mp 2Rr) = 0.$$

Le premier facteur est évidemment à rejeter, et il reste la condition cherchée, sous la forme

$$d^2 = R^2 \pm 2Rr. \tag{31}$$

Telle est la relation entre le cercle circonscrit à un triangle et l'un des cercles inscrit ou exinscrits. C'est celle qui a été donnée par Euler.

88. Voici maintenant la seconde conséquence que nous signalerons :

Si un triangle variable est inscrit dans une conique (C), *il existe une conique qui touche ses trois côtés aux points où ces côtés touchent eux-mêmes leurs enveloppes.*

Par conséquent, *les droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé concourent en un même point.*

Si un triangle variable est circonscrit à une conique (C), *il existe une conique qui lui est circonscrite et qui est tangente, en ses trois sommets, aux courbes décrites par ces sommets.*

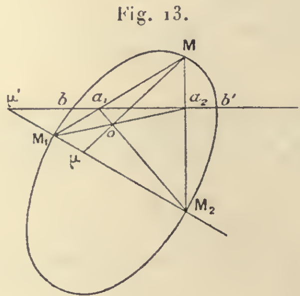
Par conséquent, *les points d'intersection des tangentes aux courbes décrites par les trois sommets avec les côtés opposés sont trois points en ligne droite.*

Ces propositions, qu'on obtient immédiatement en considérant deux positions infiniment voisines du triangle mobile, permettent, soit de construire le point de contact d'un côté quand on connaît ceux des deux autres côtés, soit de construire la tangente en un sommet quand on connaît les tangentes aux deux autres sommets.

Considérons, par exemple, sur une conique (C) une homographie, déterminée (*fig.* 13) par les deux points a_1, a_2, que l'on conviendra de joindre à un point variable M de la conique. Les droites a_1M, a_2M couperont la conique suivant deux nouveaux points M_1, M_2 qui seront en relation homographique et la droite M_1M_2 enveloppera une conique (C') doublement tangente à (C) aux points où celle-ci est coupée par la droite a_1a_2. Pour avoir les

points où la droite M_1M_2 touche (C'), il suffira de remarquer que les côtés a_1M, a_2M ont respectivement pour enveloppes a_1 et a_2. Il faudra donc joindre M_1a_2, M_2a_1. La droite qui passera par leur point d'intersection viendra couper M_1M_2 au point de contact cherché μ.

Fig. 13.



Ce point μ est évidemment le conjugué harmonique par rapport au segment M_1M_2 du point μ' où la droite M_1M_2 vient couper la corde de contact. Ainsi : *Quand on a une conique* (C') *bitangente à une conique* (C), *chaque point de* (C') *est conjugué par rapport à* (C) *du point où la tangente à* (C') *en ce point vient rencontrer la corde de contact.*

Cette proposition pourrait d'ailleurs se déduire du théorème de Desargues-Sturm. Car toutes les coniques tangentes en b, b' à (C) déterminent sur la droite M_1M_2 une involution dont les points doubles sont évidemment μ, μ'.

89. Nous terminerons ce Chapitre en rappelant une proposition dont on fait souvent usage : *Étant données deux coniques indécomposables, on peut toujours les considérer comme polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à une troisième conique.*

Pour le démontrer, bornons-nous au cas général, où les deux coniques ont un triangle conjugué commun, et soient alors

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \qquad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0,$$

les équations des deux coniques. On verra aisément qu'elles sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à l'une quelconque

des quatre coniques dont l'équation est

$$\pm\sqrt{aa'}\,x^2 \pm \sqrt{bb'}\,y^2 \pm \sqrt{cc'}\,z^2 = 0.$$

Comme, dans la correspondance ainsi établie entre deux coniques (C), (C′), chacune des tangentes communes aux deux coniques est la polaire d'un de leurs points d'intersection, on peut dire, par exemple, que le rapport anharmonique sur l'une des coniques, (C) par exemple, des quatre points où elle est touchée par les tangentes communes à (C) et à (C′) est égal au rapport anharmonique des quatre points communs, évalué par rapport à la conique (C′).



LIVRE II.

DÉFINITIONS MÉTRIQUES.

CHAPITRE I.

LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE PLAN.

Définition de l'angle et de l'abscisse. — Droites isotropes. — Discussion de la formule donnant la distance de deux points. — Relation établie par Laguerre entre l'angle et le rapport anharmonique. — Transformation qne subissent les relations contenant des angles lorsqu'on fait une homographie dans le plan. — Applications diverses. — Théorème de Carnot. — Extension des relations trigonométriques aux triangles imaginaires. — Système particulier de coordonnées rectilignes formé avec des axes isotropes. — Propriétés du quadrilatère dont les quatre côtés sont des droites isotropes. — Points associés. — Les propriétés de ces points permettent d'établir une relation entre deux définitions fondamentales du cercle. — Définition d'une classe de courbes planes de tous les degrés auxquelles on peut étendre les propositions établies pour le cercle. — Quand une courbe peut être définie par l'une ou l'autre de ces propriétés : elle est le lieu des points tels que le rapport des produits de leurs distances à deux groupes de points soit constant ou le lieu des points tels que l'on voie de ces points certains segments fixes sous des angles dont la somme soit constante, elle possède ces deux propriétés avec une double infinité de systèmes de pôles ou de segments. — Systèmes orthogonaux formés avec les courbes de cette nature. — Comment les propriétés des points associés permettent de déduire la définition focale des coniques des propositions relatives au rapport anharmonique.

90. Après ces études préliminaires, dans lesquelles nous n'avons guère utilisé que la notion du rapport anharmonique, nous aborderons l'examen des relations métriques, et nous commencerons par la Géométrie plane.

On peut définir en même temps la distance, l'abscisse et l'angle de la manière suivante :

x, y, x', y' étant les coordonnées rectangulaires de deux points réels ou imaginaires A et B, on peut, en général, définir deux élé-

ments d et α par les formules

$$(1) \qquad x'-x = d\cos\alpha, \qquad y'-y = d\sin a.$$

On aura alors

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{y'-y}{x'-x}, \qquad d = \frac{x'-x}{\cos\alpha} = \frac{y'-y}{\sin\alpha}.$$

L'angle α sera défini à un multiple près de π.

Si l'on a choisi la valeur de α parmi celles qui sont déterminées par la première des formules (2), d sera déterminé en grandeur et en signe. Pour tenir compte de l'ordre dans lequel on prend les points A, B, nous appellerons d l'abscisse AB. On aura évidemment

$$AB + BA = 0,$$

et, si l'on considère plusieurs points A, B, C, ... sur une droite, on a de même

$$AB + BC + \ldots + LA = 0.$$

Comme AB ne change ni de signe ni de valeur lorsque α augmente ou diminue d'un multiple de 2π, tandis qu'il change simplement de signe lorsqu'on augmente ou qu'on diminue α d'un multiple impair de π, nous dirons qu'il y a lieu de distinguer seulement deux sens sur une droite réelle ou imaginaire.

Comme on a

$$(3) \qquad d^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2,$$

nous appellerons *distance de deux points* la valeur de d déterminée par cette formule; on voit que d a deux valeurs égales et de signes contraires.

91. Toutes ces notions tombent en défaut si l'on a

$$(4) \qquad d^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 = 0.$$

Alors le second membre se décomposant en facteurs, il vient

$$(5) \qquad \frac{y-y'}{x-x'} = \pm i.$$

La droite AB a pour coefficient angulaire $+i$ ou $-i$. On désigne de telles droites sous le nom de droites *isotropes*, et l'on

voit que la distance de deux quelconques de leurs points situés à distance finie est nulle; c'est ce qui fait qu'on les appelle quelquefois *droites de longueur nulle.*

Si l'on met l'équation d'une telle droite sous forme homogène

$$y = \pm ix + hz,$$

on voit qu'elle passe, soit par le point de l'infini dont les coordonnées sont

$$(6) \qquad x = 1, \qquad y = +i, \qquad z = 0,$$

soit par le point de l'infini dont les coordonnées homogènes sont

$$(7) \qquad x = 1, \qquad y = -i, \qquad z = 0.$$

Nous appellerons ces deux points *les points circulaires à l'infini*, *les points focaux* ou plus simplement *les points* I *et* J. *La première appellation se rattache à leur propriété fondamentale;* ils appartiennent à tous les cercles du plan; car soit

$$x^2 + y^2 + axz + byz + cz^2 = 0$$

l'équation homogène d'un cercle quelconque; il est clair qu'elle est vérifiée par les coordonnées des points I et J. Réciproquement, si une conique passe par ces deux points, elle est un cercle. Cela est aisé à vérifier.

Poncelet, qui a introduit dans la science ces notions relatives au cercle, leur attachait avec raison beaucoup de prix.

Pour les droites isotropes, la notion d'angle disparaît entièrement. Si l'on fait en effet $d = 0$ dans les formules (1) il vient

$$\cos\alpha = \infty, \qquad \sin\alpha = \infty$$

et, par conséquent, si l'on remplace ces lignes par leurs expressions en exponentielles, on trouvera

$$\alpha = \pm \infty i.$$

Ainsi, *l'angle devient infini imaginaire.*

D'après les formules (1), les valeurs de α sont les mêmes pour deux droites parallèles. Nous dirons que α est l'angle qu'elles forment avec l'axe des x. Si m est le coefficient angulaire de ces

droites, on aura

$$(8) \qquad \tang\alpha = m, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Assigner un signe déterminé au radical, c'est fixer un sens sur les droites.

L'angle (D, D') de deux droites est égal à la différence $\alpha' - \alpha$. Il est déterminé à un multiple près de π, qui devient un multiple pair si l'on a fixé un sens sur les droites. L'angle d'une droite quelconque avec une droite isotrope est infini imaginaire.

92. Les notions fondamentales une fois définies, tout ce qui en découle s'applique aussi bien aux éléments imaginaires qu'aux éléments réels. Par exemple, la distance d'un point à une droite sera exprimée par la formule

$$(9) \qquad \delta = \frac{y - mx - n}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Sans insister sur tout cela, nous allons discuter les formules qui se présentent le plus souvent et d'abord la distance de deux points.

Mise sous forme homogène, elle s'écrit comme il suit :

$$(10) \qquad d^2 = \frac{(xz' - zx')^2 + (yz' - zy')^2}{z^2 z'^2}.$$

Examinons tout d'abord dans quels cas elle deviendra indéterminée. Pour qu'il en soit ainsi, il faudra que l'on ait, en premier lieu,

$$zz' = 0.$$

Supposons

$$(11) \qquad z' = 0.$$

En annulant le numérateur de d, on trouvera

$$z^2(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Il y a donc deux solutions : ou bien

$$(12) \qquad z = 0,$$

ou bien

$$(13) \qquad x'^2 + y'^2 = 0.$$

La première nous montre que la distance de deux points à l'infini est indéterminée. La seconde, jointe à l'équation (11), nous montre que le point (x', y', z') sera l'un des points I ou J.

Ainsi, *la distance de tout point à l'un des points* I *ou* J *est indéterminée.* Cette conclusion ne saurait nous étonner puisque nous savons que *tous* les cercles, quels que soient leur centre et leur rayon, passent par ces points I et J.

Au premier abord, on comprend moins bien que la distance de deux points à l'infini doive être regardée comme indéterminée. Il semble que cette distance devrait être infinie. Mais imaginons deux droites quelconques d, d' coupées par une droite isotrope en deux points M, M'. Quand le point M s'éloigne à l'infini sur la première droite, le point M' s'éloigne à l'infini aussi sur la seconde, et cependant leur distance est toujours nulle. Imaginons encore deux points sur la parabole; ils peuvent s'en aller à l'infini, leur distance devenant infinie ou gardant telle valeur qu'on le voudra.

Examinons maintenant dans quel cas la distance sera infinie. Il faudra que l'on ait, par exemple,

$$z' = 0, \qquad z(x'^2 + y'^2) \neq 0,$$

c'est-à-dire qu'un seul des deux points soit à l'infini et ne soit pas un des points I ou J.

Nous avons déjà étudié les cas dans lesquels la distance devient nulle. Il faut que les deux points ne soient pas à l'infini et soient sur une droite isotrope.

On discuterait de la même manière la distance d'un point à une droite; elle devient indéterminée quand le point est à l'infini sur la droite. Si la droite est isotrope, elle devient indéterminée ou infinie suivant que le point est ou n'est pas sur la droite.

93. C'est ici le lieu de rappeler une remarque d'intérêt capital, faite par *Laguerre* [1], alors qu'il était candidat à l'École Polytechnique.

Nous avons vu que tous les cercles du plan peuvent être définis comme des coniques passant par les deux points imaginaires à l'infini I et J. D'après cela, considérons un cercle passant par

[1] LAGUERRE, *Œuvres*, t. II, 1853, p. 6 : *Sur la théorie des foyers.*

deux points fixes A et B. Pour tout point M de ce cercle, l'angle AMB sera constant, mais il en sera de même aussi, d'après la propriété générale des coniques, du rapport anharmonique des droites qui joignent le point M aux quatre points A, B, I, J. Ce rapport anharmonique et l'angle AMB sont donc fonctions l'un de l'autre. Cette remarque nous conduira naturellement à la proposition de Laguerre.

Considérons les deux droites D, D′ définies en coordonnées rectangulaires par les équations

$$y = mx + hz, \qquad y = m'x + h'z.$$

Les angles qu'elles font avec Ox seront définis par les formules

$$\operatorname{tang}\alpha = m, \qquad \operatorname{tang}\alpha' = m',$$

et, d'après la définition donnée plus haut, leur angle (D, D′) aura sa valeur déterminée en grandeur et en signe, à un multiple près de π, par l'équation

$$\operatorname{tang}(\mathrm{D}, \mathrm{D}') = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{m' - m}{1 + mm'}. \tag{14}$$

Quant au rapport anharmonique des quatre droites D, D′, OI, OJ, il sera donné par la formule générale

$$\mathcal{R}(\mathrm{D'D}, \mathrm{OI}, \mathrm{OJ}) = \frac{m' - i}{m' + i} : \frac{m - i}{m + i}.$$

Si nous remplaçons m, m' par leurs expressions en α, α', il vient

$$\mathcal{R}(\mathrm{D}', \mathrm{D}, \mathrm{OI}, \mathrm{OJ}) = e^{2i(\mathrm{D}, \mathrm{D}')} \tag{15}$$

ou encore

$$(\mathrm{D}, \mathrm{D}') = \frac{1}{2i} \log \mathcal{R}(\mathrm{D}', \mathrm{D}, \mathrm{OI}, \mathrm{OJ}). \tag{16}$$

Telle est la formule donnée par Laguerre. Elle lui a permis de résoudre immédiatement une question relative à la transformation homographique.

94. On savait depuis longtemps reconnaître ce que deviennent, après une transformation homographique, les relations qui ne contiennent que des longueurs. Il n'y avait qu'à les mettre sous

une forme où ne figuraient plus que des rapports anharmoniques de points. Prenons, par exemple, la relation

$$AB + BC = AC$$

entre les abscisses de trois points en ligne droite. En introduisant le point à l'infini sur la droite, on peut lui donner la forme

$$\mathcal{R}(A, \infty, B, C) + \mathcal{R}(C, \infty, B, A) = 1.$$

Une transformation homographique fait correspondre aux quatre points A, B, C, ∞ quatre points en ligne droite A', B', C', D', généralement à distance finie, et la relation précédente nous donne

$$\mathcal{R}(A', D', B', C') + \mathcal{R}(C', D', B', A') = 1$$

ou, en développant,

$$\overline{A'B'}\,\overline{C'D'} + \overline{A'C'}\,\overline{D'B'} + \overline{A'D'}\,\overline{B'C'} = 0.$$

Une méthode analogue pourrait être appliquée à toutes les relations ne contenant que des longueurs, mais on ne savait transformer les relations où figurent des angles que dans des cas particuliers. Avec la formule de Laguerre, toute difficulté disparaît; il suffit de chercher ce que deviennent les points I et J dans l'homographie considérée. Supposons qu'ils se transforment dans les points A et B. Si D et Δ sont deux droites concourantes en O, on aura, d'après la propriété fondamentale de la conservation du rapport anharmonique,

$$(D, \Delta) = \frac{1}{2i} \log \mathcal{R}(\Delta', D', O'A, O'B),$$

D', Δ' étant les homologues de D, Δ, et O' désignant leur point d'intersection.

Voici une application indiquée par Laguerre. Considérons cette relation : la somme des angles d'un polygone plan ABC ... L est égale à un multiple de 2π. La transformation conduit à la relation suivante.

Prenons, dans le plan du polygone, deux points quelconques i, j; le produit des rapports anharmoniques

$$\mathcal{R}(AB, AL, Ai, Aj)\,\mathcal{R}(BC, BA, Bi, Bj)\ldots\mathcal{R}(LK, LA, Li, Lj)$$

est égal à 1. Transformé par polaires réciproques, ce théorème prend la forme suivante :

Si l'on considère un polygone plan quelconque ABC ... L *et deux droites quelconques* D, D', *qui coupent les côtés* AB, BC *en des points que nous désignerons par* a, a', b, b', ..., *le produit des rapports anharmoniques*

$$\mathcal{R}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, a, a')\,\mathcal{R}(\mathrm{B}, \mathrm{C}, b, b')\ldots\mathcal{R}(\mathrm{L}, \mathrm{A}, l, l')$$

est égal à 1.

Il suffit de supposer que la droite D' est rejetée à l'infini, pour obtenir le théorème de Carnot relatif à la section d'un polygone plan par une transversale.

95. Considérons encore ce théorème, dans lequel interviennent à la fois des angles et des longueurs : *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique est un cercle ayant même centre que la conique.* La formule de Laguerre nous montre immédiatement que, lorsque deux droites sont perpendiculaires, leurs points à l'infini divisent harmoniquement le segment IJ. Cette remarque avait été déjà faite par *Salmon*, qui y attachait une grande importance et l'a donnée dans la première édition, parue en 1848, de son *Traité des Sections coniques.* Appliquée à la proposition précédente, elle donne le théorème suivant :

Étant donnée une conique (C) *quelconque et deux points* A, B, *le lieu des points* M *tels que les tangentes menées de ce point à la conique divisent harmoniquement l'angle* AMB *est une conique* (C') *passant par les points* A *et* B *et telle que le pôle de* AB *soit le même dans les deux coniques.*

96. Voici une dernière application qui nous sera utile : Considérons une conique et deux de ses tangentes. Elle pourra être représentée par l'équation

$$xy = z^2 \tag{17}$$

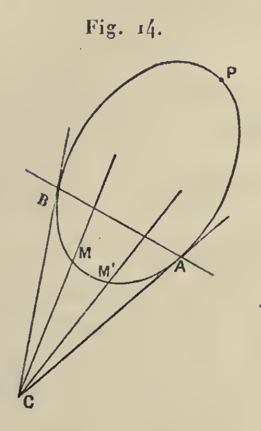
où les deux tangentes données ont pour équations $x = 0$, $y = 0$.

Les points de la conique pourront être définis par les équations

(18) $$y = \lambda^2 x, \qquad z = \lambda x,$$

en sorte que le rapport anharmonique de quatre points de la conique sera celui des valeurs correspondantes de λ. Or, considérons (*fig.* 14) deux points quelconques M, M′ de la conique

Fig. 14.



correspondants aux valeurs λ, λ' de λ et les deux points A et B qui correspondent aux valeurs 0, ∞ du paramètre. On aura donc

$$\mathcal{R}(\text{M}, \text{M}', \text{A}, \text{B}) = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Mais considérons, de même, le faisceau des droites CA, CB, CM, CM′ qui passent par le point de concours des tangentes en A et B. D'après la première des formules (18), on aura

$$\mathcal{R}(\text{CM}, \text{CM}', \text{CA}, \text{CB}) = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}$$

et, par conséquent, on pourra écrire la relation

(19) $$\mathcal{R}(\text{CM}, \text{CM}', \text{CA}, \text{CB}) = \mathcal{R}^2(\text{M}, \text{M}', \text{A}, \text{B}) = \mathcal{R}^2(\text{PM}, \text{PM}', \text{PA}, \text{PB})^2,$$

P étant un point quelconque de la conique.

Cette relation dont nous aurons à faire usage, appliquée au cas où la conique est un cercle de centre C, nous rappelle que *l'angle au centre est double de l'angle inscrit.*

La formule de Laguerre (16) ne détermine l'angle qu'à un

multiple près de π. Il est facile maintenant d'expliquer pourquoi la fixation d'un sens sur les droites (D), (D') permet de déterminer leur angle à un multiple près de 2π.

En effet, fixer un sens sur une droite, c'est choisir entre les deux points suivant lesquels le cercle de rayon de 1

$$x^2 + y^2 = 1$$

est coupé par une droite

$$y = mx,$$

menée, par l'origine, parallèle à la direction considérée. Ces deux points ont des coordonnées

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad y = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}},$$

qui seront pleinement déterminées dès que le signe du radical sera fixé. Soient α, α' les deux points qui correspondent ainsi à deux droites données D, D'. L'angle inscrit dans le cercle dont les côtés passent par α, α' s'exprimera, par la formule de Laguerre, en fonction du rapport anharmonique des quatre points α, α', I, J sur le cercle. Il sera donc connu à un multiple près de π. Mais alors l'angle des deux directions D, D', qui est le double de l'angle inscrit, sera connu à un multiple près de 2π.

97. Une fois introduites avec précision ces notions d'angles et de distances que nous venons de donner, il est aisé de montrer que les formules de la Trigonométrie s'appliquent aux triangles imaginaires. Nous envisagerons d'abord les triangles dont un des côtés est une droite isotrope.

Soient

$$(20) \qquad \begin{cases} x - x_0 = r\cos\alpha, & x - x_0 = r_1\cos\beta, \\ y - y_0 = r\sin\alpha, & y - y_0 = r_1\sin\beta \end{cases}$$

les équations qui définissent les points de deux droites D, Δ se coupant au point (x_0, y_0).

Cherchons la relation qui existe entre les abscisses r, r_1 de deux points M, M_1 situés à la rencontre de ces deux droites et d'une droite isotrope quelconque, par exemple de celle qui est représentée par l'équation

$$(21) \qquad x + iy = \lambda.$$

En substituant les valeurs de x et de y qui correspondent aux points M, M_1, on aura évidemment

$$r e^{i\alpha} = r_1 e^{i\beta}$$

ou encore

$$(22) \qquad r = r_1 e^{i(D, \Delta)}.$$

Telle est la relation dont nous allons faire usage. Mais auparavant, nous allons définir avec précision les éléments d'un triangle imaginaire.

Soient A, B, C les sommets de ce triangle; fixons un sens arbitraire sur chacun de ses trois côtés. Les abscisses BC, CA, AB seront parfaitement définies en grandeur et en signe. Nous poserons

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AB = c.$$

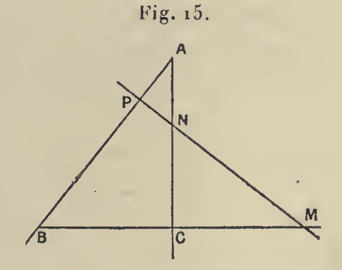
L'angle de deux côtés quelconques sera aussi défini à un multiple près de 2π, puisqu'on a fixé des sens sur ces côtés. Et, pour nous conformer à l'usage, nous poserons

$$(a, b) = \pi - C, \qquad (b, c) = \pi - A, \qquad (c, a) = \pi - B.$$

Les angles A, B, C seront déterminés à un multiple près de 2π.

Cela posé, coupons le triangle ABC (*fig.* 15) par une droite

Fig. 15.



isotrope MNP telle que celle qui est déterminée par l'équation (21). En appliquant trois fois la formule (22), on aura

$$\overline{AP} = \overline{AN}\, e^{i(A-\pi)}, \qquad \overline{BM} = \overline{BP}\, e^{i(B-\pi)}, \qquad \overline{CN} = \overline{CM}\, e^{i(C-\pi)}.$$

D'autre part les abscisses $\overline{AP}$, $\overline{AN}$, ... sont liées par les trois relations

$$\overline{BM} = a + \overline{CM}, \qquad \overline{CN} = \overline{AN} + b, \qquad \overline{AP} = c + \overline{BP}$$

qui permettent d'éliminer le point N et conduisent aux deux relations

$$\overline{\mathrm{CM}} + \overline{\mathrm{AP}}\, e^{i\mathrm{B}} + a - c\, e^{i\mathrm{B}} = 0, \qquad \overline{\mathrm{CM}}\, e^{i\mathrm{C}} - \overline{\mathrm{AP}}\, e^{-i\mathrm{A}} + b = 0.$$

Comme le point M peut être choisi arbitrairement, ces deux équations doivent donner la même valeur pour $\overline{\mathrm{AP}}$, ce qui entraîne les deux relations

$$e^{-i\mathrm{C}} = -\, e^{i(\mathrm{B}+\mathrm{A})} = \frac{a - c\, e^{i\mathrm{B}}}{b}. \tag{23}$$

Si l'on avait choisi une droite isotrope de coefficient angulaire $-i$, on aurait eu de même

$$e^{i\mathrm{C}} = -\, e^{-i(\mathrm{B}+\mathrm{A})} = \frac{a - c\, e^{-i\mathrm{B}}}{b}. \tag{24}$$

On obtient donc les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} & a = b\cos\mathrm{C} + c\cos\mathrm{B}, \\ & \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = (2k+1)\pi, \\ & \frac{b}{\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\mathrm{C}}, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

qui contiennent, à elles seules, *toutes* les relations possibles entre les six éléments.

Si l'on change successivement, ou simultanément, les sens des côtés ou le sens du triangle, on voit que ces relations subsistent lorsqu'on fait, sans modifier les autres éléments, les substitutions suivantes :

A	B	C	$-\mathrm{A}$	$-\mathrm{B}$	$-\mathrm{C}$
a	B	C	$-a$	$\mathrm{B}-\pi$	$\mathrm{C}-\pi$
A	b	C	$\mathrm{A}-\pi$	$-b$	$\mathrm{C}-\pi$
A	B	c	$\mathrm{A}-\pi$	$\mathrm{B}-\pi$	$-c$
a	b	c	$-a$	$-b$	$-c$

98. En 1869, nous avons employé, pour l'étude de certaines courbes, un système de coordonnées que nous allons définir.

Posons

$$x + iy = u, \qquad x - iy = v; \tag{26}$$

u et v pourront être substituées à x, y et servir à la détermination

des points. Elles seront imaginaires conjuguées pour tout point réel, et seulement pour un point réel.

Soient u, v; u_1, v_1 les coordonnées de deux points A, B. En faisant usage des formules déjà données, on aura

$$(27) \qquad u_1 - u = \overline{\mathrm{AB}}\, e^{i\alpha}, \qquad v_1 - v = \overline{\mathrm{AB}}\, e^{-i\alpha},$$

$\overline{\mathrm{AB}}$ étant la distance des deux points A, B, prise avec un signe déterminé par le sens de AB et α étant l'angle, déterminé à un multiple près de 2π, que fait AB avec l'axe des x.

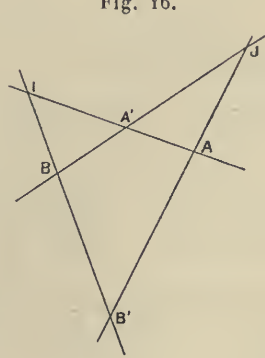
Les deux relations (27) nous donnent la formule

$$(28) \qquad \overline{\mathrm{AB}}^2 = (u_1 - u)(v_1 - v)$$

qui nous présente le carré de la distance de deux points décomposé en deux facteurs. Mais, pour faire d'autres applications, nous allons adjoindre à deux points A, B deux autres points A′, B′ que nous appellerons *associés aux premiers*.

Considérons (*fig.* 16) le quadrilatère formé par les quatre

Fig. 16.



droites isotropes qui passent par l'un des points A, B. Il a pour sommets opposés A et B en même temps que les deux points I et J. Si nous introduisons le troisième couple de sommets opposés formé par les points A′, B′, on peut admettre que les coordonnées des sommets seront

pour A u et v, pour B u_1 et v_1,
pour A′ u et v_1, pour B′ u_1 et v.

Cela posé, soit M un point quelconque du plan et soient U, V ses coordonnées. Si ω, θ, ω', θ' désignent les angles que font avec l'axe des x les rayons AM, BM, A'M, B'M, on aura, d'après les formules (27),

$$(29)\quad \begin{cases} \overline{AM}\, e^{i\omega} = U - u, & \overline{BM}\, e^{i\theta} = U - u_1, \\ \overline{AM}\, e^{-i\omega} = V - v, & \overline{BM}\, e^{-i\theta} = V - v_1, \\ \overline{A'M}\, e^{i\omega'} = U - u, & \overline{B'M}\, e^{i\theta'} = U - u_1, \\ \overline{A'M}\, e^{-i\omega'} = V - v_1, & \overline{B'M}\, e^{-i\theta'} = V - v. \end{cases}$$

En égalant les valeurs des différences $U - u$, ..., on a les relations géométriques

$$(30)\quad \begin{cases} \overline{AM}\, e^{i\omega} = \overline{A'M}\, e^{i\omega'}, & \overline{A'M}\, e^{-i\omega'} = \overline{BM}\, e^{-i\theta}, \\ \overline{BM}\, e^{i\theta} = \overline{B'M}\, e^{i\theta'}, & \overline{AM}\, e^{-i\omega} = \overline{B'M}\, e^{-i\theta'}. \end{cases}$$

L'élimination des abscisses nous donne d'abord la relation

$$e^{2i(\omega+\theta-\omega'-\theta')} = 1$$

qui entraîne la suivante :

$$(31)\quad \omega + \theta - \omega' - \theta' = k\pi,$$

k étant un entier. On trouve ensuite

$$(32)\quad \overline{AM}.\overline{BM} = (-1)^k\, \overline{A'M}.\overline{B'M},$$

puis

$$(33)\quad \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = (-1)^k\, e^{i(\omega'-\theta')}, \qquad \frac{\overline{A'M}}{\overline{B'M}} = (-1)^k\, e^{i(\omega-\theta)};$$

$\omega - \theta$, $\omega' - \theta'$ ont une signification géométrique simple. Ce sont les angles sous lesquels, du point M, on voit les segments associés AB, A'B'. Si l'on pose

$$(34)\quad \omega - \theta = \widehat{BMA}, \qquad \omega' - \theta' = \widehat{B'MA'},$$

on aura ces deux formules

$$(35)\quad \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = (-1)^k\, e^{i\widehat{B'MA'}}, \qquad \frac{\overline{A'M}}{\overline{B'M}} = (-1)^k\, e^{i\widehat{BMA}}$$

qui se ramènent l'une à l'autre.

Quant à la formule (31), elle exprime que les bissectrices des angles AMB, A'MB' sont les mêmes. On peut donc énoncer les théorèmes suivants :

Quand deux segments AB, A'B' *sont associés, si l'on joint leurs extrémités à un point quelconque* M :

1° *Les bissectrices des angles* AMB, A'MB' *sont les mêmes;*

2° *Le produit des distances du point* M *aux extrémités de l'un des segments est égal, au signe près, au produit des distances du même point aux extrémités de l'autre segment;*

3° *Le rapport des distances du point* M *aux extrémités de l'un des segments est égal, au signe près, à* e^{iV}, V *étant l'angle sous lequel on voit, du point* M, *l'autre segment.*

Signalons encore la relation

$$(36) \qquad \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{MA'}^2 - \overline{MB'}^2 = \overline{AB}^2 = -\overline{A'B'}^2$$

qui, jointe à l'équation (32), nous donne

$$(37) \qquad (\overline{MA} + \varepsilon\,\overline{MB})^2 - (\overline{MA'} + \varepsilon k\,\overline{MB'})^2 = \overline{AB}^2,$$

ε désignant l'unité positive ou négative. Cela permet de vérifier que, si A et B sont deux foyers d'une conique, A' et B' sont les deux autres foyers.

La plupart des applications de ces théorèmes concernent le cas où deux des points A et B par exemple sont réels. Alors A' et B' sont deux points imaginaires conjugués. Si donc M est réel et qu'on prenne AM et BM de même signe, on pourra faire $k = 0$.

La relation déjà donnée

$$(38) \qquad \frac{AM}{BM} = e^{i\,\widehat{B'MA'}}$$

nous permet de reconnaître un lien entre deux propriétés du cercle qui paraissent, au premier abord, tout à fait indépendantes l'une de l'autre.

On sait que, si l'on prend arbitrairement sur un cercle deux points A', B', l'angle A'MB' sous lequel on voit d'un point quelconque du cercle le segment A'B' est constant. Adjoignons à ces deux points A', B' les points associés A, B. En vertu de la formule précédente, nous pourrons dire que le rapport des distances d'un point du cercle aux deux points fixes A et B est constant.

Ainsi se trouve établie la relation entre les deux propriétés fondamentales du cercle. Quand la droite A′B′, sans cesser d'être réelle, ne coupe plus le cercle, les deux points A′, B′ sont imaginaires conjugués, mais les deux points A, B deviennent réels. Ainsi, on reconnaît que *le cercle peut, d'une double infinité de manières, être défini par la propriété du segment capable ou par la constance du rapport des distances de ses points à deux points fixes, et que ces deux définitions se rattachent directement l'une à l'autre.*

99. Cette connexion établie entre deux définitions différentes du cercle s'étend d'elle-même à toute une classe de courbes, dont plusieurs ont été l'objet des études des géomètres.

Définissons une courbe par la condition que le produit des distances de chacun de ses points à n pôles fixes soit constant, ou, plus généralement, proportionnel à la distance du même point à p autres pôles fixes. On aura le cercle si $n=1$, $p=0$.

Appelons $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les distances du point de la courbe aux pôles de la première série, $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les distances du même point aux pôles de la seconde série. On devra avoir

$$R_1^2 R_2^2 \ldots R_n^2 = k^2 r^2 r_1^2 \ldots r_p^2. \tag{39}$$

Si, comme on peut le supposer, on a $p \gtreqless n$, la courbe sera généralement de degré $2n$; mais ce degré s'abaissera si $k=1$ et si $n=p$. Par exemple, si $n=p=2$, la courbe pourra être soit une cubique, soit une hyperbole équilatère.

Soient a_i, a'_i les valeurs de u et de v relatives au pôle de rang i de la première série, soient de même b_i, b'_i les valeurs de u et de v pour le pôle de rang i de la seconde série; a_i, a'_i et b_i, b'_i seront imaginaires conjuguées toutes les fois que le pôle correspondant sera réel. On aura

$$R_i^2 = (u-a_i)(v-a'_i), \qquad r_i^2 = (u-b_i)(v-b'_i). \tag{40}$$

Et par conséquent, si l'on pose

$$\begin{cases} \varphi(u) = (u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_n), \\ \varphi_1(v) = (v-a'_1)(v-a'_2)\ldots(v-a'_n), \\ \psi(u) = k(u-b_1)\ldots(u-b_p), \\ \psi_1(v) = k(v-b'_1)\ldots(v-b'_p), \end{cases} \tag{41}$$

on aura, pour l'équation de la courbe,

$$(42)\qquad \varphi(u)\varphi_1(v) = \psi(u)\psi_1(v).$$

Remarquons que les polynomes φ, φ_1 sont imaginaires conjugués ainsi que les polynomes ψ, ψ_1.

On obtient une équation analogue à la précédente en cherchant le lieu des points tels que, si on les joint à n points fixes $A_1, \ldots, A_n$ et à p autres points fixes $B_1, \ldots, B_p$, la différence entre la somme des angles que font, avec un axe fixe, les n droites $A_1M, \ldots, A_nM$ et la somme des angles que font, avec le même axe, les p droites $B_1M, \ldots, B_pM$ soit constante. L'axe fixe peut, évidemment, être choisi d'une manière arbitraire. Remarquons même qu'il n'intervient pas si $p = n$; car alors le lieu est défini par la propriété que la somme des angles A_iMB_i sous lesquels on voit du point M les n segments A_iB_i soit constante.

Désignons par a_i, a'_i les valeurs de u et de v pour le point A_i, par b_i, b'_i les valeurs des mêmes variables pour le point B_i; a_i, a'_i sont imaginaires conjuguées si A_i est réel et, de même, b_i, b'_i si B_i est réel. Si l'on appelle ω_i l'angle que fait A_iM avec l'axe des x et θ_i l'angle que fait B_iM avec le même axe, l'équation du lieu sera

$$(43)\qquad \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n - \theta_1 - \theta_2 - \ldots - \theta_p = h.$$

Et comme on a, d'après les équations (29), pour un point M de coordonnées u, v,

$$(44)\qquad \frac{u - a_k}{v - a'_k} = e^{2i\omega_k}, \qquad \frac{u - b_k}{v - b'_k} = e^{2i\theta_k},$$

il est clair que l'équation du lieu pourra s'écrire

$$\prod \frac{u - a_k}{v - a'_k} = e^{2ih} \prod \frac{u - b_k}{v - b'_k}.$$

Si donc on pose

$$(45)\qquad \begin{cases} \varphi\,(u) = (u - a_1)\ldots(u - a_n), \\ \varphi_1(v) = (v - a'_1)\ldots(v - a'_n), \\ \psi\,(u) = e^{ih}\;(u - b_1)\ldots(u - b_p), \\ \psi_1(v) = e^{-ih}(u - b'_1)\ldots(u - b'_p), \end{cases}$$

l'équation de la courbe prendra la forme

$$(46)\qquad \varphi(u)\psi_1(v) = \psi(u)\varphi_1(v)$$

qui ressemble beaucoup à celle (42) que nous avons obtenue pour le premier lieu.

Au point de vue de la réalité, il y a cependant une différence essentielle entre les deux équations. Dans la première, chaque polynome est multiplié par le polynome conjugué. Dans la seconde, les deux polynomes du premier membre sont quelconques; leurs conjugués figurent seulement dans le second membre.

Nous allons montrer que cette différence peut disparaître, et établir le théorème suivant :

Quand l'équation d'un lieu se présente sous l'une ou l'autre des deux formes (42) *et* (46), *elle peut être mise, d'une infinité de manières, sous chacune de ces deux formes.*

C'est la propriété que nous avons remarquée déjà, pour le cas le plus simple, dans le cercle.

Pour établir le théorème précédent, nous prendrons pour point de départ l'équation (42).

On peut évidemment la mettre sous la forme

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = \frac{\psi_1(v)}{\varphi_1(v)}$$

et, par suite, la transformer comme il suit

$$\frac{\varphi(u) + \lambda\,\psi(u)}{\varphi(u) + \lambda'\,\psi(u)} = \frac{\psi_1(v) + \lambda\,\varphi_1(v)}{\psi_1(v) + \lambda'\,\varphi_1(v)} \tag{47}$$

ou encore

$$[\varphi(u) + \lambda\,\psi(u)]\,[\psi_1(v) + \lambda'\varphi_1(v)] = [\varphi(u) + \lambda'\,\psi(u)]\,[\psi_1(v) + \lambda\,\varphi_1(v)]. \tag{48}$$

C'est la forme primitive (42); mais obtenue avec d'autres fonctions. Pour que les deux polynomes qui figurent dans chaque membre puissent être ramenés à être conjugués, il faut évidemment que λ et $\frac{1}{\lambda'}$ soient imaginaires conjugués. Posons donc, m et α étant des constantes réelles,

$$\lambda = m\,e^{\alpha i}, \qquad \lambda' = \frac{1}{m}\,e^{\alpha i}; \tag{49}$$

l'équation (48) prendra la forme

$$\Phi(u)\,\Phi_1(v) = \Psi(u)\,\Psi_1(v), \tag{50}$$

où l'on aura

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Phi(u) = \varphi(u) + m\,e^{\alpha i}\,\psi(u), & \Psi(u) = \psi(u) + m\,e^{-i\alpha}\varphi(u), \\ \Phi_1(v) = \varphi_1(v) + m\,e^{-\alpha i}\psi_1(v), & \Psi_1(v) = \psi_1(v) + m\,e^{\alpha i}\,\varphi_1(v). \end{array}\right.$$

Les fonctions Φ, Φ_1 sont imaginaires conjuguées, ainsi que les polynomes Ψ, Ψ_1. C'est l'équation qui nous a servi de point de point de départ, *mais avec d'autres systèmes de pôles.*

Remarquons qu'il y aura généralement le même nombre de pôles dans les deux nouvelles séries.

Les pôles de la première série seront donnés par les équations

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi(u) = \varphi(u) + m\,e^{\alpha i}\,\psi(u) = 0, \\ \Phi_1(v) = \varphi_1(v) + m\,e^{-\alpha i}\psi_1(v) = 0. \end{array}\right.$$

Ceux de la seconde seront donnés, de même, par les équations

$$(53)\quad \left\{\begin{array}{l} \Psi(u) = \psi(u) + m\,e^{-\alpha i}\varphi(u) = 0, \\ \Phi_1(v) = \psi_1(v) + m\,e^{\alpha i}\,\varphi_1(v) = 0. \end{array}\right.$$

Un des pôles réels pourra être choisi arbitrairement, ce qui déterminera les constantes réelles m et α; il pourra aussi être rejeté à l'infini.

Revenons maintenant à l'équation (48), et supposons-y que les constantes λ, λ' soient des imaginaires pures, que l'on ait

$$\lambda = e^{2\alpha i}, \qquad \lambda' = e^{2\beta i}.$$

En posant cette fois

$$(54)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Theta(u) = e^{-\alpha i}\varphi(u) + e^{\alpha i}\,\psi(u), & \Omega(u) = \varphi(u)\,e^{-\beta i} + e^{\beta i}\,\psi(u), \\ \Theta_1(v) = e^{\alpha i}\,\varphi_1(v) + e^{-\alpha i}\psi_1(v), & \Omega_1(v) = \varphi_1(v)\,e^{\beta i} + e^{-\beta i}\psi_1(v), \end{array}\right.$$

l'équation fondamentale deviendra

$$(55)\qquad \Theta(u)\,\Omega_1(v) = \Theta_1(v)\,\Omega(u).$$

Nous retrouvons ainsi la forme (46), puisqu'ici ce sont les fonctions placées dans deux membres différents qui sont imaginaires conjuguées.

Les fonctions Θ et Ω sont généralement du même degré; on voit donc que la courbe peut, d'une infinité de manières, être définie comme le lieu des points d'où l'on voit n segments A_iB_i sous des angles dont la somme est constante. Les extrémités de ces

segments sont nécessairement sur la courbe, et définies par l'un des systèmes

$$(56)\qquad \Theta(u) = 0, \qquad \Theta_1(v) = 0,$$

$$(57)\qquad \Omega(u) = 0, \qquad \Omega_1(v) = 0.$$

On pourra choisir arbitrairement l'un des segments, ce qui déterminera les constantes réelles α, β.

100. Ces conclusions, que l'on aurait pu établir en partant, non de l'équation (42), mais de l'équation (46), démontrent complètement le théorème que nous avons énoncé. Nous allons indiquer deux applications.

Soit d'abord

$$(u^2 - c^2)(v^2 - c^2) = a^4$$

l'équation de la courbe de Cassini. D'après la théorie générale, on pourra ramener son équation d'une infinité de manières à la forme

$$R_1 R_2 = k r_1 r_2.$$

On verra aisément que les deux pôles de chaque série sont placés symétriquement par rapport au centre. On pourra aussi, et d'une infinité de manières, trouver deux segments inscrits dans la courbe et tels que la somme des angles sous lesquels on voit ces deux segments d'un point de la courbe soit constante. On reconnaîtra aisément que ces deux segments, dont l'un est entièrement arbitraire, sont placés symétriquement par rapport au centre. Nous laissons ces points à l'examen du lecteur.

La courbe lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère a été aussi l'objet d'un grand nombre de recherches. Voici comment on établit d'ordinaire son équation :

Soient p_1, p_2, p_3, p_4 les distances d'un point quelconque du plan aux quatre côtés du quadrilatère. Il y a, entre ces quatre distances, une relation homogène de la forme

$$(58)\qquad a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 = 0,$$

a_1, a_2, a_3, a_4 étant des constantes que l'on déterminera aisément. Or, d'après une propriété bien connue des coniques, le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque de la conique

est constant en grandeur et en signe. Si donc p_1, p_2, p_3, p_4; p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 désignent les distances respectives des deux foyers aux quatre côtés du quadrilatère, on aura

$$p_1 p'_1 = p_2 p'_2 = p_3 p'_3 = p_4 p'_4.$$

En remplaçant, dans la relation identique (58), p_1, p_2, p_3, p_4 par les quantités proportionnelles $\frac{1}{p'_1}, \frac{1}{p'_2}, \frac{1}{p'_3}, \frac{1}{p'_4}$, il vient, pour l'équation du lieu,

$$(59) \qquad \frac{a_1}{p'_1} + \frac{a_2}{p'_2} + \frac{a_3}{p'_3} + \frac{a_4}{p'_4} = 0.$$

On voit qu'il est du troisième degré, et il ne serait pas difficile de montrer qu'il passe par les points à l'infini sur le cercle.

Une autre propriété des coniques permet d'obtenir l'équation du lieu et plusieurs de ses propriétés. Soit $A_1 A_2 A_3 A_4$ le quadrilatère qui doit être circonscrit à toutes les coniques. De chaque foyer F de l'une des coniques, on doit voir sous le même angle les deux portions de tangentes $A_2 A_1$ et $A_3 A_4$. Si donc a_i, a'_i désignent les valeurs de u et de v pour le sommet A_i, on devra avoir pour le foyer

$$\frac{u - a_2}{v - a'_2} : \frac{u - a_1}{v - a'_1} = \frac{u - a_3}{v - a'_3} : \frac{u - a_4}{v - a'_4},$$

ce qui donne l'équation cherchée sous la forme

$$(60) \qquad \begin{gathered} (u - a_2)(u - a_4)(v - a'_1)(v - a'_3) \\ = (u - a_1)(u - a_3)(v - a'_2)(v - a'_4). \end{gathered}$$

En appliquant notre théorème général, nous voyons que le lieu peut, d'une double infinité de manières, conserver sa définition si l'on substitue au quadrilatère donné tous ceux qui sont déterminés par les équations

$$(61) \qquad \begin{cases} e^{\alpha i}(u - a_2)(u - a_4) + e^{-\alpha i}(u - a_1)(u - a_3) = 0, \\ e^{\alpha i}(v - a'_2)(v - a'_4) + e^{-\alpha i}(v - a'_1)(v - a'_3) = 0 \end{cases}$$

et

$$(62) \qquad \begin{cases} e^{\beta i}(u - a_2)(u - a_4) + e^{-\beta i}(u - a_1)(u - a_3) = 0, \\ e^{\beta i}(v - a'_2)(v - a'_4) + e^{-\beta i}(v - a'_1)(v - a'_3) = 0, \end{cases}$$

chacun de ces couples d'équations déterminant deux sommets opposés du quadrilatère.

101. Dans le système de coordonnées que nous avons adopté, la direction de la tangente à une courbe se détermine d'une manière élégante. Appliquons les formules fondamentales (27) à deux points infiniment voisins sur une courbe; nous aurons

$$du = ds\, e^{iV}, \qquad dv = ds\, e^{-iV}, \tag{63}$$

ds étant la différentielle de l'arc et V l'angle de la tangente avec l'axe des x. On déduit de là

$$\frac{du}{dv} = e^{2iV}. \tag{64}$$

Et par suite, pour deux directions se coupant à angle droit, on aura

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\delta u}{\delta v}. \tag{65}$$

Telle est la condition d'orthogonalité de deux courbes.

Il suit de là que, quelles que soient les fonctions $\Phi(u)$, $\Phi_1(v)$, les deux familles

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi(u) + \Phi_1(v) = \text{const.}, \\ \Phi(u) - \Phi_1(v) = \text{const.} \end{array}\right. \tag{66}$$

sont composées de courbes se coupant mutuellement à angle droit. Les systèmes ainsi obtenus sont dits *orthogonaux et isothermes*. Ils peuvent être évidemment composés de courbes réelles; il suffit de prendre pour Φ et Φ_1 des fonctions imaginaires conjuguées.

Si, changeant les notations, on remplace Φ et Φ_1 par $\log\Phi$, $\log\Phi_1$ les équations prennent la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi(u)\,\Phi_1(v) = \text{const.}, \\ \dfrac{\Phi(u)}{\Phi_1(v)} = \text{const.}, \end{array}\right. \tag{67}$$

sous laquelle elles sont souvent employées.

Supposons, par exemple, que l'on prenne pour $\Phi(u)$ et $\Phi_1(v)$ les fractions rationnelles

$$\Phi(u) = \frac{(u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_n)}{(u-b_1)\ldots(u-b_p)}, \qquad \Phi_1(v) = \frac{(v-a'_1)\ldots(v-a'_n)}{(v-b'_1)\ldots(v-b'_p)}$$

l'équation de la première famille de courbes prendra la forme

entièrement géométrique

$$\frac{R_1 R_2 \ldots R_n}{r_1 r_2 \ldots r_p} = \text{const.}, \tag{68}$$

R_i désignant la distance au point A_i de coordonnées a_i, a'_i et r_i désignant la distance au point B_i de coordonnées b_i, b'_i. Quant à la seconde famille, elle sera définie par l'équation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_p = \text{const.}, \tag{69}$$

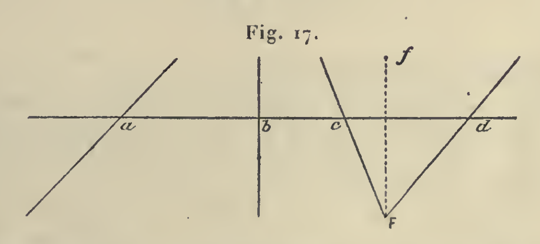
α_i étant l'angle que fait avec l'axe des x la droite A_iM qui joint le point A_i à un point quelconque M de la courbe, et β_i désignant l'angle que fait avec le même axe le rayon B_iM.

Ces systèmes orthogonaux, dont le plus simple est composé de deux familles de cercles, sont bien connus, et souvent employés en Physique mathématique.

102. Nous reviendrons sur la théorie des points associés quand nous traiterons de la Géométrie sphérique. Nous terminerons en montrant comment les propositions établies plus haut (n° 98) peuvent conduire aux propriétés métriques focales des coniques.

Étant données quatre tangentes fixes à une conique, on a vu que le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d (*fig.* 17), où

Fig. 17.



elles sont coupées par une tangente variable, est un nombre constant.

L'application de cette proposition générale va nous donner le résultat cherché. Supposons que deux des tangentes fixes, celles qui passent en c et en d, soient celles qui ont été menées d'un foyer F de la conique. D'après la définition générale des foyers que nous devons à Plücker, ces deux tangentes auront pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$. Donc les deux points associés à c et à d seront le foyer F et son symétrique f par rapport à la tangente variable.

Le rapport anharmonique des points a, b, c, d

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

peut être transformé comme il suit. D'après les relations entre les points associés, on a

$$\frac{ac}{ad} = e^{i\widehat{\mathrm{F}af}}, \qquad \frac{bc}{bd} = e^{i\widehat{\mathrm{F}bf}}.$$

Donc, d'après la propriété relative au rapport anharmonique, la différence $\widehat{\mathrm{F}af} - \widehat{\mathrm{F}bf}$ est constante. Or cette différence est évidemment le double de l'angle $a\mathrm{F}b$ sous lequel on voit, du foyer F, le segment ab. Nous retrouvons donc cette propriété bien connue : *l'angle sous lequel on voit d'un foyer la portion de tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est constant.*

Supposons maintenant que les deux tangentes fixes qui contiennent a et b soient celles qui sont menées par le second foyer F′; les points a et b seront associés à F′ et à son symétrique f' par rapport à la tangente. On aura donc

$$e^{i\widehat{a\mathrm{F}b}} = \frac{\mathrm{F}f'}{\mathrm{FF}'}$$

et, par conséquent, $\mathrm{F}f'$ sera constant.

Ainsi, *le symétrique de l'un des foyers par rapport à la tangente décrit un cercle dont le centre est l'autre foyer.*

Lorsqu'un cercle variable passe par un point fixe, il touche son enveloppe en un point qui est évidemment le symétrique du point fixe par rapport à la tangente de la courbe décrite par son centre. Dans le cas particulier que nous envisageons ici, la conique enveloppe de la tangente peut être définie comme le lieu du centre du cercle qui est assujetti à passer par un point fixe et à toucher un cercle fixe. C'est la propriété métrique focale qui sert de définition aux deux coniques à centre ([1]).

([1]) Cette démonstration des propriétés focales des coniques se trouve déjà dans l'Ouvrage de l'Auteur publié en 1873 : *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires.*

CHAPITRE II.

ÉTUDE D'UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE COURBES ANALOGUES AUX CONIQUES.

On cherche d'abord la courbe dont la tangente intercepte sur n droites fixes des segments liés par la relation linéaire la plus générale. — Cette courbe est, en général, de $n^{ième}$ classe et elle admet la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $n-1$. — Extension à cette courbe de la propriété fondamentale de la parabole, qui correspond à l'hypothèse $n=2$. — En l'étudiant on est conduit à un problème d'analyse intéressant : Étant donnée une forme algébrique, trouver deux formes dont elle soit le jacobien. — Autres propriétés géométriques de la courbe. — Extension de ses propriétés à toute courbe de $p^{ième}$ classe, ayant une tangente multiple d'ordre $p-1$. — Cas particulier des coniques. — Courbes de $n^{ième}$ classe pour lesquelles la droite de l'infini n'est plus qu'une tangente multiple d'ordre $n-2$. — Courbe enveloppe de la droite mobile qui forme avec n couples de droites fixes n triangles dont les périmètres sont liés par une relation linéaire quelconque. — Elle conserve cette définition avec une infinité d'autres couples de droites fixes. — Problèmes nouveaux d'analyse auxquels on est ainsi conduit.

---

103. Aux nos 98 et 99, nous avons montré comment on peut établir un lien entre différentes propriétés du cercle et les étendre à des courbes de tous les degrés. Il est d'autres propriétés du cercle, relatives aux périmètres des triangles circonscrits, auxquelles on peut appliquer des méthodes analogues. Nous allons voir aussi qu'on peut généraliser certaines propriétés de la parabole et des coniques à centre.

Commençons par traiter la question suivante :

Chercher la courbe dont la tangente intercepte sur des droites fixes des segments qui, comptés à partir de points fixes quelconques pris respectivement sur ces droites, soient liés par la relation linéaire la plus générale.

Si A est le point où la tangente mobile coupe une des droites fixes et O un point fixe pris sur cette droite, la définition de la

courbe sera donnée par l'équation

$$(1) \qquad \sum m.\overline{OA} = C,$$

C et les m désignant des constantes quelconques.

Cette définition géométrique permettra de construire sans difficulté la tangente parallèle à une direction donnée ([1]).

Soit

$$(2) \qquad x \cos\omega + y \sin\omega - \varpi = 0$$

l'équation de la tangente à la courbe cherchée et soit

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

celle d'une des droites fixes. Si l'on désigne par λ le segment qui définit un point de la droite, compté, par exemple, à partir du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine, on aura, pour les coordonnées de ce point, les expressions

$$(3) \qquad \begin{cases} x = p \cos\alpha - \lambda \sin\alpha, \\ y = p \sin\alpha + \lambda \cos\alpha. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtiendra la valeur de λ qui correspond au point A pris sur la droite fixe considérée et la valeur de OA sera

$$(4) \qquad \mathrm{OA} = \lambda + k = \frac{\varpi - p\cos(\alpha - \omega)}{\sin(\omega - \alpha)} + k,$$

k étant une constante qui variera avec la position du point fixe O sur la droite, mais qui n'a, comme il est évident *a priori*, aucune influence sur le résultat.

([1]) Car soit Δ une droite quelconque, parallèle à la direction donnée, qui coupe les droites fixes en des points A'. Déterminons la constante C' par la relation

$$\Sigma\, m.\,\overline{OA'} = C'.$$

Si l'on retranche cette relation de l'équation (1), il vient

$$\Sigma\, m.\,\overline{AA'} = C' - C.$$

Or toutes les quantités AA' sont dans des rapports constants. Donc il sera très aisé de les déterminer.

Posons

$$(5) \qquad e^{i\omega} = \xi, \qquad e^{i\alpha} = a.$$

Nous aurons

$$\mathrm{OA} - k = i\,\frac{2a\xi\varpi - p(a^2+\xi^2)}{\xi^2 - a^2},$$

et, par suite, la relation (1) qui définit la courbe nous donnera

$$(6) \qquad 2\xi\varpi\sum\frac{am}{\xi^2-a^2} + \mathrm{C}' - \sum\frac{2pa^2m}{\xi^2-a^2} = 0.$$

Cette équation, ramenée à la forme entière, peut s'écrire

$$(7) \qquad 2\xi\varpi f(\xi^2) + \mathrm{F}(\xi^2) = 0,$$

le degré en ξ^2 du polynome $\mathrm{F}(\xi^2)$ étant, au plus, égal au nombre des segments et celui de $f(\xi^2)$ étant, au plus, inférieur d'une unité à ce nombre.

104. L'équation de la tangente à notre courbe, si l'on y introduit les notations précédentes, prend la forme très simple

$$(8) \qquad (x - yi)\xi^2 + x + yi + \frac{\mathrm{F}(\xi^2)}{f(\xi^2)} = 0$$

et elle met en évidence le résultat essentiel : *La courbe obtenue est d'une classe, au plus, égale au nombre des segments, et elle admet une seule tangente parallèle à une droite donnée.* Par conséquent, si p est sa classe, la droite de l'infini est, pour elle, une tangente multiple d'ordre $p-1$.

Réciproquement, soit

$$(9) \qquad 2\xi\varpi f(\xi^2) + \mathrm{F}(\xi^2) = 0$$

l'équation tangentielle d'une courbe écrite avec les variables ξ et ϖ qui donnent à l'équation de la tangente la forme

$$(10) \qquad (x - iy)\xi^2 + x + iy - 2\xi\varpi = 0.$$

Supposons que $f(\xi^2)$, $\mathrm{F}(\xi^2)$ soient des polynomes arbitrairement choisis, de degrés p et q respectivement, et soit n un nombre égal ou supérieur au plus grand des deux nombres $p+1$, q. Prenons

un polynome quelconque

$$\varphi(\xi^2) = (\xi^2 - a_1^2)(\xi^2 - a_2^2)\ldots(\xi^2 - a_n^2),$$

et décomposons en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{2\xi w f(\xi^2) + F(\xi^2)}{\varphi(\xi^2)},$$

nous aurons un résultat de la forme

$$2\xi w \sum \frac{A_i}{\xi^2 - a_i^2} + B + \sum \frac{A'_i}{\xi^2 - a_i^2} = 0$$

et il n'y aura aucune difficulté à identifier cette équation avec celle (6) que nous avons obtenue plus haut. On pourra faire, par exemple,

$$(11) \qquad a_k m_k = A_k, \qquad -2p_k a_k^2 m_k = A'_k, \qquad C' = B$$

et l'on retrouvera les n droites qui interviennent dans la définition primitive. Cette définition montre, d'ailleurs, que ces droites sont toutes tangentes à la courbe, car lorsqu'une droite mobile se confond avec l'une des droites fixes, un segment tel que OA devient indéterminé et peut être choisi de telle manière que la relation fondamentale soit vérifiée. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de $n^{ième}$ classe admettant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $n-1$, il y a une relation linéaire entre les segments interceptés par une tangente variable sur n tangentes fixes quelconques, ces segments étant comptés à partir de points fixes pris sur ces dernières tangentes.

105. Cette propriété est bien connue dans le cas de la parabole, qui est la plus simple des courbes que nous venons de définir.

On peut ici se poser un problème qui conduit à une question intéressante d'algèbre. Est-il possible de trouver n tangentes fixes de la courbe telles que ce soit la somme des segments $\overline{OA}$ qui demeure constante? D'après les résultats précédents, cela revient

à déterminer un polynome $\varphi(\xi)$ tel que l'on ait

$$\frac{f(\xi^2)}{\varphi(\xi^2)} = m\sum \frac{2a}{\xi^2 - a^2} = m\sum \frac{1}{\xi - a} - m\sum \frac{1}{\xi + a}.$$

Posons

$$f_1(\xi) = \prod(\xi - a). \tag{12}$$

On aura

$$\frac{f'_1(\xi)}{f_1(\xi)} = \sum \frac{1}{\xi - a}, \qquad \frac{f'_1(-\xi)}{f_1(-\xi)} = -\sum \frac{1}{\xi + a}$$

et l'équation à résoudre prendra la forme

$$\frac{1}{m} f(\xi^2) = f'_1(\xi) f_1(-\xi) + f_1(\xi) f'_1(-\xi).$$

Telle est l'équation qui devra déterminer $f_1(\xi)$. Pour la résoudre posons

$$\begin{cases} f_1(u) = \theta(u) + \sigma(u), \\ f_1(-u) = \theta(u) - \sigma(u), \end{cases} \tag{13}$$

de telle manière que $\theta(u)$ contienne tous les termes de degré pair et $\sigma(u)$ tous les termes de degré impair de $f_1(u)$. Alors, l'équation à résoudre prendra la forme

$$\frac{1}{2m} f(\xi^2) = \theta(\xi)\sigma'(\xi) - \theta'(\xi)\sigma(\xi). \tag{14}$$

Le second membre est ce que l'on appelle le *jacobien* des deux polynomes $\theta(\xi)$, $\sigma(\xi)$, et nous nous trouvons, dans un cas particulier, en présence du problème d'algèbre suivant :

Étant donné un polynome entier quelconque, déterminer deux autres polynomes dont il soit le jacobien.

Ce problème se présente dans un grand nombre de questions de géométrie, par exemple dans la recherche des courbes unicursales de l'espace dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Il est tout nouveau dans la théorie des formes algébriques. Un des auditeurs de mon cours de 1880, dans lequel j'avais indiqué l'intérêt qu'il faut attacher à sa solution, M. *Cyparissos Stephanos*, aujourd'hui professeur à l'Université d'Athènes, en a

fait l'objet d'études approfondies, exposées dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1881 [1].

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la courbe de troisième classe. On aura alors

$$f(\xi^2) = A\xi^4 + B\xi^2 + C.$$

Il faudra prendre

$$\theta(u) = bu^2 + d, \qquad \sigma(u) = au^3 + cu,$$

et l'équation à résoudre prendra la forme

$$\frac{1}{2m}(A\xi^4 + B\xi^2 + C) = (b\xi^2 + d)(3a\xi^2 + c) - 2b\xi^2(a\xi^2 + c),$$

ce qui donnera, en faisant $2m = 1$,

$$A = ab, \qquad B = 3ad - bc, \qquad C = cd.$$

Si l'on prend comme inconnue auxiliaire

$$B' = 3ad + bc,$$

B' sera déterminé par l'équation

$$B'^2 - B^2 = 12AC;$$

puis on aura

$$b = \frac{A}{a}, \qquad d = \frac{B + B'}{6a}, \qquad c = \frac{(B' - B)a}{2A},$$

de sorte que a demeurera arbitraire.

L'équation

$$f(\xi) = a\xi^3 + \frac{A}{a}\xi^2 + \frac{a(B' - B)}{2A} + \frac{B + B'}{6a} = 0$$

donnera tous les groupes de tangentes cherchés.

Nous ferons remarquer que, dans tous les cas, dès qu'on aura obtenu une solution quelconque de l'équation fonctionnelle (14), on en aura une plus générale, contenant une constante arbi-

---

[1] *Voir* le Mémoire *Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne*, présenté le 12 décembre 1881 à l'Académie des Sciences par M. Stephanos (*Comptes rendus*, t. 93, p. 994). A la suite d'un rapport de M. Jordan, inséré au Tome 94 des *Comptes rendus*, page 1230, le Mémoire de M. Stephanos a été inséré dans le *Recueil des Mémoires des Savants étrangers*.

traire, en remplaçant respectivement $\theta(u)$, $\sigma(u)$ par $\alpha\theta(u)$, $\frac{1}{\alpha}\sigma(u)$.

106. La définition que nous venons de donner des courbes de $n^{\text{ième}}$ classe pour lesquelles la droite de l'infini est tangente multiple de l'ordre $n-1$ peut se transformer de la manière suivante :

Soient (a_1), (b_1), ..., (l_1) n tangentes fixes de la courbe, et (T_1), ..., (T_{n+1}) $n+1$ tangentes variables qui couperont, par exemple, la tangente (a_1) en $n+1$ points A_1, A_2, ..., A_{n+1}, ..., la tangente (g_1) en $n+1$ points G_1, G_2, ..., G_{n+1}, et ainsi de suite. La définition primitive, appliquée successivement à toutes les tangentes (T_i), nous conduira aux équations

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\overline{O_1A_1} \quad + \alpha_2\overline{O_2B_1} \quad + \ldots + \alpha_n\overline{O_nL_1} \quad = k, \\ \alpha_1\overline{O_1A_2} \quad + \alpha_2\overline{O_2B_2} \quad + \ldots + \alpha_n\overline{O_nL_2} \quad = k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1\overline{O_1A_{n+1}} + \alpha_2\overline{O_2B_{n+1}} + \ldots + \alpha_n\overline{O_nL_{n+1}} = k. \end{array}\right.$$

L'élimination des constantes α_i nous conduit à une relation qui s'obtient en égalant à zéro le déterminant [1]

$$\left|\,\overline{O_1A_i}\quad \overline{O_2B_i}\quad \ldots\quad \overline{O_nL_i}\quad 1\,\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Écrivons qu'il y a une relation entre les lignes de ce déterminant. Nous serons conduits aux équations

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu_1 \qquad + \mu_2 \qquad + \ldots + \mu_{n+1} \qquad = 0, \\ \mu_1\overline{O_1A_1} + \mu_2\overline{O_1A_2} + \ldots + \mu_{n+1}\overline{O_1A_{n+1}} = 0, \\ \mu_1\overline{O_2B_1} + \mu_2\overline{O_2B_2} + \ldots + \mu_{n+1}\overline{O_2B_{n+1}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_1\overline{O_nL_1} + \mu_2\overline{O_nL_2} + \ldots + \mu_{n+1}\overline{O_nL_{n+1}} = 0. \end{array}\right.$$

Or, les rapports de ces nombres μ_1, ..., μ_{n+1} sont définis par les n premières équations précédentes qui ne mettent en œuvre que les tangentes (a_1), (b_1), ..., (k_1), (T_1), (T_2), ..., (T_{n+1}). Si donc on considère ces tangentes comme fixes, les rapports des nombres μ_i

---

[1] J'emploie ici, pour abréger l'écriture, une notation par laquelle Kronecker désigne le déterminant qu'on forme avec les lignes obtenues en donnant à i ses $n+1$ valeurs.

seront pleinement déterminés ; et la dernière des équations précédentes devra s'appliquer à une tangente *quelconque* de la courbe. On a donc le théorème suivant :

Si l'on considère une tangente variable de la courbe et $n+1$ *tangentes fixes, les* $n+1$ *points* A, B, C, ..., L *où cette tangente variable coupe les tangentes fixes donnent lieu à la relation*

$$\mu_1 \overline{OA} + \mu_2 \overline{OB} + \ldots + \mu_{n+1} \overline{OL} = 0, \tag{17}$$

$\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ *désignant des constantes liées par la relation*

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+1} = 0 \tag{18}$$

et O *étant un point quelconque de la tangente, qui ne joue aucun rôle en vertu de la relation précédente.*

On peut, par exemple, faire coïncider le point O avec A, ce qui donne la relation

$$\mu_2 \overline{AB} + \ldots + \mu_{n+1} \overline{AL} = 0.$$

La réciproque de la proposition précédente est aisée à démontrer. Il suffit de se servir de la relation qui nous a permis de calculer $\overline{OA}$, et l'on est conduit à l'équation

$$\sum \mu \frac{2ap\xi - w(a^2+\xi^2)}{a^2-\xi^2} = 0;$$

en tenant compte de la condition

$$\Sigma\mu = 0,$$

on trouvera l'équation

$$\sum \mu \frac{ap - \xi w}{\xi^2 - a^2} = 0,$$

qui nous ramène à la forme déjà obtenue

$$\xi w f_{n-1}(\xi^2) = f_n(\xi^2).$$

C'est la généralisation de la propriété anharmonique de la parabole, qui peut s'écrire

$$\frac{AB}{AC} = k$$

ou

$$\overline{OB} - k.\overline{OC} + (k-1)\overline{OA} = 0.$$

107. Les deux propositions précédentes s'étendent par projection à toute courbe de $n^{\text{ième}}$ classe ayant une tangente multiple d'ordre $n - 1$.

Prenons, par exemple, la première

$$\sum m\,\overline{OA} = k.$$

Sur chacune des droites, associons au point fixe O un autre point fixe A_1.

En substituant à la constante m la suivante

$$m\,\overline{OA_1} = m',$$

la relation peut s'écrire

$$\sum m' \mathcal{R}(A, A_1, O, \infty) = k$$

et ne contient plus que des rapports anharmoniques. Dans la projection, il faut substituer au point ∞ celui, P, où la droite fixe coupe la tangente multiple, et l'on a

$$(19) \qquad \sum m' \frac{OA}{OA_1} : \frac{PA}{PA_1} = k.$$

OA_1 et PA_1 étant des constantes, cette relation prend la forme

$$\sum m'' \frac{OA}{PA} = k$$

ou encore

$$(20) \qquad \sum \frac{m'''}{PA} = k',$$

m'', m''', k' désignant de nouvelles constantes.

Ainsi, quand la tangente multiple est à distance finie, la définition primitive se transforme dans la précédente.

Voyons maintenant la seconde propriété, exprimée par l'équation

$$\mu_2\,\overline{AB} + \ldots + \mu_{n+1}\,\overline{AL} = 0.$$

On peut l'écrire

$$\mu_2 + \mu_3 \mathcal{R}(A, \infty, C, B) + \ldots + \mu_{n+1} \mathcal{R}(A, \infty, L, B) = 0.$$

En faisant la perspective et désignant par P le point où la tan-

gente variable rencontre la tangente multiple, il viendra

$$\mu_2 + \mu_3 \mathcal{R}(A, P, C, B) + \ldots + \mu_{n+1} \mathcal{R}(A, P, L, B) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\mu_2 \frac{AB}{PB} + \mu_3 \frac{AC}{PC} + \ldots + \mu_{n+1} \frac{AL}{PL} = 0.$$

En introduisant la quantité μ_1, égale et de signe contraire à la somme des μ_i, on pourra écrire

$$(21) \qquad \mu_1 \frac{OA}{PA} + \mu_2 \frac{OB}{PB} + \ldots + \mu_{n+1} \frac{OL}{PL} = 0,$$

O étant un point quelconque de la droite ou, plus simplement encore,

$$(22) \qquad \frac{\mu_1}{PA} + \frac{\mu_2}{PB} + \ldots + \frac{\mu_{n+1}}{PL} = 0.$$

Pour montrer l'intérêt de cette proposition, il suffit de l'appliquer aux coniques. Ici, on peut prendre pour la tangente multiple une quelconque des tangentes de la conique; n est égal à 2. Si donc on écrit l'équation (21), en faisant coïncider le point O avec le point L (ici le point C), il vient

$$\frac{CA}{PA} : \frac{CB}{PB} = \text{const.}$$

C'est la propriété fondamentale relative au rapport anharmonique des quatre points où une tangente variable coupe quatre tangentes fixes.

108. Les propositions précédentes, transformées par le principe de dualité, s'appliquent aux courbes d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n - 1$.

Prenons, par exemple, la première définition

$$\sum m\, \overline{OA} = C,$$

qui définit la courbe de classe n ayant la droite à l'infini pour tangente multiple d'ordre $n - 1$, et écrivons-la sous la forme déjà donnée

$$\sum m' \mathcal{R}(O, \infty, A, A_1) = C.$$

Si nous appliquons la méthode des polaires réciproques, nous voyons qu'aux quatre points fixes en ligne droite O, ∞, A, A_1 correspondent quatre droites concourantes en un point fixe α; au point O correspond une droite fixe $\alpha O'$, le point ∞ a pour polaire une droite passant par le point α et le point p, pôle de la droite de l'infini; le point A a pour polaire la droite αM qui joint α à un point quelconque M de la courbe; quant au point A_1, il lui correspond une droite fixe passant par le point α. Le rapport anharmonique étant conservé, on a donc

$$\sum m' \frac{\sin \widehat{M\alpha O'}}{\sin \widehat{\beta\alpha O'}} : \frac{\sin \widehat{M\alpha p}}{\sin \widehat{\beta\alpha p}} = C.$$

Cette équation est de la forme

$$\sum m'' \frac{\sin \widehat{M\alpha O'}}{\sin \widehat{M\alpha p}} = C.$$

Quant au point p, c'est évidemment un point multiple d'ordre $n-1$ pour la courbe transformée.

Comme on a

$$\widehat{M\alpha O'} = \widehat{M\alpha p} + \widehat{p\alpha O'},$$

l'équation se transforme et peut s'écrire

$$\sum \lambda_k \cot(\widehat{p\alpha M}) = \text{const.},$$

les λ_k désignant de nouvelles constantes.

Prenons, par exemple, une conique, et plaçons le point p sur la courbe ainsi que les deux points α, β, on aura

$$(23) \qquad \lambda \cot(p\alpha M) + \lambda' \cot(p\beta M) = \text{const.},$$

les λ étant des constantes convenablement choisies.

Cette curieuse relation donne l'équation de la conique dans un système qui n'est, pour ainsi dire, jamais employé, celui des *coordonnées biangulaires*.

On peut, dans le plan, déterminer un point quelconque M par deux angles, par exemple par les angles $\widehat{M\alpha p}$, $\widehat{M\beta p}$. La relation

précédente serait l'équation de la conique dans ce système de coordonnées, pourvu que les trois points α, β, p fussent sur la conique.

109. Nous allons maintenant examiner d'autres problèmes qui conduisent à des courbes de $n^{\text{ième}}$ classe n'ayant plus qu'une tangente multiple d'ordre $n-2$.

Cherchons d'abord la courbe telle que, si l'on appelle $\overline{\mathrm{BC}}$ le segment intercepté sur la tangente par deux droites fixes, on ait, en considérant plusieurs couples de droites,

$$\sum m\,\overline{\mathrm{BC}} = 2k,$$

m et k désignant toujours des constantes.

Soient

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p &= 0,\\ x\cos\beta + y\sin\beta - q &= 0,\\ x\cos\omega + y\sin\omega - w &= 0 \end{aligned}$$

les équations des deux droites fixes et de la tangente variable. Si l'on pose

$$e^{i\alpha} = a, \qquad e^{i\beta} = b, \qquad e^{i\omega} = \xi,$$

un calcul analogue à ceux que nous avons faits nous donnera

$$i\,\overline{\mathrm{BC}} = 2a\frac{p\xi - aw}{\xi^2 - a^2} - 2b\frac{q\xi - bw}{\xi^2 - b^2},$$

en sorte que l'équation du lieu sera

$$ki = \xi\sum m\left(\frac{ap}{\xi^2 - a^2} - \frac{bq}{\xi^2 - b^2}\right) - w\sum\left(\frac{ma^2}{\xi^2 - a^2} - \frac{mb^2}{\xi^2 - b^2}\right).$$

Cette équation est de la forme

$$w\xi^2 f(\xi^2) = \mathrm{F}(\xi^2) + \xi f_1(\xi^2).$$

Si n est le nombre des segments $\overline{\mathrm{BC}}$, $\mathrm{F}(\xi^2)$ est de l'ordre $2n$ par rapport à ξ^2, $f_1(\xi^2)$ est de l'ordre $2n-1$ au plus, $f(\xi^2)$ est de l'ordre $2n-2$ en ξ^2. L'équation de la tangente étant

$$(24)\qquad x + yi + (x - yi)\xi^2 - \frac{\mathrm{F}(\xi^2) + \xi f_1(\xi^2)}{\xi f(\xi^2)} = 0,$$

on voit que la courbe sera de la classe $4n$. Et comme elle a deux tangentes parallèles à une droite donnée, qui correspondent à des valeurs de ξ égales et de signes contraires, on peut conclure que la droite de l'infini est une tangente multiple de l'ordre $4n-2$. On reconnaîtra aisément que la courbe passe par les deux points I et J et y touche la droite de l'infini.

Si la constante k n'est pas nulle, la fonction $F(\xi^2)$ est parfaitement déterminée, et par suite la courbe n'est susceptible que d'un seul mode de génération avec n segments.

Si k est nulle, nous retombons sur un cas que nous avons déjà étudié. Nous le laisserons de côté, et nous passerons à un problème qui comprend tous les précédents comme cas particuliers.

110. On sait que le cercle peut, d'une infinité de manières, être défini comme l'enveloppe d'une droite mobile qui forme avec deux droites fixes un triangle de périmètre constant. Cela nous conduit à examiner si cette propriété, comme celles que nous avons déjà généralisées, pourrait s'étendre à une classe de courbes de degré supérieur. Proposons-nous donc le problème suivant :

Déterminer la courbe enveloppe d'une droite mobile qui forme, avec n couples de droites fixes, n triangles dont les périmètres sont liés par une relation linéaire.

Pour résoudre ce problème, commençons par déterminer le périmètre d'un triangle formé avec les trois droites suivantes :

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x-yi)\,a^2+x+yi-2ap=0,\\ &(x-yi)\,b^2+x+yi-2bq=0,\\ &(x-yi)\,\xi^2+x+yi-2\varpi\xi=0. \end{aligned}\right.$$

Si nous désignons par A, B, C les sommets de ce triangle opposés respectivement au premier, au second et au troisième côté définis par les équations précédentes, on aura, par un calcul analogue à ceux que nous avons déjà faits,

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} i\,\overline{BC}&=2a\,\frac{p\xi-a\varpi}{\xi^2-a^2}-2b\,\frac{q\xi-b\varpi}{\xi^2-b^2},\\ i\,\overline{CA}&=2b\,\frac{qa-bp}{a^2-b^2}-2\xi\,\frac{\varpi a-p\xi}{a^2-\xi^2},\\ i\,\overline{AB}&=2\xi\,\frac{\varpi b-q\xi}{b^2-\xi^2}-2a\,\frac{pb-aq}{b^2-a^2}. \end{aligned}\right.$$

En ajoutant, on trouve la valeur suivante du demi-périmètre P du triangle

$$(27)\qquad -iP = \frac{p\xi - a\varpi}{\xi + a} + \frac{qa - bp}{a + b} + \frac{b\varpi - q\xi}{b + \xi}.$$

Si l'on se reporte à la définition du lieu que nous étudions et si l'on suppose que sa tangente soit représentée par la troisième des équations (25), il faudra écrire que l'on a

$$(28)\qquad \sum m\,P = C,$$

la somme étant étendue à n systèmes de valeurs de a, b, p, q, c'est-à-dire à n couples de droites. On trouve ainsi

$$(29)\qquad \begin{aligned} -Ci - \sum m\frac{aq - bp}{a + b} &= \sum m\left(\frac{p\xi - a\varpi}{\xi + a} - \frac{q\xi - b\varpi}{\xi + b}\right) \\ &= \sum m\xi\left[\frac{p + \varpi}{\xi + a} - \frac{q + \varpi}{\xi + b}\right]. \end{aligned}$$

En posant

$$(30)\qquad \left\{ \begin{aligned} & Ci + \sum m\frac{aq - bp}{a + b} = ki, \\ & \prod(\xi + a)(\xi + b) = \theta(\xi), \\ & ki + \sum m\xi\left(\frac{p}{\xi + a} - \frac{q}{\xi + b}\right) = \frac{F(\xi)}{\theta(\xi)}, \\ & \sum m\left(\frac{1}{\xi + a} - \frac{1}{\xi + b}\right) = \frac{f(\xi)}{\theta(\xi)}, \end{aligned} \right.$$

l'équation (29) prendra la forme

$$(31)\qquad F(\xi) + \xi\varpi f(\xi) = 0.$$

Si n est le nombre des triangles, $F(\xi)$ sera généralement du degré $2n$ en ξ; $f(\xi)$ sera seulement du degré $2(n-1)$. La classe de la courbe sera donc égale à $2n$, dans le cas général.

L'équation (31), faisant intervenir deux polynomes de degrés $2n$ et $2n-2$, dépend de $4n-1$ constantes. Le mode de génération que nous avons employé en comporte beaucoup plus : 5 pour chaque couple de droites (en y comprenant la constante m), ce qui fait $5n$ en tout. Il est donc à prévoir qu'il pourra être réalisé, en laissant arbitraires $n+1$ quantités. Voici comment on peut le démontrer.

Si l'on connaît les quantités a et b qui déterminent les directions des droites fixes employées pour former les triangles, ainsi que les quantités m, on aura les p et q et la constante k, en décomposant en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{F(\xi)}{\theta(\xi)}$. Cela permet de vérifier un fait qui est évident géométriquement : à savoir que les droites fixes doivent être des tangentes de la courbe. Car, lorsqu'une droite variable se confond avec une des droites fixes, le périmètre de l'un des triangles devient indéterminé et l'équation (29) se trouve vérifiée d'elle-même. Tout revient donc à trouver les $3n$ quantités a, b, m, de manière à vérifier l'équation

$$\sum m\left(\frac{1}{\xi+a}-\frac{1}{\xi+b}\right)=\frac{f(\xi)}{\theta(\xi)}. \tag{32}$$

Nous nous trouvons ici en présence d'un problème d'algèbre intéressant et nouveau : *Étant donné un polynome $f(\xi)$ d'un degré inférieur à $2n-1$, il faut trouver un polynome $\Theta(\xi)$ de degré $2n$ tel que les racines se partagent en n couples $(-a, -b)$ pour chacun desquels les coefficients de $\frac{1}{\xi+a}$, $\frac{1}{\xi+b}$ dans la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle $\frac{f(\xi)}{\Theta(\xi)}$ soient égaux et de signes contraires.*

Cela donnera évidemment $n-1$ conditions auxquelles devront satisfaire les couples (a, b) ; car on pourra se dispenser d'écrire la condition pour un des couples. Il restera donc $n+1$ arbitraires.

Pour montrer combien le problème est difficile, imposons-nous la condition que tous les coefficients m soient égaux, c'est-à-dire que ce soit la somme des périmètres qui soit constante. Alors, si l'on pose

$$\theta_1(\xi)=\prod(\xi+a), \qquad \theta_2(\xi)=\prod(\xi+b),$$

l'équation à résoudre prendra la forme

$$\theta_2(\xi)\,\theta_1'(\xi)-\theta_2'(\xi)\,\theta_1(\xi)=\frac{1}{m}f(\xi).$$

Nous sommes ainsi ramenés à un problème que nous avons déjà signalé : *trouver deux formes dont la jacobienne soit connue.*

Nous ferons seulement remarquer que, lorsqu'on aura obtenu

une solution, on en aura une infinité d'autres en prenant

$$(33) \qquad \begin{cases} \theta_3(\xi) = h\,\theta_1(\xi) + k\,\theta_2(\xi), \\ \theta_4(\xi) = h'\theta_1(\xi) + k'\theta_2(\xi), \end{cases}$$

car on aura

$$\theta_3\theta'_4 - \theta_4\theta'_3 = (kh' - hk')(\theta_2\theta'_1 - \theta_1\theta'_2)$$

et il suffira de choisir quatre constantes h, k, h', k' satisfaisant à l'unique relation

$$(34) \qquad kh' - hk' = 1.$$

Ainsi, *quand une courbe peut être obtenue comme l'enveloppe d'une droite qui détache dans n angles différents n triangles pour lesquels la somme des périmètres est constante, elle peut être obtenue d'une infinité de manières par ce mode de génération.*

Ici encore, nous obtenons la généralisation d'une des propriétés les plus importantes du cercle.

Il est à remarquer que les courbes étudiées plus haut (nos 103 à 109) sont comprises comme cas particulier dans celles que nous étudions ici. Considérons, en effet, un angle fixe de sommet A dans lequel la tangente mobile détache un triangle ABC. Comme nous avons tenu compte du sens des droites fixes AB, AC, nous pouvons changer le sens de ces droites et considérer que nous avons formé deux triangles, l'un dans lequel le périmètre sera $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$, l'autre dans lequel il sera $-\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}$; la somme des deux périmètres sera donc $2\overline{BC}$ et, en introduisant de telles sommes, nous retrouverons la définition du n° 109.

En changeant le sens d'un seul des côtés, on pourrait obtenir un nouveau triangle dont le périmètre serait, par exemple, $-AB + BC + CA$. La différence entre ce périmètre et le précédent étant $2\overline{AB}$, on voit qu'en employant de telles différences, on pourrait être conduit à la définition du n° 103.

Parmi les courbes auxquelles s'appliquent les propositions précédentes, on peut citer une série d'hypocycloïdes et, en particulier, l'hypocycloïde à trois rebroussements.

CHAPITRE III.

LES ÉLÉMENTS MÉTRIQUES DANS L'ESPACE.

Discussion de la formule qui donne la distance de deux points. — Droites isotropes. — Plans isotropes. — La géométrie dans un plan isotrope. — Définition de l'angle et de l'abscisse. — Valeurs diverses que l'on peut attribuer à l'angle de deux directions. — La définition de l'angle par un rapport anharmonique. — Droite perpendiculaire à un plan. — Distance d'un point à un plan, à une droite. — Discussion. — La distance d'un point à une droite a son carré décomposable en deux facteurs. — Propriété du tétraèdre dont les faces sont des plans isotropes.

---

111. Après avoir reconnu comment, dans le plan, on étend aux imaginaires les définitions et les propriétés établies pour les points réels, nous allons poursuivre notre étude en considérant les éléments imaginaires de l'espace.

Commençons d'abord par ce qui concerne la distance. Par définition, la distance de deux points imaginaires aura la même expression que s'il s'agissait de points réels. Si donc on désigne par x, y, z, t; x', y', z', t' les coordonnées rectangulaires homogènes de deux points, leur distance d sera déterminée par la formule

$$d^2 = \frac{(xt' - tx')^2 + (yt' - ty')^2 + (zt' - tz')^2}{t^2 t'^2}, \tag{1}$$

qui donne naissance aux mêmes remarques que la formule analogue relative au plan.

Cette distance aura, en général, deux valeurs égales et de signes contraires; mais elle pourra être indéterminée. Pour qu'il en soit ainsi, il faudra que son numérateur et son dénominateur soient nuls, et, par suite, que l'un des points au moins soit à l'infini.

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$t' = 0.$$

Le numérateur se réduira alors à

$$t^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

Il faudra donc, ou bien que t soit nul, et alors les deux points seront à l'infini, ou bien que, l'un des points étant quelconque, l'autre vérifie les deux équations

$$t'=0, \qquad x'^2+y'^2+z'^2=0. \tag{2}$$

Ces deux équations définissent une courbe située dans le plan de l'infini et qui, comme les points I et J dans le plan, joue un rôle fondamental en tout ce qui concerne les relations métriques. Comme l'équation générale d'une sphère est

$$x^2+y^2+z^2+2axt+2byt+2czt+ht^2=0,$$

on voit que la courbe représentée par les deux équations (2) appartient à toutes les sphères possibles. C'est pour cette raison qu'on l'a nommée *le cercle imaginaire de l'infini*. Le fait qu'elle appartient à toutes les sphères explique très bien pourquoi la distance d'un de ses points à tout point de l'espace apparaît comme indéterminée.

Pour deux points à distance finie, la distance d peut être nulle; cela arrive seulement lorsque la droite qui joint les deux points va rencontrer le cercle de l'infini.

Soient, en effet,

$$\left\{\begin{aligned} x &= az+p,\\ y &= bz+q \end{aligned}\right. \tag{3}$$

les équations d'une droite quelconque. Deux de ses points (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) donnent naissance aux relations

$$x-x_0=a(z-z_0), \qquad y-y_0=b(z-z_0).$$

Leur distance aura donc pour expression

$$d=\pm\sqrt{1+a^2+b^2}\,(z-z_0)$$

et elle sera nulle toutes les fois que l'on aura

$$a^2+b^2+1=0. \tag{4}$$

Comme a, b, 1 sont les coordonnées homogènes du point à l'infini sur la droite, on voit bien que ce point est sur la conique définie par les équations (2), c'est-à-dire sur le cercle de l'infini. On dit alors que *la droite est de longueur nulle* ou *qu'elle est isotrope*.

Toutes les droites isotropes qui passent en un point à distance finie engendrent *une sphère de rayon nul* ayant son centre en ce point, ou encore *un cône isotrope* ayant ce point pour sommet.

Si les équations d'une droite en coordonnées rectangulaires sont données sous la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{cases}$$

il faudra, pour qu'elle soit isotrope, que l'on ait

$$(6)\qquad (BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2 = 0$$

ou encore

$$(7)\qquad (A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2 = 0.$$

112. Un plan quelconque de l'espace coupe, en général, le cercle de l'infini en deux points distincts. Dans un tel plan, il y a donc deux séries de droites isotropes. Mais si le plan est tangent au cercle de l'infini, il ne contient plus qu'une série de droites isotropes. On dit alors que *le plan lui-même est isotrope*. Pour qu'un plan, représenté par l'équation homogène

$$(8)\qquad Ax + By + Cz + Dt = 0,$$

soit isotrope, il faut et il suffit que l'on ait

$$(9)\qquad A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

La géométrie des distances dans un plan isotrope se simplifie considérablement. En effet, si deux points, de coordonnées homogènes x, y, z, t; x', y', z', t', sont dans le plan défini par l'équation (8), on a évidemment

$$A(xt' - tx') + B(yt' - ty') + C(zt' - tz') = 0.$$

Supposons, par exemple, que C ne soit pas nul; on peut tirer de cette équation la valeur de $tz' - zt'$ et la porter dans l'expression de la distance des deux points qui devient, en tenant compte de la condition (9),

$$d^2 = -\left[\frac{B(xt' - tx') - A(yt' - ty')}{C\quad tt'}\right]^2$$

ou, en faisant t et t' égaux à 1,

$$d = \pm [i\,B(x - x') - i\,A(y - y')].$$

Ainsi *la distance devient rationnelle* et l'on voit alors que, si l'on considère trois points 1, 2, 3 dans le plan isotrope, on a certainement, entre leurs distances, la relation

$$\pm d_{12} \pm d_{23} \pm d_{31} = 0$$

exactement comme si les points étaient en ligne droite.

113. On peut, pour définir la distance, employer une autre méthode qui nous conduira, en même temps, aux deux notions de l'angle et de l'abscisse.

Soient

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{10}$$

les équations d'une droite. Si elle n'est pas isotrope, $a^2 + b^2 + c^2$ sera différent de zéro et l'on pourra définir les angles α, β, γ qu'elle fait avec les axes par les formules

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{11}$$

Déterminer un sens sur la droite, c'est choisir entre les deux déterminations, égales et de signes contraires, du radical. Quand on aura choisi ce sens, on pourra poser

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma} = \rho \tag{12}$$

et ρ *sera, en grandeur et en signe, l'abscisse* M_0M, M_0 et M étant respectivement les points de coordonnées x_0, y_0, z_0 et x, y, z.

Par définition, l'angle de deux droites non isotropes sera donné par la formule

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma', \tag{13}$$

α, β, γ et α', β', γ' étant les angles que font les deux droites avec les axes.

D'après ces définitions, on peut se rendre compte des différentes

valeurs que l'on peut attribuer à l'angle de deux droites. Soient

$$(14)\qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\qquad \frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}$$

les équations qui définissent deux directions. Leur angle V sera donné par la formule

$$(15)\qquad \cos V=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

et de là on déduira la valeur de $\sin V$, qui sera

$$(16)\qquad \sin V=\frac{\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

Les deux formules contiennent trois radicaux dont les signes sont tout à fait indépendants. Donc toutes les valeurs de l'angle sont comprises dans la formule

$$(17)\qquad V=\pm V_0+k\pi,$$

V_0 désignant l'une d'elles et k un entier, positif ou négatif. Même si l'on avait fixé un sens sur les deux droites, l'indétermination subsisterait, quoique moins grande, et V serait compris dans la formule

$$(18)\qquad V=\pm V'_0+2k\pi.$$

L'indétermination ne disparaîtra que si un signe est fixé pour chacun des radicaux. Nous savons que, pour ceux qui figurent dans l'expression de $\cos V$, la fixation d'un signe équivaut à la détermination d'un sens sur les deux droites dont on cherche l'angle. Essayons d'interpréter la signification géométrique qu'on peut donner à la fixation du signe du troisième radical

$$\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2},$$

qui figure dans l'expression de $\sin V$.

Pour cela, nous remarquerons que la perpendiculaire aux deux droites dont on cherche l'angle a sa direction déterminée par les équations

$$(19)\qquad \frac{x}{bc'-cb'}=\frac{y}{ca'-ac'}=\frac{z}{ab'-ba'};$$

fixer un signe au radical qui figure dans le sinus équivaudra donc à assigner un sens à cette perpendiculaire.

114. Tous ces faits, et d'autres encore, s'expliqueront sans difficulté si, dans l'espace comme sur le plan, on rattache la notion de l'angle à celle du rapport anharmonique.

Soient A, A' deux points à l'infini, dont les coordonnées a, b, c, o, a', b', c', o définissent deux directions. Cherchons l'intersection de la droite AA' avec le cercle imaginaire de l'infini. En appliquant une méthode générale, nous aurons à déterminer λ par l'équation

$$(a+\lambda a')^2+(b+\lambda b')^2+(c+\lambda c')^2=0,$$

qui fera connaître les deux valeurs de λ relatives aux points μ, μ' d'intersection avec le cercle de l'infini. En ordonnant l'équation précédente, il vient

$$(20) \qquad \lambda^2(a'^2+b'^2+c'^2)+2\lambda(aa'+bb'+cc')+a^2+b^2+c^2=0.$$

Soient λ, λ' les deux racines qui définissent les deux points μ, μ'. On aura, nous le savons,

$$\mathcal{R}(A, A', \mu, \mu')=\frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Si l'on désigne par r ce rapport, il aura évidemment deux valeurs $\frac{\lambda}{\lambda'}$ et $\frac{\lambda'}{\lambda}$, puisqu'on peut échanger les deux racines. Il sera déterminé par l'équation du second degré

$$(21) \qquad \frac{(\lambda+\lambda')^2}{\lambda\lambda'}=\frac{4(aa'+bb'+cc')^2}{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)}=\frac{(r+1)^2}{r}.$$

Si donc on introduit l'angle V, qui est défini par l'équation (15), on aura

$$(22) \qquad (r+1)^2=4r\cos^2 V$$

et de là on déduira les deux valeurs de r

$$r=e^{2iV}, \qquad r'=e^{-2iV}.$$

On a donc, en remarquant que les deux valeurs sont réciproques,

$$(23) \qquad e^{2iV}=r, \qquad V=\frac{1}{2i}\operatorname{Log}(A, A', \mu, \mu').$$

Ainsi, *l'angle s'exprime de la même manière qu'en Géométrie plane*, pourvu qu'on prenne pour les points I et J du plan parallèle aux deux directions les deux points μ, μ' où ce plan coupe le cercle de l'infini. L'indétermination plus complète de l'angle dans l'espace tient à ce que rien n'y distingue les points μ, μ', *qu'on peut échanger, l'un avec l'autre*.

Pour obtenir une détermination de l'angle aussi précise que dans le plan, il suffit de fixer un sens, non seulement sur les deux directions, mais encore sur la droite qui leur est perpendiculaire; si nous conservons les notations précédentes, la direction perpendiculaire aux deux droites est définie par les équations

$$\frac{x}{bc'-cb'} = \frac{y}{ca'-ac'} = \frac{z}{ab'-ba'}. \tag{24}$$

Fixer un sens sur une droite non isotrope, c'est évidemment distinguer entre les deux points où la parallèle menée par l'origine à sa direction

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

coupe la sphère de rayon 1

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{25}$$

Pour bien définir les sens sur les deux droites et sur leur perpendiculaire, on peut donc donner les coordonnées x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' des trois points où les deux droites D, D' et leur perpendiculaire Δ coupent la sphère. Alors, les formules (19), rapprochées des relations (15) et (16), nous permettent d'écrire le système des relations

$$\left\{\begin{aligned} \cos(D, D') &= xx' + yy' + zz', \\ x'' \sin(D, D') &= yz' - zy', \\ y'' \sin(D, D') &= zx' - xz', \\ z'' \sin(D, D') &= xy' - yx' \end{aligned}\right. \tag{26}$$

qui définissent l'angle en grandeur et en signe, *à un multiple près de* 2π. Elles concordent avec les conventions que l'on a faites dans le cas où les directions sont réelles. Si on les applique à deux directions parallèles au plan des xy, elles concordent avec celles que nous avons données en Géométrie plane.

Nous reviendrons sur ces formules; mais auparavant nous ferons remarquer qu'il n'y a pas lieu de recommencer une discussion pour ce qui concerne les angles d'un plan et d'une droite, ou l'angle de deux plans.

Une droite sera perpendiculaire à un plan quand elle sera perpendiculaire à toutes les droites de ce plan. Comme deux directions perpendiculaires coupent le plan de l'infini en deux points qui sont conjugués par rapport au cercle de l'infini, un plan et l'une de ses perpendiculaires couperont le plan de l'infini suivant une droite et un point tels que la droite sera la polaire du point par rapport au cercle de l'infini. La perpendiculaire à un plan ne sera donc jamais dans ce plan, à moins que le plan ne soit tangent au cercle de l'infini. Alors le plan sera isotrope; et, *si* A *est son point de contact avec le cercle de l'infini, toutes les droites qui lui sont perpendiculaires iront passer en* A.

La méthode pour obtenir la distance d'un point à un plan subsistera quand les éléments deviendront imaginaires; et la formule

$$d = \pm \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{27}$$

sera toujours valable tant que le plan ne sera pas isotrope. Si le plan est isotrope, la distance d deviendra *infinie* à moins que le point ne soit dans le plan, auquel cas elle sera *indéterminée*.

115. Envisageons maintenant ce qui concerne la distance d'un point à une droite.

Soient

$$\left\{ \begin{aligned} P &= a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \\ Q &= a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{aligned} \right. \tag{28}$$

les équations d'une droite, prises sous la forme la plus générale. D'un point (x, y, z) de l'espace, abaissons une perpendiculaire sur cette droite et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du pied de cette perpendiculaire. Elles satisferont aux trois équations

$$\left\{ \begin{aligned} &(bc' - cb')(x - x_1) + (ca' - ac')(y - y_1) + (ab' - ba')(z - z_1) = 0, \\ &P = a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) + c\,(z - z_1), \\ &Q = a'(x - x_1) + b'(y - y_1) + c'(z - z_1). \end{aligned} \right. \tag{29}$$

La distance du point à la droite sera donnée par la formule

$$d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2;$$

si l'on forme les combinaisons $a' \mathrm{P} - a\mathrm{Q}$, $b'\mathrm{P} - b\mathrm{Q}$, $c'\mathrm{P} - c\mathrm{Q}$, et si l'on ajoute leurs carrés ainsi que celui de la première équation (29), on verra aisément que l'on a

$$(30) \qquad \begin{aligned} &d^2[(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2] \\ &\quad = (a'\mathrm{P} - a\mathrm{Q})^2 + (b'\mathrm{P} - b\mathrm{Q})^2 + (c'\mathrm{P} - c\mathrm{Q})^2. \end{aligned}$$

Si l'on avait adopté des coordonnées homogènes en désignant par x, y, z, t les coordonnées du point considéré et par P et Q les fonctions

$$(31) \qquad \mathrm{P} = ax + by + cz + dt, \qquad \mathrm{Q} = a'x + b'y + c'z + d't,$$

on aurait

$$(32) \qquad d^2 = \frac{(a'\mathrm{P} - a\mathrm{Q})^2 + (b'\mathrm{P} - b\mathrm{Q})^2 + (c'\mathrm{P} - c\mathrm{Q})^2}{t^2[(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2]}.$$

On interprète très simplement le numérateur. En effet, soit

$$\mathrm{P} - \lambda \mathrm{Q} = 0$$

l'équation d'un plan passant par la droite. Si l'on exprime qu'il est isotrope, on aura la condition

$$(a - \lambda a')^2 + (b - \lambda b')^2 + (c - \lambda c')^2 = 0,$$

et si l'on remplace λ par $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, on trouvera la relation

$$(33) \qquad (a'\mathrm{P} - a\mathrm{Q})^2 + (b'\mathrm{P} - b\mathrm{Q})^2 + (c'\mathrm{P} - c\mathrm{Q})^2 = 0$$

dont le premier membre est le numérateur de l'expression de d^2. Ainsi, *ce numérateur, égalé à zéro, représente les deux plans isotropes passant par la droite.*

Ces deux plans sont en général distincts, ils passent par l'une ou l'autre des deux tangentes que l'on peut mener au cercle de l'infini du point où la droite coupe le plan de l'infini. Mais ils se confondent si la droite elle-même est isotrope.

D'après cela, on peut interpréter très simplement le cas d'indétermination que présente la formule (32). Pour que d soit indé-

terminée, il faut que le point (x, y, z, t) soit à la fois dans le plan de l'infini et dans un des plans isotropes passant par la droite. Toutefois, si la droite est isotrope, le coefficient de t^2 dans le dénominateur de d^2 sera nul, et il suffira que le point soit dans l'unique plan isotrope passant par la droite.

Dans le cas général, quand la droite n'est pas isotrope, la distance sera nulle toutes les fois que le point, à distance finie, sera dans un des deux plans isotropes passant par la droite. Alors, la perpendiculaire abaissée du point sur la droite sera elle-même une droite isotrope.

On le voit, c'est la distance d'un point à une droite qui se rapproche le plus de la distance des deux points dans le plan. Car ces deux éléments ont en commun cette propriété fondamentale, qui n'appartient pas à la distance de deux points dans l'espace, d'avoir leur carré décomposable en un produit de deux facteurs. Si l'on a choisi, pour déterminer la droite, les deux plans P et Q qui la contiennent et sont isotropes, on aura

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0, \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 0$$

et l'expression de la distance deviendra

$$d^2 = \frac{2PQ}{t^2(aa' + bb' + cc')}. \tag{34}$$

Cette formule permettra de constituer pour les droites une théorie analogue à celle des segments associés. Par exemple, si l'on envisage un tétraèdre dont toutes les faces soient des plans isotropes, les produits des distances d'un point quelconque de l'espace aux trois couples d'arêtes opposés seront proportionnels.

CHAPITRE IV.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE LA SPHÈRE.

Les quadriques et leurs génératrices rectilignes. — Projection stéréographique. — Expressions diverses du rapport anharmonique de quatre génératrices. — Il est égal au rapport anharmonique des quatre points où elles coupent une section plane de la surface, pris par rapport à cette section. — Génératrices rectilignes de la sphère. — Système de coordonnées déterminé sur la sphère par les deux familles de génératrices. — On peut choisir les deux coordonnées de telle manière qu'une même substitution linéaire effectuée sur ces coordonnées définisse, soit une rotation finie de la sphère, soit un déplacement des axes coordonnés. — Formules relatives à ce sujet. — Expression en fonction des nouvelles coordonnées de la distance de deux points de la sphère et, par conséquent, de l'angle de deux directions. — Relation métrique fondamentale relative à une génératrice rectiligne de la sphère.

---

116. Pour approfondir ce qui concerne les relations métriques précédemment données, il est nécessaire que nous fassions connaître quelques propriétés des quadriques relatives à leurs génératrices rectilignes et à leur représentation paramétrique.

Écrivons l'équation d'une quadrique quelconque rapportée à un tétraèdre conjugué, c'est-à-dire ramenée par une décomposition en carrés à la forme

$$aP^2 + bQ^2 + cR^2 + dS^2 = 0.$$

Il est clair que, si l'on néglige toute distinction entre le réel et l'imaginaire, on peut donner à cette équation la forme encore plus simple

$$PQ = RS. \tag{1}$$

Il suffit, par exemple, de décomposer en deux facteurs $aP^2 + bQ^2$ et $cR^2 + dS^2$. Or, la forme réduite précédente met en évidence les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface; ils

seront définis respectivement par les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} R = \lambda P, \\ Q = \lambda S, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} R = \mu Q, \\ P = \mu S. \end{cases}$$

De là on tire

$$(4)\qquad \frac{P}{\mu} = \frac{Q}{\lambda} = \frac{R}{\lambda\mu} = \frac{S}{1}$$

et, par conséquent, les coordonnées d'un point arbitraire de la quadrique seront représentées, *dans un système de coordonnées tétraédriques quelconques*, par des formules telles que les suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} \rho X = a\ \lambda\mu + b\ \lambda + c\ \mu + d, \\ \rho Y = a'\ \lambda\mu + b'\ \lambda + c'\ \mu + d', \\ \rho Z = a''\ \lambda\mu + b''\ \lambda + c''\ \mu + d'', \\ \rho T = a'''\lambda\mu + b'''\lambda + c'''\ \mu + d''', \end{cases}$$

où ρ désigne un facteur de proportionnalité.

Réciproquement, tout système de formules de ce genre représente une quadrique toutes les fois que le déterminant

$$\Sigma \pm ab'c''d'''$$

n'est pas nul. Car alors, on pourra les résoudre par rapport à $\lambda\mu$, λ, μ, 1 et obtenir un résultat de la forme

$$\mu = \rho P, \qquad \lambda = \rho Q, \qquad \lambda\mu = \rho R, \qquad 1 = \rho S,$$

P, Q, R, S étant quatre fonctions linéairement indépendantes de X, Y, Z, T. L'élimination de λ, μ, ρ conduira à l'équation (1), et les formules (5) montrent d'ailleurs immédiatement que les lignes sur lesquelles demeure constant l'un des paramètres λ ou μ sont des génératrices rectilignes de la surface.

Toutes les fois que l'on peut représenter les coordonnées d'un point d'une surface par des formules telles que les suivantes :

$$(6)\quad \rho X = f(\lambda, \mu), \quad \rho Y = f_1(\lambda, \mu), \quad \rho Z = f_2(\lambda, \mu), \quad \rho T = f_3(\lambda, \mu)$$

les fonctions f_i étant rationnelles et telles qu'à un système de valeurs des rapports de X, Y, Z, T *ne corresponde qu'un seul système de valeurs de* λ *et de* μ, on dit que *la surface est repré-*

sentée sur le plan. En chassant les dénominateurs, on peut toujours rendre entières les fonctions f, f_1, f_2, f_3 et en remplaçant λ, μ, par $\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}$, on peut les rendre homogènes et du même degré. Ainsi on peut ramener les formules (6) à la forme générale

$$(7)\quad \rho X = f(\lambda, \mu, \nu), \quad \rho Y = f_1(\lambda, \mu, \nu), \quad \rho Z = f_2(\lambda, \mu, \nu), \quad \rho T = f_3(\lambda, \mu, \nu)$$

où les fonctions f_i sont des polynomes homogènes du même degré. En éliminant les rapports $\frac{\lambda}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}$ entre les équations précédentes, on aurait l'équation de la surface. On peut admettre qu'à un point de la surface correspond un seul système de valeurs des rapports de λ, μ, ν. Si donc on considère ces trois quantités comme les coordonnées homogènes d'un point du plan, la correspondance entre les points de la surface et ceux du plan sera univoque; c'est-à-dire à chaque point de l'une des surfaces correspondra un seul point de l'autre.

117. Des correspondances de ce genre avaient été reconnues depuis longtemps en Géométrie. Dès l'antiquité, on avait étudié la projection stéréographique, qui établit une correspondance uniforme entre les points de la sphère et ceux de l'équateur (si le point de vue est placé au pôle). Chasles avait étendu à toutes les quadriques la projection stéréographique. Si l'on place le point de vue en un point quelconque de la quadrique et si l'on choisit pour plan du tableau un plan quelconque, il est clair qu'à un point de la surface correspondra un seul point du plan et *vice versa.* Il y a cependant une exception importante à cette proposition. Si A est le point de vue et si B et C sont les points du plan situés sur les génératrices rectilignes de la surface qui se croisent en A, il est clair qu'à l'un des points B ou C du plan correspondent tous les points de la surface situés sur l'une ou sur l'autre des génératrices AB ou AC.

Si l'on considère une section de la surface par un plan P, le cône de sommet A ayant pour base cette section coupera suivant une conique le plan du tableau. Ainsi, *les sections planes de la surface sont représentées par des coniques;* mais *ces coniques ne sont pas quelconques, elles passent par les points* B *et* C *où le plan* P *coupe les deux génératrices rectilignes qui se croisent en* A.

Si, par exemple, le point A est placé en un ombilic, qui, par définition, est l'un des points par lesquels passent deux génératrices rectilignes isotropes, et si l'on projette sur un plan parallèle au plan tangent en A, les sections planes de la surface seront représentées par des coniques passant aux points I et J, c'est-à-dire par des cercles. Mais c'est seulement dans le cas où la quadrique est une sphère que la projection stéréographique conserve les angles. Cela est aisé à démontrer.

Dans le cas où la quadrique a ses génératrices réelles, les sections planes sont représentées par des coniques qui passent en deux points réels, par exemple, par des hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles.

118. Revenons aux formules (2), (3) qui nous ont servi de point de départ. Nous dirons que les génératrices rectilignes qui correspondent à une valeur déterminée de λ forment le premier système; et que celles qui correspondent à une même valeur de μ forment le second système. Deux génératrices d'un même système ne se coupent pas, mais deux génératrices de système différent se coupent toujours. Nous allons montrer que le rapport anharmonique des quatre points où quatre génératrices fixes de l'un des systèmes sont coupées par une génératrice variable de l'autre système est un nombre constant.

Considérons, en effet, quatre génératrices du premier système, par exemple, correspondant aux valeurs λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 de λ. Elles sont coupées par toute génératrice du second système en quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 qui sont évidemment dans les plans

$$(8) \qquad R = \lambda_1 P, \qquad R = \lambda_2 P, \qquad R = \lambda_3 P, \qquad R = \lambda_4 P.$$

Ces quatre plans se coupant suivant une même droite, le rapport anharmonique des quatre points m_i est évidemment égal à celui des valeurs correspondantes λ_i de λ. La proposition est donc démontrée.

Elle peut être beaucoup généralisée. Considérons une section plane quelconque (Σ). Elle coupe la droite

$$R = 0, \qquad P = 0$$

en un point α, et les quatre plans représentés par les équations (8)

coupent le plan de (Σ) suivant quatre droites rencontrant la conique de section, d'abord au point α, puis en quatre autres points μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. Quant aux quatre plans définis par les équations (8), ils coupent le plan de section suivant les quatre droites $\alpha\mu_1$, $\alpha\mu_2$, $\alpha\mu_3$, $\alpha\mu_4$ dont le rapport anharmonique est le même que celui des quatre plans, c'est-à-dire est égal au rapport anharmonique des paramètres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Or, ce rapport anharmonique des quatre droites $\alpha\mu_i$ est, par définition, celui des quatre points μ_i sur la conique.

Ainsi, nous pourrons parler du rapport anharmonique de quatre génératrices rectilignes appartenant à un même système; c'est celui des quatre points où elles coupent une génératrice quelconque de l'autre système et nous aurons aussi la proposition suivante, qui nous sera très utile :

Si l'on considère quatre points μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sur une section plane quelconque de la surface, leur rapport anharmonique, évalué en les considérant comme appartenant à cette section, sera égal à celui des génératrices de l'un ou de l'autre système qui se croisent en ces quatre points. Le rapport anharmonique sera donc le même pour les génératrices appartenant aux deux systèmes différents.

119. Les résultats que nous venons d'établir sur les génératrices rectilignes des quadriques vont nous permettre de présenter d'une manière intuitive quelques-unes des remarques que nous avons faites sur la définition des angles.

Considérons la sphère de rayon 1, qui joue dans cette définition un rôle si essentiel. Elle est représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{9}$$

que l'on peut écrire

$$(x + yi)(x - yi) = (1 - z)(1 + z).$$

Si donc on pose

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x + yi}{1 - z} &= \alpha = \frac{1 + z}{x - yi}, \\ \frac{x - yi}{1 - z} &= -\frac{1}{\beta} = \frac{1 + z}{x + yi}, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

on aura les deux systèmes d'équations qui définissent les génératrices rectilignes de la sphère. Les expressions de x, y, z en fonction de α, β seront

$$(11) \qquad x = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \qquad y = i\frac{1 + \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \qquad z = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}.$$

Ici, les courbes qui serviraient de représentation aux sections planes de la surface seraient des hyperboles équilatères ayant leurs asymptotes parallèles aux axes. Les variables α et β définissent un système de coordonnées curvilignes imaginaires sur la sphère. Les génératrices rectilignes pour lesquelles $\alpha = \text{const.}$ seront dites, dans ce qui va suivre, les génératrices du premier système; celles sur lesquelles β demeurera constante seront dites les génératrices rectilignes du second système. Pour passer d'un point au point diamétralement opposé, il suffit d'échanger α et β.

Il y a lieu de remarquer que l'on aurait pu déterminer autrement les génératrices rectilignes. Faisons, par exemple, une permutation circulaire sur x, y, z; on aurait été conduit à substituer à α, β les variables

$$(12) \qquad \alpha' = \frac{y + iz}{1 - x}, \qquad \beta' = -\frac{y + iz}{1 + x}.$$

En substituant dans ces expressions les valeurs (11) de x, y, z, on trouve

$$(13) \qquad \alpha' = i\frac{1 + \alpha}{\alpha - 1}, \qquad \beta' = i\frac{1 + \beta}{\beta - 1}.$$

Une nouvelle permutation circulaire donnerait les valeurs

$$(14) \qquad \alpha'' = \frac{\alpha + i}{\alpha - i}, \qquad \beta'' = \frac{\beta + i}{\beta + i}.$$

On passe des premières variables aux autres en effectuant, on le voit, des substitutions linéaires très simples.

Mais ce changement de notations conduit à une conséquence très importante. On sait, depuis Euler, que tout changement des axes coordonnés, dans lequel le trièdre formé par les axes conserve la même origine et la même orientation, peut se ramener à trois changements successifs dans chacun desquels on conservera l'un des axes. Effectuons le premier, par exemple autour de Oz.

Les formules qui le définiront seront

$$(15) \qquad z = z_1, \qquad x + iy = (x_1 + iy_1)\, e^{i\theta},$$

θ étant l'angle dont on fera tourner le premier système d'axes autour de Oz pour avoir le second. Si donc on désigne par α_1, β_1 ce que deviennent les variables α et β dans le nouveau système de coordonnées, on aura

$$(16) \qquad \alpha = \alpha_1\, e^{i\theta}, \qquad \beta = \beta_1\, e^{i\theta}.$$

En d'autres termes, *α et β seront transformés par la même substitution linéaire.*

Si l'on a à effectuer un changement dans lequel on tournera autour de Ox, on aura de même

$$\frac{1+\alpha}{\alpha-1} = e^{i\sigma}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1-1}, \qquad \frac{1+\beta}{\beta-1} = e^{i\sigma}\frac{1+\beta_1}{\beta_1-1};$$

α et β se transforment encore par une même substitution linéaire; et il en sera ainsi évidemment si l'on effectue un changement de coordonnées en conservant Oy. Mais, en combinant ces changements d'axes partiels, on sait, nous l'avons rappelé, que l'on obtient le changement d'axes le plus général. On a donc ce beau théorème, dû, pour les points essentiels, à l'illustre géomètre anglais *Cayley*.

Le changement d'axes le plus général se traduit par une même substitution linéaire effectuée sur les paramètres α et β des coordonnées rectilignes, tels que nous les avons définis.

Soient

$$(17) \qquad \alpha_1 = \frac{m\alpha+n}{p\alpha+q}, \qquad \beta_1 = \frac{m\beta+n}{p\beta+q},$$

les formules par lesquelles on passe du système de coordonnées primitif à un système quelconque. Si x_1, y_1, z_1 désignent les nouvelles coordonnées, on aura

$$(18) \qquad x_1 = \frac{1-\alpha_1\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}, \qquad y_1 = i\,\frac{1+\alpha_1\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}, \qquad z_1 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}.$$

En portant les valeurs de α_1, β_1 dans ces expressions, on trouve

un résultat de la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} x_1 = a\,x + b\,y + c\,z, \\ y_1 = a'x + b'y + c'z, \\ z_1 = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

a, b, c, a', ... ayant les valeurs suivantes :

$$(20)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{m^2+q^2-n^2-p^2}{2\mathrm{D}}, & b = i\,\dfrac{m^2+n^2-p^2-q^2}{2\mathrm{D}}, & c = \dfrac{pq-mn}{\mathrm{D}}, \\[2ex] a' = i\,\dfrac{q^2+n^2-m^2-p^2}{2\mathrm{D}}, & b' = \dfrac{m^2+n^2+p^2+q^2}{2\mathrm{D}}, & c' = i\,\dfrac{pq+mn}{\mathrm{D}}, \\[2ex] a'' = \dfrac{nq-mp}{\mathrm{D}}, & b'' = -\,i\,\dfrac{mp+nq}{\mathrm{D}}, & c'' = \dfrac{mq+np}{\mathrm{D}}, \end{cases}$$

et D étant le déterminant de la substitution

$$\mathrm{D} = mq - np.$$

Ces formules ont l'inconvénient de ne pas mettre en évidence les changements réels de coordonnées. Mais si l'on remarque que, d'après la définition même de α et de β, la première de ces coordonnées α relative à tout point réel a pour imaginaire conjuguée $-\frac{1}{\beta}$, on verra que la formule

$$\alpha_1 = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}$$

se transforme, si l'on y change i en $-i$, dans la suivante :

$$-\frac{1}{\beta_1} = \frac{-m_0 + n_0\beta}{-p_0 + q_0\beta},$$

m_0, n_0, p_0, q_0 étant les constantes imaginaires conjuguées de m, n, p, q. Il faudra que cette relation nouvelle entre β et β_1 soit identique à la seconde des formules (17). Posons

$$(21)\qquad \begin{cases} m = \quad \rho - i\nu, & n = \mu - i\lambda, \\ p = -\mu - i\lambda, & q = \rho + i\nu, \end{cases}$$

on verra aisément qu'il suffit, pour que la condition soit remplie, que λ, μ, ν, ρ soient réels et que cette hypothèse donne tous les changements d'axes réels. On aura alors

$$(22)\qquad \alpha_1 = \frac{(\rho - i\nu)\alpha + \mu - i\lambda}{(-\mu - i\lambda)\alpha + \rho + i\nu}, \qquad \beta_1 = \frac{(\rho - i\nu)\beta + \mu - i\lambda}{(-\mu - i\lambda)\beta + \rho + i\nu},$$

et les expressions (20) des neuf cosinus deviendront

$$
(23)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
a = \dfrac{\rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{D}, & b = 2\dfrac{\lambda\mu+\nu\rho}{D}, & c = 2\dfrac{\lambda\nu-\mu\rho}{D}, \\[2ex]
a' = 2\dfrac{\lambda\mu-\nu\rho}{D}, & b' = \dfrac{\rho^2+\mu^2-\lambda^2-\nu^2}{D}, & c' = 2\dfrac{\mu\nu+\lambda\rho}{D}, \\[2ex]
a'' = 2\dfrac{\lambda\nu+\mu\rho}{D}, & b'' = 2\dfrac{\mu\nu-\lambda\rho}{D}, & c'' = \dfrac{\rho^2+\nu^2-\lambda^2-\mu^3}{D},
\end{array}
\right.
$$

D ayant pour valeur

$$
(24)\qquad D = \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2.
$$

120. Les formules qui définissent un changement d'axes peuvent être considérées sous un point de vue différent du précédent. Au lieu de supposer qu'elles donnent les relations entre les coordonnées *d'un même point* prises relativement à deux systèmes d'axes *distincts*, on peut supposer que x_1, y_1, z_1; x, y, z soient les coordonnées de deux points *différents* M_1 et M, *rapportées à un même système d'axes, le système primitif*. Alors, il est clair que M_1 se déduira de M par la rotation qui amènera le second système d'axes à coïncider avec le premier. Inversement, M se déduira de M_1 par le déplacement qui amènera $Oxyz$ à coïncider avec $Ox_1y_1z_1$.

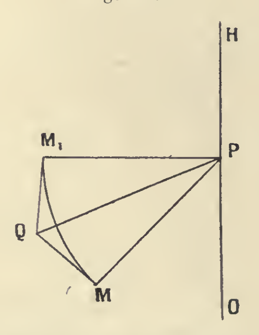
En se plaçant à ce point de vue, on peut retrouver d'une manière tout élémentaire les résultats précédents, et obtenir la signification géométrique des constantes λ, μ, ν, ρ.

Considérons une figure mobile ayant un point fixe O et rapportons-la à un trièdre trirectangle $Oxyz$. Si on lui imprime une rotation d'angle θ autour d'un certain axe OH passant par O (*fig.* 18), un point quelconque M de cette figure viendra occuper la position M_1. Il y aura un plan perpendiculaire à OH, passant par M et par M_1, et, dans ce plan, un cercle passant en M et en M_1, dont le centre P sera sur OH. Menons les tangentes à ce cercle en M et en M_1; elles se coupent en un point Q. Nous allons déterminer de deux manières différentes les coordonnées du point Q.

L'angle MPM_1 étant égal à θ, l'angle MPQ sera égal à $\frac{\theta}{2}\cdot$ Par conséquent, si l'on imprimait à la figure mobile *dans sa première position* une rotation *infiniment petite* autour de OH, dont la

vitesse angulaire serait $\tang \frac{\theta}{2}$, la vitesse du point M serait, en grandeur et en signe, égale au segment MQ.

Fig. 18.



Si donc on désigne par x, y, z les coordonnées du point M et si l'on pose, α, β, γ désignant les angles de OH avec les axes,

$$(25)\qquad \frac{\lambda}{\rho} = \cos\alpha \tang\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\mu}{\rho} = \cos\beta \tang\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\nu}{\rho} = \cos\gamma \tang\frac{\theta}{2},$$

$\frac{\lambda}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}$ seront les trois composantes, relatives aux axes coordonnés, de la rotation infiniment petite considérée et les projections de MQ sur les trois axes seront

$$\frac{\mu z - \nu y}{\rho}, \quad \frac{\nu x - \lambda z}{\rho}, \quad \frac{\lambda y - \mu x}{\rho}.$$

Pour obtenir les coordonnées x', y', z' du point Q, il faudra ajouter les projections de OM à celles de MQ, ce qui donnera

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho x' &= \rho x + \mu z - \nu y,\\ \rho y' &= \rho y + \nu x - \lambda z,\\ \rho z' &= \rho z + \lambda y - \mu x. \end{aligned}\right.$$

Envisageons maintenant la figure dans sa seconde position ; on remarquera que $M_1 Q$ serait la vitesse du point M_1 si l'on imprimait à la figure une rotation *infiniment petite*, *égale et de signe contraire* à la première. Si donc x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées du point M_1 on aura de même, en changeant le signe de ρ,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho x' &= \rho x_1 - \mu z_1 + \nu y_1,\\ \rho y' &= \rho y_1 - \nu x_1 + \lambda z_1,\\ \rho z' &= \rho z_1 - \lambda y_1 + \mu x_1. \end{aligned}\right.$$

Égalant les expressions différentes de x', y', z', on trouve

$$(28)\quad \begin{cases} \rho x + \mu z - \nu y = \rho x_1 - \mu z_1 + \nu y_1, \\ \rho y + \nu x - \lambda z = \rho y_1 - \nu x_1 + \lambda z_1, \\ \rho z + \lambda y - \mu x = \rho z_1 - \lambda y_1 + \mu x_1. \end{cases}$$

On peut résoudre ces équations d'une manière élégante. Si on les ajoute, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, on obtient la relation

$$(29)\quad \lambda x + \mu y + \nu z = \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1$$

qui était évidente par la Géométrie, car elle exprime que la droite MM_1 est perpendiculaire à l'axe de rotation. Cela posé, pour avoir une quelconque des six inconnues, il suffit d'ajouter les quatre équations après les avoir multipliées par $\pm\lambda$, $\pm\mu$, $\pm\nu$, $\pm\rho$ de telle manière que le coefficient de l'inconnue cherchée devienne égal à

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2.$$

On obtient ainsi les formules

$$(30)\quad \begin{cases} x_1 = ax + a'y + a''z, \\ y_1 = bx + b'y + b''z, \\ z_1 = cx + c'y + c''z, \end{cases} \qquad (30)'\quad \begin{cases} x = a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1, \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1, \end{cases}$$

où a, b, c, ... ont les valeurs données par les formules (23) et (24).

La comparaison des formules précédentes avec les équations (19) qui définissent le changement d'axes montre que l'on passe des unes aux autres en changeant le signe de ρ et que la rotation définie en direction et en grandeur par les équations (25) est celle qui amène le *premier* système d'axes à coïncider avec le *second*.

121. Revenons aux formules (17) qui, d'après ce que nous venons de voir, définissent le déplacement le plus général,

$$(31)\quad \alpha_1 = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}, \qquad \beta_1 = \frac{m\beta + n}{p\alpha + q}.$$

Faisons $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$; nous aurons deux points de la sphère de rayon 1 qui coïncideront avec leurs homologues; α et β sont les deux racines différentes de l'équation du second degré

$$(32)\quad px^2 + (q - m)x - n = 0.$$

Désignons-les par h et k. On sait que les substitutions linéaires

définies par les formules (31) peuvent prendre la forme

$$(33)\qquad \frac{\alpha_1 - h}{\alpha_1 - k} = e^{i\lambda}\frac{\alpha - h}{\alpha - k}, \qquad \frac{\beta_1 - h}{\beta_1 - k} = e^{i\lambda}\frac{\beta - h}{\beta - k},$$

où l'on a

$$(34)\qquad e^{i\lambda} = \frac{m - hp}{m - kp}, \qquad 4\cos^2\frac{\lambda}{2} = \frac{(m+q)^2}{mq - np}.$$

Sous cette forme, on reconnaît tout de suite les éléments qui définissent le déplacement : les deux points diamétralement opposés définis par les valeurs

$$\alpha = h, \quad \beta = k \qquad \text{et} \qquad \alpha = k, \quad \beta = h$$

sont ceux où l'axe de rotation perce la sphère ; et λ est la grandeur de la rotation, car si l'on effectue le déplacement déterminé par les formules

$$\alpha' = \frac{\alpha - h}{\alpha - k}, \qquad \beta' = \frac{\beta - h}{\beta - k},$$

les équations (33) prennent la forme

$$\alpha'_1 = \alpha' e^{i\lambda}, \qquad \beta'_1 = \beta' e^{i\lambda},$$

qui convient à une rotation d'angle λ autour de l'axe des z.

122. Les formules données au n° **119**

$$(35)\qquad x = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \qquad y = i\frac{1 + \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \qquad z = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

définissent en fonction des variables α, β les coordonnées d'un point de la sphère de rayon 1. D'après ce que nous avons vu au n° **119**, deux points M, M', de coordonnées α, β; α', β', déterminent deux rayons OM OM' dont les sens sont fixés; l'angle de ces deux droites a pour mesure l'arc de grand cercle qui réunit les deux points et qui est défini par la relation

$$\cos MM' = xx' + yy' + zz' = \frac{-2\alpha\beta - 2\alpha'\beta' + (\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')}{(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta')}.$$

On déduit de là

$$(36)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sin^2\frac{MM'}{2} = \frac{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}{(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta')}, \qquad \cos^2\frac{MM'}{2} = -\frac{(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')}{(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta')}, \\ &\tan g^2\frac{MM'}{2} = -\frac{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}{(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules, que j'ai données avec plusieurs autres en 1872 ([1]), peuvent se déduire par l'application de la propriété générale établie plus haut et de la remarque faite au n° **118**. Associons aux deux points M, M' les points diamétralement opposés M_1, M'_1; nous obtenons ainsi quatre points sur une section plane de la surface, et le rapport anharmonique de ces quatre points *sur la section* est égal au rapport anharmonique des quatre génératrices rectilignes d'un même système qui passent en ces points. Si l'on prend celles du premier système, les paramètres de ces génératrices sont α, α' pour les points M, M'; pour les points diamétralement opposés, ce sont β, β', puisque, lorsqu'on passe d'un point au point diamétralement opposé, il faut échanger α et β. On a donc, par exemple,

$$\mathcal{R}(M, M', M_1, M'_1) = \mathcal{R}(\alpha, \alpha', \beta, \beta').$$

Le rapport anharmonique qui figure dans le premier membre est

$$\frac{\sin\dfrac{MM_1}{2}}{\sin\dfrac{MM'_1}{2}} : \frac{\sin\dfrac{M'M_1}{2}}{\sin\dfrac{M'M'_1}{2}}.$$

On a

$$\sin\frac{MM_1}{2} = \sin\frac{M'M'_1}{2} = 1, \qquad \sin\frac{M'M_1}{2} = \sin\frac{MM'_1}{2} = \pm\cos\frac{MM'}{2}.$$

Il vient donc

$$\cos^2\frac{MM'}{2} = \mathcal{R}(\alpha, \alpha', \beta', \beta) = \frac{\alpha-\beta'}{\alpha-\beta} : \frac{\alpha'-\beta'}{\alpha'-\beta},$$

ce qui est l'une des formules que nous avons obtenues directement.

123. Quelque simples qu'elles soient, ces formules ne déterminent pas l'angle autant qu'on peut le désirer. Il est facile maintenant de comprendre comment la détermination d'un sens sur la direction perpendiculaire aux deux droites OM, OM' dont on cherche l'angle permet d'obtenir une plus grande précision. Soit P l'un des pôles de l'arc MM'. Les deux génératrices rectilignes qui se croisent en P vont rencontrer le grand cercle MM' en ses deux points I et J qui sont à l'infini. Si donc on convient que le point I

([1]) *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 212.

sera celui qui se trouve sur la génératrice du premier système qui passe en P, l'arc MM' sera déterminé par la formule

$$e^{i\text{MM}'} = \mathcal{R}(\text{M}, \text{M}', \text{I}, \text{J}),$$

le rapport anharmonique du second membre sera celui des quatre points sur le grand cercle MM'. On voit qu'ainsi l'angle est déterminé, en grandeur *et en signe*, à un multiple près de 2π. Il changerait de signe si l'on échangeait le pôle P avec son symétrique.

Comment déterminer les variables α, β relatives à ce pôle quand on connaît celles qui sont relatives aux points M, M'? Il suffira d'exprimer que OP est perpendiculaire à OM et à OM'. Si α, β; α', β' désignent les valeurs connues des coordonnées curvilignes pour M et pour M', celles qui conviennent au point P, α_1, β_1, sont déterminées par les équations

$$(37)\qquad \begin{cases} 2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha\,\beta - (\alpha + \beta)(\alpha_1 + \beta_1) = 0, \\ 2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha'\beta' - (\alpha' + \beta')(\alpha_1 + \beta_1) = 0, \end{cases}$$

d'après lesquelles α_1 et β_1 seront les racines de l'équation en A

$$(38)\quad \text{A}^2(\alpha' + \beta' - \alpha - \beta) - 2\text{A}(\alpha'\beta' + \alpha\beta) + \alpha'\beta'(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha' + \beta') = 0.$$

Ces racines sont données par la formule

$$(39)\quad \text{A}(\alpha' + \beta' - \alpha - \beta) = \alpha'\beta' - \alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta')}.$$

Choisir celle qui représentera le paramètre de la première génératrice, c'est choisir entre les deux déterminations du radical; et quand le choix sera fait, l'angle sera déterminé en grandeur et en signe, à un multiple près de 2π.

C'est ce que montre d'ailleurs la formule qui donne $\operatorname{tang}\frac{\text{MM}'}{2}$; elle peut être écrite comme il suit

$$(40)\qquad \operatorname{tang}\frac{\text{MM}'}{2} = i\,\frac{\sqrt{(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta')}}{(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')}.$$

On retrouve ici le même radical que dans la formule qui donne A. Dès qu'on aura choisi entre ses deux déterminations, l'angle sera connu à un multiple près de 2π. On a aussi

$$(41)\qquad \sin \text{MM}' = -\,i\,\frac{\sqrt{(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta')}}{(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta')}.$$

124. Ces points étant fixés, nous allons établir une relation qui jouera un rôle important dans ce qui va suivre.

AM étant un arc de grand cercle, construisons le grand cercle (C) dont A est l'un des pôles et supposons qu'on ait choisi, sur ce grand cercle (C), l'un des pôles de AM, que nous appellerons γ. Puisque nous connaissons ce pôle γ, nous aurons fixé un sens positif pour les arcs sur le grand cercle AM; et d'autre part, comme A est le pôle connu de (C), nous pourrons faire la distinction entre les deux points I et J de ce cercle (C). Cela posé, considérons une génératrice rectiligne, du premier système par exemple, qui passe en M, elle ira couper (C) en un point μ; et l'arc de cercle $\mu\gamma$ sera déterminé, en grandeur et en signe, par l'équation

$$e^{i\overline{\mu\gamma}} = \mathcal{R}(\gamma, \mu, \mathrm{I}, \mathrm{J}),$$

le rapport anharmonique du second membre étant celui des quatre points sur le grand cercle (C).

On sait que ce rapport est égal à celui des quatre génératrices du premier système qui passent en ces quatre points ou encore, d'après le même théorème, à celui des quatre points où ces mêmes génératrices coupent une autre section plane de la surface. Pour cette section, nous choisirons précisément le cercle AM.

Or, la génératrice qui coupe (C) en μ coupe AM en M, la génératrice qui passe par γ, pôle de AM, le coupe en son point à l'infini I$'$, les génératrices du premier système qui passent en I et J sont celles qui passent respectivement par le pôle A de C et par le point diamétralement opposé de la sphère, A$'$. On a donc

$$e^{i\overline{\mu\gamma}} = \mathcal{R}(\gamma, \mu, \mathrm{I}, \mathrm{J}) = \mathcal{R}(\mathrm{I}', \mathrm{M}, \mathrm{A}, \mathrm{A}').$$

Le rapport anharmonique des quatre points I$'$, M, A, A$'$ se détermine immédiatement si, dans le plan du cercle, on prend des axes rectangulaires dont l'origine est en A et dont l'axe des x est la tangente en A au cercle AM. On trouve ainsi qu'il est égal à

$$i \cot \frac{\mathrm{AM}}{2}.$$

On obtient donc la formule

$$\tang \frac{\mathrm{AM}}{2} = i\, e^{i\overline{\gamma\mu}}. \tag{42}$$

Pour éliminer le point μ, nous prendrons un autre grand cercle passant en A et coupant la génératrice rectiligne en M$'$, il donnera

naissance à la formule

$$\text{(43)} \qquad \operatorname{tang} \frac{AM'}{2} = i\, e^{i\overline{\gamma'\mu}}.$$

On aura donc, en divisant,

$$\text{(44)} \qquad e^{i\overline{\gamma\gamma'}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{AM'}{2}}{\operatorname{tang} \frac{AM}{2}};$$

$\overline{\gamma\gamma'}$ mesure, évidemment, avec précision, c'est-à-dire en grandeur et en signe, l'angle des deux cercles AM, AM'.

125. Si nous n'avions pas recherché une exactitude rigoureuse, nous aurions pu obtenir très simplement la formule précédente en raisonnant comme il suit.

Reprenons l'équation d'une génératrice du premier système

$$\text{(45)} \qquad \frac{x + iy}{1 - z} = \alpha.$$

Au lieu de x, y, z, introduisons les variables θ, φ définies par les équations

$$\text{(46)} \qquad x = \cos\varphi \sin\theta, \qquad y = \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = \cos\theta;$$

θ sera la distance du point (x, y, z) au pôle du plan des xy; et l'équation précédente prendra la forme

$$\text{(47)} \qquad \cot\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi} = \alpha.$$

Si on l'applique à un autre point de la génératrice rectiligne, caractérisé par les valeurs θ', φ' de θ et de φ, on aura

$$\cot\frac{\theta'}{2}\, e^{i\varphi'} = \alpha.$$

Éliminant α entre les deux équations précédentes, on trouvera la formule

$$\text{(48)} \qquad e^{i(\varphi' - \varphi)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\theta'}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}$$

qui n'est autre que la relation (44), pour le cas particulier considéré.

CHAPITRE V.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Les triangles que l'on étudiera dans ce Chapitre ne sont pas soumis aux restrictions habituelles. Ils peuvent être réels ou imaginaires et, s'ils sont réels, leurs côtés ne sont pas assujettis à la condition d'être positifs et inférieurs à π. — Triangle polaire d'un triangle donné.

Première méthode : Elle repose sur la considération de triangles dont un des côtés est formé par une génératrice rectiligne de la sphère; et elle conduit à trois formules fondamentales dont découlent toutes les autres relations de a Trigonométrie sphérique. — Seconde méthode plus large, reposant sur l'emploi de formules données précédemment. — Relations diverses; formules de Delambre. Analogies de Néper. — Différents changements qu'on peut faire subir aux éléments sans que les formules cessent d'être vérifiées. — Définition de l'aire d'un triangle sphérique. Les lignes trigonométriques de cette aire sont des fonctions rationnelles des coordonnées des trois sommets du triangle.

---

126. A la fin du Chapitre précédent, nous avons fait connaître une propriété géométrique qui est, en quelque sorte, l'équation de toute génératrice rectiligne de la sphère. Nous allons montrer d'abord, à l'exemple de ce qui a été fait au nº 97 pour la Géométrie plane, comment cette relation peut conduire à toutes les formules de la Trigonométrie sphérique. Nous ne supposerons pas que les côtés soient réels, ni même qu'ils soient positifs et inférieurs à π.

Soit ABC un triangle ainsi défini. Si nous choisissons *arbitrairement* un des deux pôles de chacun de ses côtés nous formerons un triangle polaire $A'B'C'$ tel que A', B', C' soient respectivement les pôles de BC, CA, AB; et, d'après les explications qui ont été données précédemment, le sens des arcs positifs sera pleinement connu sur chacun des six côtés de ces triangles. Nous poserons

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AB = c,$$
$$B'C' = a', \qquad C'A' = b', \qquad A'B' = c'.$$

Toutes ces longueurs seront déterminées à un multiple près de 2π.

Coupons le triangle ABC par une génératrice rectiligne du premier système, qui rencontrera respectivement les côtés BC, CA, AB aux points M, N, P. En appliquant la relation (44) du Chapitre précédent au triangle ANP par exemple, on aura

$$(1) \qquad e^{ia'} = \frac{\tang\frac{AP}{2}}{\tang\frac{AN}{2}}.$$

On aurait de même

$$(2) \qquad e^{ib'} = \frac{\tang\frac{BM}{2}}{\tang\frac{BP}{2}}, \qquad e^{ic'} = \frac{\tang\frac{CN}{2}}{\tang\frac{CM}{2}}.$$

Aux trois relations précédentes on peut joindre les suivantes :

$$(3) \qquad \begin{cases} AP = AB + BP = c + BP, \\ BM = BC + CM = a + CM, \\ CN = CA + AN = b + AN, \end{cases}$$

qui permettent d'éliminer trois des six segments AP, BP, ... On sera ainsi conduit, en éliminant les points M et P, à une équation du second degré qui déterminerait, par exemple, $\tang\frac{AN}{2}$. Mais, comme le point N peut être choisi *arbitrairement*, cette équation du second degré devra se réduire à une identité, ce qui donnera trois relations entre $e^{ia'}$, $e^{ib'}$, $e^{ic'}$, $\tang\frac{a}{2}$, $\tang\frac{b}{2}$, $\tang\frac{c}{2}$. Ces trois relations peuvent s'obtenir simplement. Il suffit de supposer que la génératrice rectiligne considérée passe successivement par les trois sommets du triangle.

Supposons, par exemple, qu'elle passe par le point A, auquel cas les points N et P se confondent avec le point A. Les équations (2) et (3) nous donneront alors

$$(4) \qquad \begin{cases} \tang\frac{BM}{2} = e^{ib'}\tang\frac{BA}{2}, \qquad \tang\frac{CM}{2} = e^{-ic'}\tang\frac{CA}{2}, \\ a + CM = BM \end{cases}$$

et elles permettront d'éliminer le point M. On obtient ainsi la relation

$$\tang\frac{a}{2} + e^{-ic'}\tang\frac{b}{2} + e^{ib'}\tang\frac{c}{2} = e^{i(b'-c')}\tang\frac{a}{2}\tang\frac{b}{2}\tang\frac{c}{2},$$

d'où l'on déduira deux relations semblables par des permutations circulaires. Écrivons la suivante :

$$\tang\frac{b}{2} + e^{-ia'}\tang\frac{c}{2} + e^{ic'}\tang\frac{a}{2} = e^{i(c'-a')}\tang\frac{a}{2}\tang\frac{b}{2}\tang\frac{c}{2}.$$

En la retranchant de la précédente multipliée par $e^{ic'}$, on trouvera

$$\tang\frac{a}{2}\tang\frac{b}{2} = \frac{1 - e^{i(a'+b'+c')}}{e^{ic'} - e^{i(a'+b')}}.$$

Si l'on pose

$$a' + b' + c' = 2p', \tag{5}$$

la relation précédente deviendra

$$\tang\frac{a}{2}\tang\frac{b}{2} = \frac{\sin p'}{\sin(p'-c')},$$

en sorte que, par des permutations circulaires, nous serons conduits au groupe de trois équations

$$(6)\quad \begin{cases} \tang\frac{b}{2}\tang\frac{c}{2} = \frac{\sin p'}{\sin(p'-a')}, \\ \tang\frac{c}{2}\tang\frac{a}{2} = \frac{\sin p'}{\sin(p'-b')}, \\ \tang\frac{a}{2}\tang\frac{b}{2} = \frac{\sin p'}{\sin(p'-c')}, \end{cases}$$

d'où découlent, en effet, *toutes* les relations entre les éléments du triangle.

127. Il est une voie plus large par laquelle on parvient aux relations trigonométriques et que nous allons suivre de préférence.

Considérons un triangle sphérique quelconque, placé sur la sphère de rayon 1, ayant son centre à l'origine, et soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 les coordonnées rectangulaires de ses trois sommets A, B, C. Désignons, de même, par X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 les coordonnées rectangulaires des pôles A′, B′, C′ des côtés BC, CA, AB. Ces coordonnées doivent satisfaire aux équations

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = 1, \tag{7}$$

$$X_i x_k + Y_i y_k + Z_i z_k = 0 \tag{8}$$

qui ne les déterminent pas *entièrement;* de sorte que, pour chaque pôle, on a le choix entre deux positions diamétralement opposées. Faisons ce choix d'une manière arbitraire; nous obtiendrons ainsi un triangle polaire qui sera tout à fait défini. Le choix effectué, il est facile de voir que, si nous posons

$$(9)\qquad \begin{cases} BC = a, & CA = b, & AB = c, \\ B'C' = a', & C'A' = b', & A'B' = c', \end{cases}$$

les côtés des deux triangles sont définis, *en grandeur et en signe*, à un multiple près de 2π. En effet, pour le côté a, par exemple, du triangle, on a

$$(10)\qquad \cos a = x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3$$

et

$$(11)\qquad \begin{cases} X_1 \sin a = y_2 z_3 - z_2 y_3, \\ Y_1 \sin a = z_2 x_3 - x_2 z_3, \\ Z_1 \sin a = x_2 y_3 - y_2 x_3, \end{cases}$$

de sorte que l'angle a est défini à la fois par son sinus et son cosinus. Un raisonnement tout semblable s'applique au triangle polaire.

Cette méthode, on le voit, n'exclut pas, parmi les triangles réels, ceux dont les côtés sont négatifs ou supérieurs à π, ce qui est la même chose; elle s'applique également aux triangles imaginaires. Voyons comment elle conduit aux relations cherchées. Nous avons d'abord

$$(12)\qquad \begin{cases} \cos a = x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3, \\ \cos b = x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1, \\ \cos c = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2; \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \cos a' = X_2 X_3 + Y_2 Y_3 + Z_2 Z_3, \\ \cos b' = X_3 X_1 + Y_3 Y_1 + Z_3 Z_1, \\ \cos c' = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2, \end{cases}$$

puis

$$(14)\qquad \begin{cases} X_1 \sin a = y_2 z_3 - z_2 y_3, & X_2 \sin b = y_3 z_1 - y_1 z_3, & X_3 \sin c = y_1 z_2 - z_1 y_2, \\ Y_1 \sin a = z_2 x_3 - x_2 z_3, & Y_2 \sin b = z_3 x_1 - z_1 x_3, & Y_3 \sin c = z_1 x_2 - x_1 z_2, \\ Z_1 \sin a = x_2 y_3 - y_2 x_3, & Z_2 \sin b = x_3 y_1 - x_1 y_3, & Z_3 \sin c = x_1 y_2 - y_1 x_2; \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} x_1 \sin a' = Y_2 Z_3 - Z_2 Y_3, & x_2 \sin b' = Y_3 Z_1 - Y_1 Z_3, & x_3 \sin c' = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \\ y_1 \sin a' = Z_2 X_3 - X_2 Z_3, & y_2 \sin b' = Z_3 X_1 - Z_1 X_3, & y_3 \sin c' = Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \\ z_1 \sin a' = X_2 Y_3 - Y_2 X_3, & z_2 \sin b' = X_1 Y_3 - X_1 Y_3, & z_3 \sin c' = X_1 Y_2 - Y_1 X_2. \end{cases}$$

Posons

$$(16)\qquad 2\delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad 2\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Si nous développons le premier déterminant suivant les éléments de la première ligne, par exemple, nous aurons

$$(17)\qquad 2\delta = \cos AA' \sin a.$$

Nous trouverions de même

$$(18)\qquad 2\Delta = \cos AA' \sin a'.$$

Et comme nous pouvons effectuer des permutations circulaires, nous serons conduits à la proportion des sinus

$$(19)\qquad \frac{\sin a}{\sin a'} = \frac{\sin b}{\sin b'} = \frac{\sin c}{\sin c'} = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Mais on peut obtenir le même résultat par une méthode toute différente. Portons, par exemple, dans la première des formules (14) les valeurs de y_2, z_2, y_3, z_3 données par le second et le troisième groupe des formules (15), il viendra

$$(20)\qquad \sin a \sin b' \sin c' = 2\Delta.$$

On aurait de même, par raison de symétrie,

$$(21)\qquad \sin a' \sin b \sin c = 2\delta.$$

Il est clair que ces deux formules conduiraient à la proportion des sinus, et elles ont l'avantage de ne pas introduire des éléments auxiliaires tels que AA'.

Les carrés des déterminants 2δ, 2Δ s'expriment au moyen des côtés des deux triangles. On a, par exemple,

$$(22)\qquad 4\delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c.$$

On sait que, si l'on pose

$$(23)\qquad a + b + c = 2p,$$

on a

$$1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c$$
$$= 4 \sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c).$$

On peut donc écrire

$$(24) \qquad \delta^2 = \sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)$$

et de même, en posant

$$(25) \qquad a' + b' + c' = 2p',$$

on aura

$$(26) \qquad \Delta^2 = \sin p' \sin(p'-a') \sin(p'-b') \sin(p'-c').$$

Pour obtenir les autres systèmes de formules, on considère, par exemple, les deux systèmes linéaires

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

On sait qu'ils donnent naissance à la relation

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 \\ x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 & x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 \end{vmatrix}.$$

En tenant compte des formules précédentes, il vient la première des équations du Tableau suivant :

$$(27) \qquad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos a', \\ \cos b = \cos c \cos a - \sin c \sin a \cos b', \\ \cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos c', \end{cases}$$

auquel on peut joindre, par raison de symétrie,

$$(28) \qquad \begin{cases} \cos a' = \cos b' \cos c' - \sin b' \sin c' \cos a, \\ \cos b' = \cos c' \cos a' - \sin c' \sin a' \cos b, \\ \cos c' = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b' \cos c. \end{cases}$$

128. Tous les autres systèmes fondamentaux de formules sont des conséquences purement algébriques des précédents. Nous allons indiquer d'autres relations sur lesquelles il convient de revenir.

De la première des formules (27) on déduit $\cos a'$, ce qui permet de calculer $\cos^2 \frac{a'}{2}$, $\sin^2 \frac{a'}{2}$. On trouve

$$\cos^2 \frac{a'}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}, \qquad \sin^2 \frac{a'}{2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}.$$

Mais il n'en résulte pas quatre déterminations pour l'angle $\frac{a'}{2}$. Dans ce qui va suivre, nous ferons la convention suivante :

Lorsque nous aurons une formule irrationnelle telle que

$$(29) \qquad \delta = \sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

nous conviendrons que la détermination de δ résultera de celles qui seront données à $\sqrt{\sin p}$, $\sqrt{\sin(p-a)}$, ... ; en sorte que tout se passera comme si l'on écrivait

$$\delta = \sqrt{\sin p}\sqrt{\sin(p-a)}\sqrt{\sin(p-b)}\sqrt{\sin(p-c)},$$

et, dans deux formules différentes, nous ne supposerons jamais que $\sqrt{\sin p}$, par exemple, soit pris avec deux déterminations différentes. Alors on aura pour $\sin \frac{a'}{2}$, $\cos \frac{a'}{2}$ deux déterminations différentes

$$(30) \quad \sin \frac{a'}{2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}, \qquad \cos \frac{a'}{2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}},$$

ε désignant ± 1 et les radicaux du numérateur étant pris comme dans δ ; ce qui permettra de satisfaire à la relation

$$\sin a' = \frac{2\delta}{\sin b \sin c}.$$

On aura aussi

$$(31) \qquad \tan g \frac{a'}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin(p-b)\sin(p-c)}}$$

et, par suite,

$$(32) \qquad \tan g \frac{a'}{2} \tan g \frac{b'}{2} = \frac{\sin p}{\sin(p-c)}$$

et de là on déduit

$$(33) \qquad \tan g\, p = \frac{-\sin c \tan g \frac{a'}{2} \tan g \frac{b'}{2}}{1 - \cos c \tan g \frac{a'}{2} \tan g \frac{b'}{2}}$$

ou encore

$$(34)\qquad e^{2ip} = \frac{1 - e^{ic}\operatorname{tang}\dfrac{a'}{2}\operatorname{tang}\dfrac{b'}{c}}{1 - e^{-ic}\operatorname{tang}\dfrac{a'}{2}\operatorname{tang}\dfrac{b'}{2}}.$$

Comme on peut échanger tout ce qui concerne les deux triangles, on aura de même

$$(35)\qquad e^{2ip'} = \frac{1 - e^{ic'}\operatorname{tang}\dfrac{a}{2}\operatorname{tang}\dfrac{b}{2}}{1 - e^{-ic'}\operatorname{tang}\dfrac{a}{2}\operatorname{tang}\dfrac{b}{2}}, \qquad \operatorname{tang} p' = -\frac{\sin c'\operatorname{tang}\dfrac{a}{2}\operatorname{tang}\dfrac{b}{2}}{1 - \cos c'\operatorname{tang}\dfrac{a}{2}\operatorname{tang}\dfrac{b}{2}}.$$

129. Nous reviendrons sur ces relations, mais auparavant nous allons rappeler comment on est conduit aux formules de Delambre et aux Analogies de Néper.

Joignons aux deux équations (30) les suivantes :

$$(36)\qquad \begin{cases} \sin\dfrac{b'}{2} = \varepsilon'\sqrt{\dfrac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}, \\[2ex] \cos\dfrac{b'}{2} = \varepsilon'\sqrt{\dfrac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin a\sin c}}, \\[2ex] \sin\dfrac{c'}{2} = \varepsilon''\sqrt{\dfrac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}, \\[2ex] \cos\dfrac{c'}{2} = \varepsilon''\sqrt{\dfrac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}, \end{cases}$$

où ε', ε'' désignent, comme ε, l'unité prise avec le signe $+$ ou le signe $-$.

Par des multiplications, on obtient des formules telles que les suivantes :

$$(37)\qquad \begin{cases} \sin\dfrac{b'}{2}\sin\dfrac{c'}{2} = \eta\,\dfrac{\sin p}{\sin a}\cos\dfrac{a'}{2}, \\[2ex] \cos\dfrac{b'}{2}\cos\dfrac{c'}{2} = \eta\,\dfrac{\sin(p-a)}{\sin a}\cos\dfrac{a'}{2}, \\[2ex] \sin\dfrac{b'}{2}\cos\dfrac{c'}{2} = \eta\,\dfrac{\sin(p-b)}{\sin a}\sin\dfrac{a'}{2}, \\[2ex] \cos\dfrac{b'}{2}\sin\dfrac{c'}{2} = \eta\,\dfrac{\sin(p-c)}{\sin a}\sin\dfrac{a'}{2}, \end{cases}$$

où l'on a

$$(37)'\qquad \eta = \varepsilon\varepsilon'\varepsilon'';$$

et de là résultent par addition les formules de Delambre

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos\frac{b'-c'}{2} &= \eta_1\frac{\sin\dfrac{b+c}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}\cos\frac{a'}{2},\\
\cos\frac{b'+c'}{2} &= -\eta_1\frac{\cos\dfrac{b+c}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}}\cos\frac{a'}{2},\\
\sin\frac{b'-c'}{2} &= -\eta_1\frac{\sin\dfrac{b-c}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}\sin\frac{a'}{2},\\
\sin\frac{b'+c'}{2} &= \eta_1\frac{\cos\dfrac{b-c}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}}\sin\frac{a'}{2},
\end{aligned}\right.$$

auxquelles on peut ajouter toutes celles que l'on obtiendra par des permutations circulaires.

Par division, on est conduit aux Analogies de Néper

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{b'-c'}{2} &= -\frac{\sin\dfrac{b-c}{2}}{\sin\dfrac{b+c}{2}}\operatorname{tang}\frac{a'}{2},\\
\operatorname{tang}\frac{b'+c'}{2} &= -\frac{\cos\dfrac{b-c}{2}}{\cos\dfrac{b+c}{2}}\operatorname{tang}\frac{a'}{2}
\end{aligned}\right.$$

qui ne comportent aucune indétermination quant au signe, et auxquelles on peut joindre les suivantes :

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{b-c}{2} &= -\frac{\sin\dfrac{b'-c'}{2}}{\sin\dfrac{b'+c'}{2}}\operatorname{tang}\frac{a}{2},\\
\operatorname{tang}\frac{b+c}{2} &= -\frac{\cos\dfrac{b'-c'}{2}}{\cos\dfrac{b'+c'}{2}}\operatorname{tang}\frac{a}{2},
\end{aligned}\right.$$

obtenues en échangeant les deux triangles.

130. Il y a quelques remarques générales à présenter sur ces systèmes de formules. On voit d'abord que, si l'on se donne les côtés d'un des triangles, par exemple a, b, c, il y a deux systèmes de valeurs pour a', b', c', à cause du double signe que l'on peut donner à δ; et que l'on passe de l'un à l'autre de ces systèmes en changeant à la fois les signes des trois côtés.

Ce premier résultat vaut la peine d'être expliqué. Soit ABC un triangle pour lequel les côtés a, b, c soient connus en grandeur et en signe. Si l'on passe au triangle symétrique $A_1B_1C_1$, les deux côtés AB, A_1B_1, par exemple, seront sur un même grand cercle. Pour qu'ils puissent être égaux en grandeur et en signe, il faut et il suffit que, sur ce grand cercle, les sens positifs soient conservés, c'est-à-dire que l'on conserve pour $A_1B_1C_1$ *le même triangle polaire* $A'B'C'$ que pour ABC. Mais les pôles des côtés de ce triangle $A'B'C'$ devront être changés; ils seront devenus A_1, B_1, C_1 et comme ils sont diamétralement opposés à A, B, C, les signes des côtés a', b', c' devront être changés. Telle est l'explication du résultat mis en évidence par nos formules.

Voici maintenant d'autres remarques essentielles. Si, sur les deux triangles ABC, $A'B'C'$, on change le sens positif de l'un des côtés, de BC par exemple, il faudra changer a en $-a$; mais aussi remplacer le pôle A' par le point diamétralement opposé, ce qui revient au fond à changer a' en $a'+\pi$, b' en $b'+\pi$. Ainsi, on peut changer le signe de l'un des côtés a, b, c, a', b', c' de l'un des triangles à condition d'ajouter π aux deux côtés non correspondants de l'autre triangle.

On peut faire usage de cette remarque pour obtenir sans calcul certains résultats. Par exemple, si l'on change dans les formules (35) c' en $-c'$, a et b en $a+\pi$ et $b+\pi$, il vient

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} e^{2i(p'-c')} &= \frac{1-e^{-ic'}\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}}{1-e^{ic'}\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}},\\ \tan(p'-c') &= \frac{\sin c'\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}}{1-\cos c'\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}}.\end{aligned}\right.$$

131. Nous avons introduit le périmètre p' du triangle polaire.

Il est lié à l'aire du triangle ABC par une relation qu'il convient de préciser.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un triangle tel qu'on a l'habitude de les considérer, de ceux suivant lesquels la sphère est coupée par les trois faces d'un angle trièdre. Et supposons, de plus, que le sens de rotation de ce triangle soit positif, de telle manière qu'un observateur, lorsqu'il est à l'intérieur, tourne dans le sens direct lorsqu'il regarde successivement A, B, C.

Choisissons, pour le triangle polaire qui figure dans nos formules initiales, celui qui est défini dans les *Éléments*. Alors, tous nos côtés a, b, c, a', b', c' pourront être supposés positifs et l'aire S du triangle ABC aura pour valeur

$$S = 2\pi - 2p'.$$

Passons maintenant au cas où le triangle ABC a son sens de rotation négatif. Il suffira de changer, dans les formules initiales, les signes de toutes les coordonnées. On aura alors

$$S = 2\pi + 2p'.$$

Nous prendrons, dans tous les cas, pour définition de l'aire la formule

$$S = 2k\pi - 2p', \tag{42}$$

k étant un entier quelconque; et le lecteur s'assurera aisément qu'à un multiple près de 2π elle donne la somme *algébrique* des aires balayées par l'arc de grand cercle qui joint un point fixe de la sphère à un point mobile, lorsque ce point mobile parcourt, dans le sens ABC, les côtés du triangle ABC, que l'on peut toujours supposer positifs, puisqu'ils ne sont définis qu'à un multiple près de 2π. Dans le cas d'un triangle imaginaire, la formule (42) servira de définition à l'aire.

Si on la rapproche de la formule (35), on obtiendra, pour l'expression de l'aire, la formule

$$e^{2iS} = \frac{1 - e^{-ic'} \tang \frac{a}{2} \tang \frac{b}{2}}{1 - e^{ic'} \tang \frac{a}{2} \tang \frac{b}{2}}. \tag{42'}$$

Il est digne de remarque que les lignes trigonométriques de

cette aire soient des *fonctions rationnelles* des *coordonnées* des *sommets du triangle* ABC.

Pour le démontrer, reportons-nous à la formule (35). Elle nous donne

$$\operatorname{tang} p' = \frac{-\sin c' \operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}}{1-\cos c' \operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}}.$$

Or, on a, d'après les formules (21) et (27),

$$(43)\qquad \begin{cases} \sin c' \sin a \sin b = 2\delta, \\ \cos c' = \dfrac{\cos a \cos b - \cos c}{\sin a \sin b}. \end{cases}$$

Remplaçant dans la formule qui donne $\operatorname{tang} p'$, on trouve

$$(44)\qquad \operatorname{tang} p' = \frac{-2\delta}{1+\cos a + \cos b + \cos c};$$

δ, a, b, c s'expriment, par les formules que nous avons données plus haut, en fonction des coordonnées des sommets A, B, C. Notre proposition est donc démontrée.

On peut donner à l'expression de p' et, par conséquent, à celle de S, une forme extrêmement élégante en introduisant les coordonnées imaginaires α et β étudiées plus haut (n° 119). Si l'on pose

$$(45)\qquad x_k = \frac{1-\alpha_k\beta_k}{\alpha_k-\beta_k}, \qquad y_k = i\,\frac{1+\alpha_k\beta_k}{\alpha_k-\beta_k}, \qquad z_k = \frac{\alpha_k+\beta_k}{\alpha_k-\beta_k}$$

un calcul facile nous donnera

$$\begin{aligned} &(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_3-\beta_3)\{1+\cos a+\cos b+\cos c\} \\ &\quad = 2(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_3)(\alpha_3-\beta_1)+2(\alpha_1-\beta_3)(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_3-\beta_2), \\ &\delta(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)(\alpha_3-\beta_3) \\ &\quad = i[-(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_3)(\alpha_3-\beta_1)+(\alpha_1-\beta_3)(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_3-\beta_2)], \end{aligned}$$

en sorte que la formule (44) nous conduira à la suivante :

$$(46)\qquad e^{2ip'} = \frac{(\alpha_1-\beta_3)(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_3-\beta_2)}{(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_3)(\alpha_3-\beta_1)}.$$

Si l'on remplace le point C par le point diamétralement opposé, ce qui équivaut à échanger α_3 et β_3, les formules (15) montrent

que, dans le triangle polaire, c' seul changera de signe. On aura donc

$$e^{2i(p'-c')} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \beta_1)(\beta^3 - \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_3 - \beta_1)}, \tag{47}$$

d'où, en divisant,

$$e^{2ic'} = \frac{(\alpha_1 - \beta_3)(\alpha_3 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)(\alpha_3 - \alpha_2)}{(\alpha_2 - \beta_3)(\alpha_3 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}. \tag{48}$$

Ainsi, les doubles des côtés, eux aussi, auront leurs lignes trigonométriques déterminées rationnellement.

Si, dans la formule (46), on remplace $2p'$ par son expression (42) en fonction de l'aire du triangle, il vient

$$e^{iS_{ABC}} = \frac{(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_3)(\alpha_3 - \beta_1)}{(\alpha_1 - \beta_3)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_3 - \beta_2)}. \tag{49}$$

On voit que les valeurs de S changeraient de signe sans changer de valeur si l'on échangeait deux sommets, c'est-à-dire si le sens de rotation du triangle était changé.

CHAPITRE VI.

SEGMENTS ASSOCIÉS SUR LA SPHÈRE.

Définition du segment associé à un segment donné. — Pour une théorie complète il faut associer à ces segments les segments diamétralement opposés. Relations entre ces segments. — Cinq théorèmes fondamentaux. — Démonstration géométrique du troisième théorème qui établit une relation entre l'aire d'un triangle sphérique et le rapport des distances de l'un de ses sommets à deux points de la sphère. — Propriétés focales des coniques sphériques. — Courbes sphériques lieux des points tels que le rapport des produits de leurs distances à deux séries de pôles fixes, en même nombre dans les deux séries, soit constant. — Une courbe sphérique peut être définie, soit par la propriété précédente, soit par celle-ci : elle sera le lieu des points M tels que les triangles sphériques formés par ce point avec *n* segments fixes aient des aires dont la somme algébrique soit constante. Quelle que soit celle des deux propriétés par laquelle elle sera définie, elle pourra l'être par l'une et par l'autre d'une infinité de manières différentes. — Courbes sphériques lieux des points tels que les produits de leurs distances à deux séries de diamètres de la sphère, en même nombre dans les deux séries, soient dans un rapport constant. — Principales propriétés de la conique de Chasles. — Systèmes orthogonaux formés avec les courbes définies par les différentes propriétés que l'on vient d'énumérer. — Application de la méthode des figures supplémentaires. — Indication de l'appui que la Géométrie sphérique peut apporter à la Géométrie plane.

---

132. La formule (44) du n° 124, d'où nous avons pu déduire les relations fondamentales de la Trigonométrie sphérique, va nous permettre d'étendre à la Géométrie sphérique les propriétés des points associés dans le plan que nous avons développées au Chapitre Ier de ce Livre.

Étant donnés deux points A et B sur la sphère, il passe par ces points quatre génératrices rectilignes de cette surface qui se rencontrent en deux autres points A', B'. Nous dirons que le couple $(A'B')$ est associé au couple (AB). Il est clair que la relation entre ces deux couples est réciproque. Les deux droites AB, $A'B'$ sont polaires réciproques, l'une de l'autre, par rapport à la sphère. Si l'un des couples est formé de deux points réels, l'autre l'est de deux points imaginaires conjugués.

Certaines propriétés des segments associés sont aisées à démontrer. Voici la plus importante : désignons par d et δ_1 les génératrices, du premier et du second système respectivement, qui passent en A ; soient de même d_2 et δ_3 les deux génératrices qui passent en B. Le point A′ sera le point d'intersection des génératrices d_2, δ_1 et de même le point B′ des génératrices d et δ_3.

Si λ et μ désignent les paramètres des génératrices rectilignes d'un point quelconque M de la sphère, les formules (36) du n° **122** nous donneront les relations suivantes :

$$(1) \qquad \sin^2\frac{AM}{2} = \frac{(\lambda - d)(\mu - \delta_1)}{(\lambda - \mu)(d - \delta_1)}, \qquad \sin^2\frac{BM}{2} = \frac{(\lambda - d_2)(\mu - \delta_3)}{(\lambda - \mu)(d_2 - \delta_3)}$$

et

$$(2) \qquad \sin^2\frac{A'M}{2} = \frac{(\lambda - d_2)(\mu - \delta_1)}{(\lambda - \mu)(d_2 - \delta_1)}, \qquad \sin^2\frac{B'M}{2} = \frac{(\lambda - d)(\mu - \delta_3)}{(\lambda - \mu)(d - \delta_3)}.$$

De là on déduit immédiatement l'égalité

$$\frac{\sin^2\frac{AM}{2}\,\sin^2\frac{BM}{2}}{\sin^2\frac{A'M}{2}\,\sin^2\frac{B'M}{2}} = \frac{(d_2 - \delta_1)(d - \delta_3)}{(d - \delta_1)(d_2 - \delta_3)} = \cos^2\frac{AB}{2}.$$

En désignant par r_A la distance de M à un point A, on peut donc écrire

$$(3) \qquad \frac{r_A\, r_B}{r_{A'}\, r_{B'}} = \frac{\sin\frac{AM}{2}\,\sin\frac{BM}{2}}{\sin\frac{A'M}{2}\,\sin\frac{B'M}{2}} = \cos\frac{AB}{2}.$$

Cette formule est analogue à l'une de celles que nous avons établies dans le plan. En échangeant les deux segments, on sera conduit à la relation

$$(4) \qquad \cos\frac{AB}{2}\cos\frac{A'B'}{2} = 1,$$

que nous retrouverons plus loin.

133. Pour faire une théorie plus complète, il faut associer aux points A, B, A′, B′ d'autres couples de points et, en particulier, les points diamétralement opposés. Nous désignerons par la petite lettre a^i le point diamétralement opposé à A^i et, de même, par b^i le point diamétralement opposé à B^i.

Nous avons déjà vu que, si d, δ_1 sont les deux génératrices, du premier et du second système respectivement, qui passent en A et, de même, d_2, δ_3 celles qui passent en B, les points A′, B′ sont respectivement les intersections des génératrices d_2, δ_1 et d, δ_3. Ainsi, le Tableau suivant donnera les génératrices qui se croisent en chaque point

A	B	A′	B′
$d\delta_1$	$d_2\delta_3$	$d_2\delta_1$	$d\delta_3$

Nous désignerons par δ, d_1, δ_2, d_3 les génératrices respectivement opposées à d, δ_1, d_2, δ_3, ce qui nous donnera en tout quatre génératrices du premier système d, d_1, d_2, d_3, diamétralement opposées aux génératrices δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 du second. Ces génératrices se couperont en seize points, dont quatre seront à l'infini; et leurs douze points d'intersection à distance finie, respectivement, distribués évidemment sur trois grands cercles orthogonaux, seront définis comme il suit :

A	B	A′	B′	A″	B″	a	b	a'	b'	a''	b''
$d\delta_1$	$d_2\delta_3$	$d_2\delta_1$	$d\delta_3$	$d\delta_2$	$d_1\delta_3$	$d_1\delta$	$d_3\delta_2$	$d_1\delta_2$	$d_3\delta$	$d_2\delta$	$d_3\delta_1$

A chaque point nous associons les génératrices qui le déterminent, et les points, diamétralement opposés, sont désignés par les grandes et petites lettres qui se correspondent.

En permutant les génératrices de telle manière que leurs points d'intersection à l'infini restent à l'infini, c'est-à-dire en permutant les indices 0, 1, 2, 3, on verra facilement qu'on peut effectuer sur les douze points des substitutions telles que les suivantes :

$$(\mathrm{A}a)(\mathrm{A}'a'')(\mathrm{B}'\mathrm{B}'')(\mathrm{A}''a')(b'b'')$$
$$(\mathrm{A}\mathrm{A}')(\mathrm{B}'\mathrm{B})(\mathrm{A}''a'')(aa')(bb')$$
$$(\mathrm{A}b'')(\mathrm{B}a'')(\mathrm{B}'b')(\mathrm{A}''b)(\mathrm{B}''a)$$
$$(\mathrm{A}\mathrm{A}'')(\mathrm{B}\mathrm{B}'')(\mathrm{A}'a')(aa'')(bb'')$$

où chaque parenthèse indique une permutation de deux lettres.

On verra facilement que nos douze points forment six couples de points associés

AB	Ab	A′b'	ab	aB	a'B′
B′A′	A″b''	$a''b''$	$a'b'$	B″a''	B″A″

les points mis en correspondance étant sur une même génératrice rectiligne du premier système. Les trois grands cercles orthogonaux qui contiennent quatre des douze points sont ceux qui passent par AB, A′B′, A″B″.

134. En appliquant les formules (1), (2), nous pourrions déjà obtenir des relations entre les distances d'un point M de la sphère aux douze points A^i, a^i. La méthode suivante nous donnera des résultats plus complets :

Soit M un point quelconque de la sphère. Pour abréger, nous désignerons par A_k, a_k les arcs de grand cercle $A^k M$, $a^k M$ et par α_k, β_k les abscisses curvilignes, comptées à partir d'une origine quelconque, des pôles des arcs $A^k M$, $B^k M$, tous situés sur le cercle polaire du point M.

Appliquons la relation fondamentale (44) du n° **124** aux quatre génératrices rectilignes d, d_1, d_2, d_3. Nous aurons les formules

$$(5)\quad \begin{cases} e^{i\alpha}\operatorname{tang}\dfrac{A}{2} = e^{i\beta'}\operatorname{tang}\dfrac{B'}{2} = e^{i\alpha''}\operatorname{tang}\dfrac{A''}{2}, \\ e^{-i\alpha}\operatorname{tang}\dfrac{A}{2} = e^{-i\alpha'}\operatorname{tang}\dfrac{A'}{2} = -e^{-i\beta''}\cot\dfrac{B''}{2}, \\ e^{i\beta}\operatorname{tang}\dfrac{B}{2} = e^{i\alpha'}\operatorname{tang}\dfrac{A'}{2} = -e^{i\alpha''}\cot\dfrac{A''}{2}, \\ e^{-i\beta}\operatorname{tang}\dfrac{B}{2} = e^{-i\beta'}\operatorname{tang}\dfrac{B'}{2} = e^{-i\beta''}\operatorname{tang}\dfrac{B''}{2}. \end{cases}$$

L'élimination des tangentes nous conduit aux relations

$$e^{2i(\alpha+\beta)} = e^{2i(\alpha'+\beta')} = e^{2i(\alpha''+\beta'')},$$

qui nous donnent, à des multiples près de 2π,

$$(6)\qquad 2\alpha + 2\beta = 2\alpha' + 2\beta' = 2\alpha'' + 2\beta''.$$

Ces relations expriment évidemment que *les angles* AMB, A′MB′, A″MB″ *ont les mêmes bissectrices*. Ce sera notre *premier théorème fondamental*.

On pourra toujours supposer que les sens de trois côtés AM, BM, ... aient été choisis de telle manière que l'on ait

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \alpha'' + \beta''.$$

Alors, en désignant par 2θ la valeur commune de ces sommes,

on pourra poser

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha = \theta + \gamma, & \alpha' = \theta + \gamma', & \alpha'' = \theta + \gamma'', \\ \beta = \theta - \gamma, & \beta' = \theta - \gamma', & \beta'' = \theta - \gamma'', \end{cases}$$

et 2γ, $2\gamma'$, $2\gamma''$ seront les angles BMA, B′MA′, B″MA″ sous lesquels on voit de M les trois segments AB, A′B′, A″B″. En substituant ces valeurs de α, β, ... dans les formules (5), on trouve aisément

$$\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2} = -e^{2i\gamma''}, \qquad \tang\frac{A}{2} = e^{2i\gamma'}\tang\frac{B}{2},$$

ce qui permet d'écrire, en achevant de fixer les sens,

$$\tang\frac{A}{2} = ie^{i(\gamma''-\gamma')}, \qquad \tang\frac{B}{2} = ie^{i(\gamma'+\gamma'')}.$$

Ces inconnues une fois fixées, on peut établir le Tableau suivant :

$$(8)\qquad \begin{cases} \tang\frac{A}{2} = ie^{i(\gamma''-\gamma')}, & \tang\frac{A'}{2} = ie^{i(\gamma''-\gamma)}, & \tang\frac{A''}{2} = ie^{i(\gamma-\gamma')}, \\ \tang\frac{B}{2} = ie^{i(\gamma'+\gamma'')}, & \tang\frac{B'}{2} = ie^{i(\gamma+\gamma'')}, & \tang\frac{B''}{2} = ie^{i(\gamma+\gamma')}, \end{cases}$$

qui fournit déjà des relations

$$(9)\qquad \begin{cases} \tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2} = \tang\frac{A'}{2}\tang\frac{B'}{2} = -e^{2i\gamma''}, \\ \tang\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} = \tang\frac{A''}{2}\cot\frac{B''}{2} = e^{2i\gamma'}, \\ \tang\frac{B'}{2}\cot\frac{A'}{2} = -\tang\frac{A''}{2}\tang\frac{B''}{2} = e^{2i\gamma}, \end{cases}$$

entre les distances de M aux différents points fixes. Nous verrons plus loin des résultats plus complets ; mais, dès à présent, la relation

$$(10)\qquad \frac{\tang\frac{B'}{2}}{\tang\frac{A'}{2}} = e^{2i\gamma} = \frac{r_{B'}\,r_{a'}}{r_{b'}\,r_{A'}}$$

nous donne notre *second théorème fondamental* : 2γ est l'angle sous lequel on voit du point M le segment AB, et cet angle s'exprime d'une manière très simple en fonction des distances de M aux points A′, B′ et aux points qui leur sont diamétralement opposés.

Si maintenant nous calculons AB par la formule

$$\cos AB = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos 2\gamma,$$

nous aurons, en remplaçant les lignes trigonométriques de A et de B par leurs valeurs déduites des équations (8),

$$(11) \qquad \cos^2 \frac{AB}{2} = \frac{(e^{2i\gamma''} - e^{2i\gamma})(e^{2i\gamma''} - e^{-2i\gamma})}{(e^{2i\gamma''} - e^{2i\gamma'})(e^{2i\gamma''} - e^{-2i\gamma'})}$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2}}{\cos^2 \frac{A'}{2} \cos^2 \frac{B'}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{A'}{2} \sin^2 \frac{B'}{2}}$$

et, de même,

$$\sin^2 \frac{AB}{2} = \frac{\sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{B''}{2} \cos^2 \frac{A''}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B''}{2} \sin^2 \frac{A''}{2}},$$

en tenant compte des relations (9). Ces résultats sont bien d'accord avec la formule (3) déjà établie.

En extrayant les racines carrées et faisant les permutations indiquées au n° 133, on obtient les formules comprises dans le Tableau suivant :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \cos \frac{AB}{2} = \frac{r_A r_B}{r_{A'} r_{B'}} = \frac{r_a r_b}{r_{a'} r_{b'}} & & \sin \frac{AB}{2} = \frac{r_B r_a}{r_{B''} r_{a''}} = \frac{r_A r_b}{r_{b''} r_{A''}}, \\ \cos \frac{A'B'}{2} = \frac{r_{A'} r_{B'}}{r_A r_B} = \frac{r_{a'} r_{b'}}{r_a r_b} & & \sin \frac{A'B'}{2} = -\frac{r_{A'} r_{b'}}{r_{a''} r_{b''}} = \frac{r_{a'} r_{B'}}{r_{A''} r_{B''}}, \\ \cos \frac{A''B''}{2} = \frac{r_{A''} r_{B''}}{r_{B'} r_{a'}} = -\frac{r_{a''} r_{b''}}{r_{A'} r_{b'}} & & \sin \frac{A''B''}{2} = \frac{r_{B''} r_{a''}}{r_B r_a} = \frac{r_{b''} r_{A''}}{r_b r_A}. \end{array} \right.$$

Ces relations entre les distances constituent notre *troisième théorème fondamental*. On en déduit les relations suivantes :

$$(13) \quad \cos\frac{AB}{2}\cos\frac{A'B'}{2} = 1, \qquad \sin\frac{A'B'}{2}\cos\frac{A''B''}{2} = 1, \qquad \sin\frac{AB}{2}\sin\frac{A''B''}{2} = 1.$$

entre les éléments fixes.

Remarquons, d'ailleurs, que la formule (11) peut s'écrire

$$(14) \qquad \cos^2 \frac{AB}{2} = \frac{\cos^2\gamma - \cos^2\gamma''}{\cos^2\gamma' - \cos^2\gamma''} = \frac{\cos 2\gamma - \cos 2\gamma''}{\cos 2\gamma' - \cos 2\gamma''},$$

et qu'elle fournit ainsi la relation entre les trois angles sous lesquels on voit du point M les segments AB, A'B', A''B''.

On déduit aisément des équations précédentes les suivantes :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\frac{A+\varepsilon B}{2} &= \cos\frac{AB}{2}\cos\frac{A'+\varepsilon B'}{2}, \\ \sin\frac{A+\varepsilon B}{2} &= \sin\frac{AB}{2}\sin\frac{A''+\varepsilon B''}{2}, \end{aligned} \right.$$

ε désignant l'unité positive ou négative comme on voudra. Ainsi les trois sommes $A+\varepsilon B$, $A'+\varepsilon B'$, $A''+\varepsilon B''$ sont fonctions l'une de l'autre. En d'autres termes, *toute conique sphérique qui admet pour foyers l'un des trois couples* A, B; A', B'; A″ B″ *admet aussi les deux autres.*

135. Au n° 131, nous avons établi une formule très simple pour l'aire du triangle sphérique. On a

$$e^{iS_{ABM}} = \frac{1+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}e^{-2i\gamma}}{1+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}e^{2i\gamma}}.$$

Ici, cela donne le résultat suivant :

$$(16) \qquad e^{iS_{ABM}} = \frac{\cos^2\frac{B'}{2}}{\sin^2\frac{A'}{2}}$$

ou encore

$$(17) \qquad e^{\frac{1}{2}iS_{ABM}} = \frac{r_{b'}}{r_{a'}}.$$

L'aire du triangle sphérique S_{ABM} s'exprime très simplement, en fonction du rapport des distances de M aux deux points de la sphère qui sont diamétralement opposés aux points associés des points A, B. C'est notre *quatrième théorème fondamental.* Il pourrait être immédiatement obtenu par l'application de la formule (46) donnée au n° 131.

Si l'on remarque que l'on a

$$S_{ABM} - S_{baM} = -2\widehat{BMA},$$

on obtiendra la formule

$$(18) \qquad \frac{\tan\frac{A'}{2}}{\tan\frac{B'}{2}} = e^{-2i\gamma} = \frac{r_{A'}r_{b'}}{r_{a'}r_{B'}}$$

qui a déjà été donnée plus haut.

Enfin, la formule

$$S_{ABM} + S_{baM} = 2\widehat{BAM} + 2\widehat{MBA} = 2\Sigma,$$

qui donne la somme Σ des angles à la base du triangle sphérique ABM, nous conduira à la relation

$$(19) \qquad e^{2i\Sigma} = \frac{r_{B'}\, r_{b'}}{r_{A'}\, r_{a'}} = \left(\frac{d_{B'}}{d_{A'}}\right)^2,$$

d_A, d_B désignant les distances du point M aux deux rayons qui vont aux points A′ et B′.

C'est notre *cinquième théorème fondamental*.

136. En résumé, nous avons obtenu des propositions qui s'énoncent comme il suit :

1° On a

$$(20) \qquad \frac{r_A\, r_B}{r_{A'}\, r_{B'}} = \frac{r_a\, r_b}{r_{a'}\, r_{b'}} = \cos\frac{AB}{2} = \text{const.};$$

2° On a, de même,

$$(21) \qquad e^{i\widehat{AMB}} = \frac{r_{A'}\, r_{b'}}{r_{B'}\, r_{a'}};$$

3° S_{ABM} désignant l'aire du triangle sphérique ABM, on a

$$(22) \qquad e^{\frac{i}{2}S_{ABM}} = \frac{r_{b'}}{r_{a'}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{r_A}{r_B} = e^{\frac{i}{2}S_{a'b'M}};$$

4° Enfin, la somme des angles A et B du triangle ABM satisfait à la relation

$$(23) \qquad e^{i(\widehat{BAM} + \widehat{MBA})} = \frac{d_{B'}}{d_{A'}} = \frac{r_{B'}\, r_{b'}}{r_{A'}\, r_{a'}} = \frac{\sin B'M}{\sin A'M},$$

d_A désignant, d'une manière générale, la distance de M au diamètre qui passe en A.

137. De toutes ces propositions, la plus importante est la troisième. Nous allons donc montrer comment on peut l'obtenir directement par la géométrie, sans faire appel aux théories précédentes.

Considérons, sur la sphère, un petit cercle (C) et deux points A′, B′ de ce cercle. D'après le théorème de Lexell, l'aire du

triangle sphérique $a'b'M$, qui a pour sommets un point M quelconque du cercle et les deux points a', b' diamétralement opposés à A', B', demeurera constante quand le point M se déplacera sur le cercle. Supposons que le point M vienne en un des points A', B', en A' par exemple; le triangle se réduira évidemment au fuseau formé par le grand cercle $A'B'a'b'$ et le grand cercle tangent en A' à (C). Ainsi, son aire sera égale au double de l'angle A' sous lequel la tangente à (C) en A' coupe la tangente en ce point au grand cercle $A'B'a'b'$.

Considérons les deux points A, B associés à A', B': si l'on fait une projection stéréographique de la sphère en prenant le point de vue sur le grand cercle $A'B'$, le cercle (C) se transformera en un cercle (C'), les points A', B' deviendront deux points α', β' du cercle (C') et les points A, B deviendront les deux points α, β associés à α', β'. Quant à l'angle A', comme la projection conserve les angles, il sera égal à l'angle α' sous lequel le cercle (C') coupe la droite $\alpha'\beta'$. Or, dans le plan, d'après la formule (38) du n° 98, où l'on peut évidemment remplacer l'angle $\widehat{B'MA'}$ par α', on a

$$\frac{r_\alpha}{r_\beta} = e^{i\alpha'},$$

r_α et r_β désignant les distances d'un point quelconque m du plan aux points α, β.

Si l'on revient à la sphère, et si l'on remarque que le point de vue est dans le plan perpendiculaire sur le milieu de la droite $\alpha\beta$, le rapport $\frac{r_\alpha}{r_\beta}$ sera remplacé par $\frac{r_A}{r_B}$, r_A et r_B désignant les distances du point M de la sphère dont m est la projection aux points A et B: et comme α' est égale à A', c'est-à-dire à la moitié de l'aire du triangle $a'b'M$, on retrouve bien l'équation

$$\frac{r_A}{r_B} = e^{\frac{i}{2} S a'b'M},$$

c'est-à-dire la formule (22).

Cette démonstration présente quelques difficultés quant aux signes, mais elle nous montre bien l'origine de la proposition : *c'est le théorème de Lexell qui est, en Géométrie sphérique, l'analogue de la propriété du segment capable dans le plan.*

138. Les propositions précédentes nous permettraient d'appliquer, sans aucune modification, aux coniques sphériques la méthode qui nous a donné (n° 102) les propriétés focales des coniques planes. Nous allons montrer comment elles conduisent aux propriétés de certaines courbes sphériques dont la définition est analogue à celle des courbes planes que nous avons étudiées précédemment (Livre II, Chap. I).

Faisons, suivant les procédés habituels, la projection stéréographique de la sphère. Si P est le pôle et (E) le plan de l'équateur, désignons par d et δ les deux génératrices rectilignes du premier et du second système qui passent en P. Tout plan passant par le pôle et par une génératrice rectiligne du second système δ_1 contiendra d. Par conséquent, les projections stéréographiques des génératrices du second système seront des droites isotropes allant passer par le point à l'infini sur d, c'est-à-dire par le point I de l'équateur; et, de même, les projections stéréographiques des génératrices du premier système seront des droites isotropes qui iront passer par le point J de l'équateur. Ces remarques donnent tout de suite la propriété fondamentale de la projection stéréographique. Car, si deux courbes se croisent en un point M de la sphère, le rapport anharmonique de leurs tangentes et des deux génératrices rectilignes qui se croisent en M devient, en projection, le rapport anharmonique des deux tangentes aux courbes planes qui sont la projection des courbes sphériques et des deux droites isotropes qui passent par leur point de concours; en d'autres termes, *les angles sont conservés, au signe près, dans la projection stéréographique.*

139. Considérons, dans le plan, les courbes définies par l'équation

$$R_1 R_2 \ldots R_m = k r_1 r_2 \ldots r_p, \tag{24}$$

où R_k, r_k désignent les distances du point de la courbe à des pôles fixes. Pour fixer les idées, nous supposerons

$$p \gtreqless m.$$

Comme la distance de deux points A, B sur la sphère est liée à

celle de leurs projections stéréographiques a, b par la relation

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}.\mathrm{OB}} = h.ab,$$

où O désigne le pôle et h une constante qui dépend du rayon de la sphère, on voit que l'équation précédente se transformera dans la suivante :

$$\text{(25)} \qquad \mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2 \ldots \mathrm{R}_m = k_1 \overline{\mathrm{OM}}^{m-p} r_1 r_2 \ldots r_p,$$

où R_k, r_k désignent des distances à des points fixes de la sphère, et qui est pareille à celle que nous avons obtenue pour le plan. Seulement la présence du facteur $\overline{\mathrm{OM}}^{m-p}$ nous montre que le point de vue O sera devenu un pôle multiple d'ordre $m-p$; en sorte que, pour les courbes sphériques, nous devrons supposer que *le nombre des pôles est toujours le même dans les deux séries.*

Au reste, si l'on prend, pour déterminer les points, le système de coordonnées fourni par les génératrices rectilignes, on peut écrire sur la sphère l'équation de la courbe définie par l'équation

$$\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2 \ldots \mathrm{R}_m = k r_1 r_2 \ldots r_m.$$

Si u et v sont les coordonnées de M, si α_k, β_k sont les coordonnées du pôle de rang k de la première série, γ_k, δ_k celles d'un pôle de la seconde, l'équation précédente prend la forme, tout à fait pareille à celle que nous avons obtenue dans le plan,

$$\text{(26)} \qquad \frac{\Pi(u-\alpha_k)\,\Pi(v-\beta_k)}{\Pi(\alpha_k-\beta_k)} = k^2 \frac{\Pi(u-\gamma_k)\,\Pi(v-\delta_k)}{\Pi(\gamma_k-\delta_k)}.$$

Mais il est inutile de recommencer la théorie. Il suffira de se rappeler les propriétés des courbes planes.

Nous avons vu que, si une courbe plane réelle est définie par l'équation

$$\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2 \ldots \mathrm{R}_m = k r_1 \ldots r_m,$$

elle conserve cette définition : 1° avec une infinité de systèmes de pôles réels dans les deux systèmes; 2° avec une infinité de systèmes de pôles imaginaires tels que chaque pôle A_k de la première série soit imaginaire conjugué d'un pôle B_k de la seconde. Ces résultats s'appliquent immédiatement aux courbes sphériques.

Mais, avec le second système de pôles, on peut appliquer la formule

$$\frac{r_{B_k}}{r_{A_k}} = e^{\frac{i}{2} S a'_k b'_k M},$$

et, comme lorsque A_k, B_k sont imaginaires conjugués, a'_k et b'_k sont réels, on voit que la définition se transforme et que la courbe devient le lieu d'un point M formant avec m segments réels des triangles sphériques pour lesquels la somme des aires est constante. On peut donc énoncer la proposition suivante, simple conséquence des propositions établies pour le plan :

Une courbe sphérique peut être définie par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

Ou bien elle sera le lieu des points tels que le produit de leurs distances à n pôles fixes de la sphère soit proportionnel au produit de leurs distances à n autres pôles fixes de la même sphère.

Ou bien elle sera le lieu des points M *tels que les triangles sphériques formés par le point* M *avec n segments fixes aient des aires dont la somme algébrique soit constante.*

Quelle que soit celle des deux propriétés par lesquelles elle sera définie, elle pourra l'être à volonté par l'une et par l'autre, et d'une infinité de manières différentes.

Il résulte de ce que nous avons vu au nº 99 pour le plan que, dans la première définition, on peut choisir arbitrairement un des pôles réels. Voyons ce qui a lieu pour la seconde. Si l'on considère un des triangles sphériques $A_k B_k M$, il est généralement déterminé; mais il en est tout autrement si le point M vient coïncider avec un des points a_k, b_k diamétralement opposés à A_k, B_k. Supposons, par exemple, que M coïncide avec a_k; l'arc de grand cercle $A_k M$ ne sera pas déterminé en position et l'aire du triangle sphérique sera indéterminée; elle pourra donc être choisie de manière que l'équation de la courbe soit vérifiée. Ainsi, la courbe contiendra les extrémités de tous les segments diamétralement opposés aux segments A_k, B_k et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Dans la seconde définition, les extrémités des segments A_k, B_k *doivent être prises sur la courbe diamétralement opposée à la*

proposée, et l'un de ces segments pourra être choisi arbitrairement.

Appliquons ces propositions à celle de nos courbes qui est la plus simple et pour laquelle il n'y a qu'un pôle dans chaque série. C'est un petit cercle de la sphère. On sait, en effet, qu'il peut être défini d'une infinité de manières par l'équation

$$\frac{R}{r} = \text{const.},$$

et le théorème de Lexell nous apprend que, si A, B sont deux points de la sphère diamétralement opposés à deux points fixes du cercle, le triangle ABM conserve une aire constante quand le point M parcourt le cercle.

Le théorème général que nous avons établi doit donc nous apparaître ici encore comme une généralisation des deux propriétés fondamentales du cercle. Mais il y a des cas particuliers propres à la Géométrie de la sphère et que nous devons examiner spécialement. Voici le premier.

140. Supposons que, dans chaque série, les pôles soient en nombre pair $2n$, et diamétralement opposés. En vertu de l'équation

$$R_A R_a = 2 d_A,$$

l'équation de la courbe prendra la forme

$$D_1 D_2 \ldots D_n = K\, d_1 d_2 \ldots d_n, \tag{27}$$

D_k, d_k désignant les distances du point M à deux séries de diamètres fixes de la sphère.

Ces courbes particulières jouissent de toutes les propriétés générales de celles qui ont été définies plus haut. Elles peuvent être définies avec une infinité de systèmes de $2n$ pôles ou de $2n$ segments; mais il y a lieu de se demander si leur équation peut conserver la forme (27) avec d'autres systèmes de rayons.

En d'autres termes, parmi les systèmes, en nombre doublement infini, de pôles que l'on peut substituer aux pôles primitifs, y en a-t-il pour lesquels les pôles soient encore diamétralement opposés dans chacune des deux séries?

Pour répondre à cette question, nous remarquons que, dans le cas qui nous occupe, l'équation (26) prend une forme particulière. Soient par exemple α_k, β_k les valeurs de u et de v pour un pôle de la première série; pour le pôle diamétralement opposé, ces valeurs seront interverties β_k et α_k; de là il suit qu'en posant

$$\varphi(u) = \Pi \frac{(u-\alpha_k)(u-\beta_k)}{\alpha_k-\beta_k}$$

et de même

$$f(u) = k\Pi \frac{(u-\gamma_k)(u-\delta_k)}{\gamma_k-\delta_k},$$

l'équation de la courbe sera

$$\varphi(u)\varphi(v) = f(u)f(v). \tag{28}$$

En lui appliquant notre méthode générale, nous pouvons l'écrire

$$\begin{aligned}[t] [\varphi(u)+\lambda f(u)]\,[\varphi(v)+\lambda' f(v)] \\ = [f(u)+\lambda'\varphi(u)]\,[f(v)+\lambda\varphi(v)]. \end{aligned} \tag{29}$$

Si donc on prend $\lambda = \lambda'$, on lui conservera la forme qu'elle avait primitivement. Ainsi, *quand une courbe est représentée par l'équation* (27), *elle peut être définie de la même manière avec une infinité de systèmes de rayons*. Les nouveaux pôles qui servent à la définir sont donnés par les équations

$$\varphi(u)+\lambda f(u) = 0, \qquad \varphi(v)+\lambda f(v) = 0 \tag{30}$$

pour le premier groupe et

$$f(u)+\lambda\varphi(u) = 0, \qquad f(v)+\lambda\varphi(v) = 0 \tag{31}$$

pour le second. On voit aisément qu'ils sont réels dès que λ est réel; les uns et les autres sont sur la courbe

$$\varphi(u)f(v) - \varphi(v)f(u) = 0, \tag{32}$$

qui contient le cercle de l'infini, caractérisé par la relation $u = v$.

Si, au lieu de supposer λ réel dans les équations (30) et (31), on prend pour λ une imaginaire de module 1, on verra que les pôles de la première série sont imaginaires conjugués de ceux de la seconde; et, en vertu de notre troisième équation, on pourra trouver n segments réels A_k, B_k tels que la somme des angles à la base des

triangles $A_k B_k M$ soit constante. Réciproquement, cette propriété entraînerait la première.

Parmi les courbes les plus simples appartenant à cette catégorie se trouve une conique que nous appellerons *la conique de Chasles*. Elle est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux rayons de la sphère soit constant. Elle conserve cette propriété avec une infinité de systèmes de rayons, tous situés dans le même plan que les premiers ; et elle est aussi le lieu des points tels que la somme des angles à la base du triangle sphérique ayant pour sommets le point de la courbe et deux points fixes qu'on peut choisir d'une infinité de manières soit constante.

141. Nous devons envisager maintenant un autre cas particulier remarquable : c'est celui où les pôles de l'une des séries sont diamétralement opposés à ceux de l'autre. Alors, d'après l'équation (21) du n° 136, on pourra choisir n segments fixes tels que la somme des angles sous lesquels on verra ces segments d'un point quelconque de la courbe soit constante. D'après la formule (21), l'équation de notre courbe prendra la forme

$$e^{i\sum \widehat{A_k MB_k}} = \prod \frac{r_{A'_k}\, r_{b'_k}}{r_{B'_k}\, r_{a'_k}} = e^{ih}, \tag{33}$$

où, en introduisant les coordonnées u et v,

$$f(u)\,\varphi(v) = e^{-2ih} f(v)\,\varphi(u). \tag{34}$$

On peut l'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} &[\varphi(u) + \lambda e^{ih} f(u)]\,[\varphi(v) + \lambda' e^{-ih} f(v)] \\ &\quad = [\varphi(v) + \lambda e^{-ih} f(v)]\,[\varphi(u) + \lambda' e^{ih} f(u)]. \end{aligned}$$

Pour qu'elle puisse conserver la forme qui lui a servi de définition, il faut et il suffit que les deux polynomes

$$\varphi(u) + \lambda e^{ih} f(u), \qquad \varphi(v) + \lambda e^{-ih} f(v)$$

aient les mêmes racines, ce qui exige que l'on ait

$$e^{2ih} = 1.$$

Si cette condition est remplie, on obtiendra une infinité de solutions.

Si on l'interprète à l'aide de la relation (33), on voit qu'elle exprime que la somme des angles sous lesquels du point M on voit les n segments est un multiple de π. Cette conséquence résulte aussi de ce fait qu'alors la courbe donnée doit contenir le cercle défini par l'équation $u = v$, c'est-à-dire le cercle de l'infini. Son équation prend la forme

$$(35) \qquad f(u)\varphi(v) - f(v)\varphi(u) = 0.$$

Parmi les courbes appartenant à cette catégorie, la plus simple est le lieu des foyers des coniques sphériques tangentes à quatre grands cercles. On peut lui appliquer presque tous les développements que nous avons donnés dans le cas du plan (n° 100).

142. Nous signalerons enfin une relation remarquable entre les deux cas particuliers que nous venons d'examiner.

Reprenons l'équation de la courbe définie par la relation (27) entre les distances D_k, d_k à deux séries de droites. Si, dans l'équation (29) de cette courbe, on prend $\lambda = 1$, $\lambda' = -1$, et si l'on pose

$$\varphi(u) - f(u) = \Phi(u), \qquad \varphi(v) + f(v) = F(v),$$

l'équation devient

$$(36) \qquad \Phi(u)F(v) = -\Phi(v)F(u).$$

Ce n'est pas tout à fait la forme (35) que nous avons obtenue plus haut. Mais il suffit, pour obtenir la concordance, d'élever l'équation précédente au carré, ce qui donne

$$\Phi^2(u)F^2(v) = \Phi^2(v)F^2(u).$$

Alors tous les pôles deviennent *doubles* et la courbe peut être définie comme le lieu des points M tels que la somme des doubles des angles

$$\widehat{A_k M B_k}$$

soit égale à un multiple de π qui sera nécessairement impair.

On aura donc

$$\Sigma \widehat{A_k M B_k} = (2h+1)\frac{\pi}{2}.$$

Dans le cas de la conique de Chasles, il y aura un seul angle et *la conique sera le lieu des sommets des angles droits dont les côtés vont passer par deux points fixes.* Cette définition sera d'ailleurs unique.

La même conclusion s'applique au lieu des sommets des angles constants dont les côtés passent par deux points fixes. Cette courbe est la plus simple de celles qui rentrent dans la catégorie considérée plus haut, et nous avons vu qu'elles ne sont susceptibles d'autres définitions de même nature que si la somme des angles $A_k M B_k$ est un multiple de π.

143. Il ne nous reste plus qu'un mot à dire du système orthogonal qu'on peut former avec les courbes précédentes. Nous nous bornerons aux énoncés suivants :

Les courbes lieux des points pour lesquels il y a un rapport constant entre les produits des distances à deux séries de pôles fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *sont coupées à angle droit par les courbes lieux des points tels que la somme des aires des triangles sphériques ayant pour sommets ce point et deux des points* a_k, b_k *diamétralement opposés à* A_k *et à* B_k, *soit constante.*

Les courbes lieux des points pour lesquels il y a un rapport constant entre les produits des distances à deux séries de rayons fixes $OA, \ldots, OA_n$, $OB, \ldots, OB_n$ *sont coupées à angle droit par les courbes lieux des points tels que la somme des angles* $A_k M B_k$ *soit constante.*

Ce dernier théorème, énoncé dans le cas le plus simple, prend la forme suivante :

Les coniques sphériques lieu des points pour lesquels le rapport des distances à deux diamètres fixes OA, OB *est constant sont coupées à angle droit par les courbes du quatrième ordre lieux des points* M *pour lesquels les deux grands cercles* MA, MB *font un angle constant.*

C'est une seconde généralisation de la propriété du segment capable dans le plan.

144. En terminant, nous indiquerons en quelques mots une

transformation que l'on peut faire subir aux propositions précédentes.

Substituons aux courbes définies par l'équation générale leurs courbes polaires. Elles peuvent évidemment être définies comme enveloppes d'un grand cercle qui fait avec deux séries de grands cercles fixes des angles variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et $\beta_1, \ldots, \beta_m$ liés par la relation

$$(37) \qquad \sin\frac{1}{2}\alpha_1 \sin\frac{1}{2}\alpha_2 \ldots \sin\frac{1}{2}\alpha_m = k \sin\frac{1}{2}\beta_1 \sin\frac{1}{2}\beta_2 \ldots \sin\frac{1}{2}\beta_m.$$

Alors, si l'on se rappelle que, dans une telle transformation, l'aire d'un triangle est remplacé par le périmètre du triangle polaire, notre théorème fondamental du n° 139 prendra la forme suivante :

Si une courbe est l'enveloppe d'un grand cercle qui fait, avec deux séries de grands cercles fixes, des angles α_k, β_k *liés par une relation de la forme* (37), *elle conservera cette définition avec une infinité d'autres systèmes de grands cercles fixes, l'un d'eux pouvant être choisi arbitrairement. De plus, elle pourra être définie, d'une infinité de manières, comme l'enveloppe d'un grand cercle qui formera avec n couples de grands cercles fixes n triangles sphériques pour lesquels la somme des périmètres sera constante. Réciproquement, cette définition entraînera la première.*

Nous voyons ainsi que la méthode des figures supplémentaires établit un lien entre les propositions de Géométrie plane *que nous avons dû étudier séparément* aux Chapitres I et II de ce Livre. Il y a là un exemple intéressant des services que la Géométrie sphérique peut rendre à la Géométrie dans le plan.



LIVRE III.

LES THÉORÈMES DE PONCELET.

CHAPITRE I.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME PARTICULIER DE COORDONNÉES.

Définition du système de coordonnées que l'on va étudier. — Les lignes coordonnées sont les tangentes d'une conique. — Comment on est conduit à ce système. — Représentation étudiée par Chasles d'une surface du second degré sur un plan double. — Représentation des sections planes, des génératrices rectilignes. — Examen de diverses équations; équations symétriques par rapport aux deux coordonnées; équations non symétriques. — Emploi du système pour montrer que certaines formes typiques contenant en apparence le nombre de constantes nécessaire sont impropres à représenter une courbe du quatrième degré. — Courbes passant par les intersections de deux systèmes de n droites. — Cas où ces droites sont tangentes à une conique. — Si un quadrilatère inscrit à une conique est circonscrit à une autre conique, il y a une infinité de quadrilatères ayant la même propriété. — Applications du théorème général concernant les courbes du troisième degré. — Il y a une double infinité de quadrilatères complets dont les six sommets appartiennent à une cubique. — Courbes d'ordre $n-1$ passant par tous les points d'intersection de n droites. — Cas où ces droites sont tangentes à une conique.

145. A l'occasion de nos définitions relatives aux éléments métriques, nous avons été amenés à considérer, dans le plan et sur la sphère, deux systèmes spéciaux de coordonnées. Dans le plan, nous avons défini un point par l'intersection des deux lignes isotropes sur lesquelles il est situé (n° 98). Sur la sphère, nous avons employé le système de coordonnées formé par les génératrices rectilignes imaginaires de la surface. Il est clair que l'on passe de l'un à l'autre de ces systèmes par une projection stéréographique, qui transforme les droites génératrices de la sphère dans les droites isotropes du plan de projection. Mais ce mode de projection peut

être généralisé, et, si l'on prend le point de vue hors de la sphère, on est conduit dans le plan à un système de coordonnées que nous allons définir d'une manière précise et qui mérite d'être étudié.

Considérons, d'une manière générale, une surface quelconque du second degré (Q), un point A, hors de cette surface, et un plan (ϖ). Si l'on joint un point quelconque M de (Q) au point A, la droite AM rencontrera le plan (ϖ) en un point m et la perspective que l'on aura faite ainsi des différentes régions de (Q) nous donnera une représentation de cette surface sur le plan. Mais cette représentation, dont Chasles a fait une étude approfondie, sera essentiellement distincte de celles que nous avons considérées jusqu'ici.

En effet, tandis qu'à un point M de la surface correspond toujours un seul point m du plan (ϖ), il correspond au contraire à un point m de ce plan deux points M', M'' de la quadrique. Ce sont ceux où la droite Am rencontre cette quadrique. Ils peuvent être réels ou imaginaires; ils seront confondus seulement si la droite Am est une génératrice rectiligne du cône (C) de sommet A circonscrit à (Q), c'est-à-dire si le point m est sur la conique *indécomposable* (K) qui est l'intersection du cône (C) par le plan (ϖ).

Les représentations de ce genre méritent d'être étudiées. Pour les distinguer de celles que nous avons envisagées au n° 117, on dit que *la surface est représentée sur un plan double*. Examinons ce qui caractérise la précédente.

Toute section plane de (Q), étant doublement tangente au cône (C), sera représentée sur le plan (ϖ) par une conique doublement tangente à (K). Réciproquement, toute conique doublement tangente à (K) sera la base d'un cône de sommet A doublement tangent à (Q) et qui coupera, par conséquent, cette quadrique suivant deux courbes planes. Ainsi, toute conique doublement tangente à (K) est bien la représentation de deux sections planes de la surface.

Les génératrices rectilignes de (Q) sont toutes tangentes au cône (C), elles se projettent donc suivant les tangentes à la conique (K). Réciproquement, toute tangente à (K) est la projection de deux génératrices rectilignes de (Q) qui appartiennent à des systèmes différents.

146. Il suit de là que, si l'on emploie, pour déterminer les points de la quadrique, le système de coordonnées formé par les deux

systèmes de génératrices, réelles ou imaginaires, il aura pour représentation, dans le plan (ϖ), un système de coordonnées dans lequel chaque point sera déterminé par l'intersection de deux tangentes à la conique (K). C'est ce système que nous allons étudier.

Écrivons l'équation de la conique (K) sous la forme

$$y^2 - xz = 0, \tag{1}$$

il est clair que l'équation

$$\rho^2 x - 2\rho y + z = 0, \tag{2}$$

où ρ désigne un paramètre variable, représentera une tangente quelconque de la conique. Les paramètres ρ et ρ_1 des deux tangentes qui passent en un point arbitraire (x, y, z) du plan seront déterminés par l'équation précédente, en sorte que l'on aura

$$\begin{cases} 2y = x(\rho + \rho_1), \\ z \;= x\rho\rho_1; \end{cases} \tag{3}$$

ρ et ρ_1 seront les coordonnées du point dans le système de coordonnées considéré.

Avec ce système, l'équation de la conique (K) prend la forme

$$(\rho - \rho_1)^2 = 0 = \frac{4(y^2 - xz)}{x^2} \tag{4}$$

qui était évidente *a priori*.

Si donc on ajoute aux coordonnées homogènes x, y, z une quatrième coordonnée t, définie par la relation

$$2t = x(\rho - \rho_1), \tag{5}$$

on obtient l'équation

$$t^2 = y^2 - xz \tag{6}$$

qui représente une certaine quadrique (Q) représentée sur le plan double selon le mode que nous avons indiqué. Le point de vue A serait le sommet du tétraèdre de référence opposé au plan (ϖ).

147. Les formules (3) sont symétriques par rapport à ρ et à ρ_1; de sorte que toute courbe représentée par l'équation homogène

$$F(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

sera définie, dans le nouveau système de coordonnées, par l'équation

$$(8) \qquad F\left(1, \frac{\rho+\rho_1}{2}, \rho\rho_1\right) = 0,$$

parfaitement symétrique par rapport à ρ et à ρ_1. Chacune de ces coordonnées figurera dans l'équation à un degré égal au degré même de la courbe.

Examinons maintenant ce que représente une équation

$$(9) \qquad f(\rho, \rho_1) = 0,$$

non symétrique par rapport à ρ et à ρ_1. Comme on peut l'écrire

$$\frac{f(\rho,\rho_1)+f(\rho_1,\rho)}{2} + \frac{f(\rho,\rho_1)-f(\rho_1,\rho)}{2} = 0,$$

on voit qu'elle se compose de deux parties, l'une symétrique par rapport à ρ et à ρ_1, l'autre qui change de signe quand on échange ρ et ρ_1 et qui, par suite, est divisible par $\rho - \rho_1$. Ainsi, toute équation non symétrique peut s'écrire

$$(10) \qquad \varphi(\rho,\rho_1) + (\rho-\rho_1)\psi(\rho,\rho_1) = 0,$$

φ et ψ étant deux fonctions symétriques par rapport à ρ et à ρ_1.

Il pourrait se faire que les deux fonctions φ et ψ eussent un diviseur commun, que l'on peut toujours supposer symétrique en ρ et ρ_1. S'il en était ainsi, on déterminerait ce facteur par les méthodes usuelles et on l'étudierait à part. Nous pourrons donc supposer dans la suite que φ et ψ n'ont aucun facteur commun; et, comme ils sont symétriques en ρ et ρ_1, on pourra les exprimer rationnellement en x, y, z de sorte qu'en tenant compte de la relation (4), l'équation (10) prendra la forme indécomposable

$$(11) \qquad \Phi^2(x,y,z) - (y^2 - xz)\Psi^2(x,y,z) = 0.$$

Elle représente une courbe qui est tangente à la conique (K) en tous les points où elle la rencontre et admet comme points doubles tous les points d'intersection des deux courbes définies par les équations

$$(12) \qquad \Phi(x,y,z) = 0, \qquad \Psi(x,y,z) = 0.$$

Soit, par exemple,

$$(13)\qquad A\rho\rho_1 + B\rho + C\rho_1 + D = 0$$

l'équation la plus générale qui soit du premier degré en ρ et ρ_1. Il y a lieu de distinguer deux cas :

Si elle est symétrique, c'est-à-dire si l'on a $B = C$, elle représente la droite

$$Az + 2By + Dx = 0$$

qui est une droite *quelconque* du plan.

Si l'équation n'est pas symétrique, elle représente la conique

$$(14)\qquad [Az + (B + C)y + Dx]^2 - (B - C)^2(y^2 - xz) = 0,$$

qui est doublement tangente à la conique de base. Réciproquement, toute conique inscrite dans la conique (K) peut être représentée par une équation de la forme (13), ou plutôt par deux équations de cette forme ; car on peut échanger ρ, ρ_1.

Considérons maintenant une équation du second degré en ρ, ρ_1. Si elle est symétrique, elle peut s'écrire

$$(15)\qquad A\rho^2\rho_1^2 + B\rho\rho_1(\rho + \rho_1) + C(\rho + \rho_1)^2 + 2D\rho\rho_1 + E(\rho + \rho_1) + F = 0.$$

En se servant des formules (3), on obtient la conique

$$(16)\qquad Az^2 + 2Byz + 4Cy^2 + 2Dzx + 2Exy + Fx^2 = 0$$

qui n'est assujettie à aucune condition.

Si l'équation (15) n'est pas symétrique, on peut l'écrire, comme nous l'avons vu,

$$\varphi(\rho, \rho_1) + (\rho - \rho_1)\,\psi(\rho, \rho_1) = 0,$$

φ et ψ étant symétriques et respectivement du second et du premier degré par rapport à chacune des variables. En passant aux coordonnées homogènes, on aura donc pour l'équation de la courbe

$$(17)\qquad \Phi^2(x, y, z) - (y^2 - xz)\,\Psi^2(x, y, z) = 0,$$

Ψ et Φ étant respectivement du premier et du second degré. On obtient ainsi une courbe du quatrième ordre à deux points doubles tangente en quatre points à la conique (K).

148. Le système de coordonnées que nous venons d'étudier est très propre à la solution des questions relatives aux polygones circonscrits à une conique. Proposons-nous, par exemple, le problème suivant :

Étant donné un polygone de n côtés circonscrit à la conique (K), *on connaît les trajectoires de ses $n-1$ premiers sommets; déterminer la trajectoire du $n^{ième}$.*

Désignons par ρ, ρ_1 les coordonnées du premier sommet; celles du second seront évidemment ρ_1 et ρ_2; de même, celles des sommets suivants seront ρ_2 et ρ_3; ρ_3 et ρ_4; ...; ρ_{n-1} et ρ. Puisqu'on connaît les trajectoires des $n-1$ premiers sommets, on pourra écrire les équations qui les déterminent

$$(18)\quad f(\rho,\rho_1)=0,\qquad f_1(\rho_1,\rho_2)=0,\qquad \ldots,\qquad f_{n-2}(\rho_{n-2},\rho_{n-1})=0.$$

Il suffira d'éliminer entre ces $n-1$ équations $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-2}$ et l'on aura la relation entre ρ et ρ_{n-1}, c'est-à-dire la trajectoire du dernier sommet.

Supposons, par exemple, que les $n-1$ sommets soient assujettis à décrire des coniques doublement tangentes à (K). On pourra, de deux manières différentes, réduire chacune des relations (18) à la forme homographique

$$A\rho\rho_1 + B\rho + C\rho_1 + D = 0,$$

et l'élimination des variables intermédiaires conduira à une relation de même forme. Ainsi le dernier sommet décrira une ou plusieurs coniques inscrites à (K).

Si les sommets du polygone circonscrit étaient assujettis à décrire des coniques quelconques, les relations (18) seraient toutes doublement quadratiques et symétriques.

149. L'emploi du système de coordonnées précédent permet également de montrer qu'il est impossible de prendre certaines formes typiques comme point de départ pour l'étude de différentes courbes algébriques.

Si l'on introduit, par exemple, cinq fonctions linéaires quelconques A_i des coordonnées homogènes x, y, z et cinq cons-

tantes a_i, il semble que l'une ou l'autre des équations

$$\frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} + \frac{a_3}{A_3} + \frac{a_4}{A_4} + \frac{a_5}{A_5} = 0, \tag{19}$$

$$a_1 A_1^4 + a_2 A_2^4 + a_3 A_3^4 + a_4 A_4^4 + a_5 A_5^4 = 0 \tag{20}$$

pourrait représenter la courbe la plus générale du quatrième ordre, puisque chacune de ces équations contient 15 constantes arbitraires.

Les raisonnements de ce genre, qui reposent sur une énumération des constantes, doivent n'être employés qu'avec la plus grande précaution. Nous allons voir qu'ici, précisément, ils se trouvent en défaut.

Prenons pour la conique (K) celle qui est tangente aux cinq droites représentées par les équations

$$A_i = 0.$$

Alors, chacune de ces fonctions pourra être mise sous la forme

$$A_i = h_i^2 x - 2 h_i y + z = x(h_i - \rho)(h_i - \rho_1),$$

et les équations (19) et (20) deviendront

$$\sum \frac{a_i}{(h_i - \rho)(h_i - \rho_1)} = 0, \tag{19$_a$}$$

$$\sum a_i (h_i - \rho)^4 (h_i - \rho_1)^4 = 0. \tag{20$_a$}$$

Considérons d'abord la première. En la multipliant par $\rho - \rho_1$ et posant

$$\sum \frac{a_i}{\rho - h_i} = \frac{\varphi(\rho)}{f(\rho)},$$

elle peut prendre la forme

$$\frac{\varphi(\rho)}{f(\rho)} = \frac{\varphi(\rho_1)}{f(\rho_1)}, \tag{19$_b$}$$

φ et f désignant des polynomes du quatrième et du cinquième degré respectivement. Or, on peut remplacer l'équation précédente par la suivante :

$$\frac{\varphi(\rho)}{f(\rho) + k\varphi(\rho)} = \frac{\varphi(\rho_1)}{f(\rho_1) + k\varphi(\rho_1)}$$

et l'on voit que, si l'on pose

$$f(\rho)+k\varphi(\rho)=\prod_1^5(\rho-h'_i),$$

on retombera sur une équation

$$\sum\frac{a'_i}{(h'_i-\rho)(h'_i-\rho_1)}=0,$$

absolument de même forme que l'équation $(19)_a$, mais où aura été introduite une arbitraire k, qui permettra, par exemple, d'attribuer à l'une des racines h'_i telle valeur que l'on voudra. Ainsi, l'équation $(19)_a$ ne saurait contenir le nombre de constantes nécessaire pour représenter la courbe générale du quatrième ordre.

Passons à la seconde équation (20). Pour l'étudier, nous adjoindrons au polynome

$$f(\rho)=\prod_1^5(\rho-h_i) \tag{21}$$

un autre polynome

$$F(\rho)=\prod_1^5(\rho-\beta_i), \tag{22}$$

où les β_i seront cinq nouvelles constantes. Si l'on pose

$$\Phi(\rho)=f(\rho)\,F(\rho),$$

et si l'on désigne par $\Psi(\rho)$ un polynome quelconque du huitième degré, la théorie des fractions rationnelles nous conduit à l'identité

$$\sum\frac{\Psi(\rho_i)}{\Phi'(\rho_i)}=0,$$

où ρ_i désigne l'une quelconque des racines de $\Phi(\rho)$. Tenant compte de ce que $\Phi(\rho)$ est le produit de deux facteurs, nous trouvons

$$\sum_1^5\frac{\Psi(h_i)}{f'(h_i)\,F(h_i)}=-\sum_1^5\frac{\Psi(\beta_i)}{f(\beta_i)\,F'(\beta_i)}.$$

Prenons pour $\Psi(\rho)$ le polynome

$$(\rho^2x-2\rho y+z)^4,$$

l'identité précédente deviendra

$$(23)\qquad \sum_1^5 \frac{A_i^2}{f'(h_i)\,F(h_i)} = -\sum_1^5 \frac{(\beta_i^2 x - 2\beta_i y + z)^4}{f(\beta_i)\,F'(\beta_i)}.$$

Déterminons maintenant le polynome $F(u)$ par la condition que l'on ait

$$(24)\qquad \frac{1}{f'(h_i)\,F(h_i)} = \frac{a_i}{m},$$

qui laissera évidemment subsister une arbitraire dans l'expression de $F(u)$. Le premier membre de l'identité (23) sera identique à celui de l'équation (20), divisé par m, et l'on voit ici encore que cette équation ne saurait représenter la courbe générale du quatrième ordre, puisqu'elle peut être obtenue avec une infinité de systèmes de constantes.

Pour résoudre les équations (24), il suffit de décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{F(\rho)}{f(\rho)}.$$

On trouve ainsi

$$(25)\qquad \frac{F(\rho)}{f(\rho)} = 1 + m\sum_1^5 \frac{1}{a_i f'^2(h_i)}\,\frac{1}{\rho - h_i}.$$

150. La méthode que nous avons suivie dans l'étude des questions précédentes peut être appliquée à des problèmes plus étendus.

Supposons, par exemple, que l'on ait deux systèmes de n droites représentés par les équations

$$A_1 A_2 \ldots A_n = 0, \qquad B_1 B_2 \ldots B_n = 0.$$

L'équation générale des courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre qui passent par leur intersection sera de la forme

$$(26)\qquad A_1 A_2 \ldots A_n = k B_1 B_2 \ldots B_n.$$

Examinons l'hypothèse où toutes les droites A_i, B_h seraient tangentes à une même conique. Alors, on pourra écrire

$$A_i = x(a_i - \rho)(a_i - \rho_1),$$
$$B_h = x(b_h - \rho)(b_h - \rho_1),$$

et si l'on pose

$$\varphi(\rho) = \Pi(\rho - a_i), \qquad \psi(\rho) = \sqrt{k}\,\Pi(\rho - b_h), \tag{27}$$

l'équation de la courbe deviendra

$$\varphi(\rho)\varphi(\rho_1) = \psi(\rho)\psi(\rho_1). \tag{28}$$

Nous avons déjà rencontré (n° 99) cette forme d'équation, et nous avons remarqué qu'on peut la conserver en introduisant une arbitraire. Car, si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(u) &= m\,\varphi(u) + m'\psi(u), \\ \Psi(u) &= m'\varphi(u) + m\,\psi(u), \end{aligned}\right. \tag{29}$$

l'équation

$$\Phi(\rho)\Phi(\rho_1) = \Psi(\rho)\Psi(\rho_1) \tag{30}$$

sera équivalente à la précédente (28).

Ainsi, *si une courbe d'ordre n contient les intersections de deux systèmes de droites, toutes tangentes à une conique, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de n droites.*

Considérons, par exemple, le cas où $n = 2$. On a le théorème suivant :

Si un quadrilatère est inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, il y a une infinité de quadrilatères jouissant de la même propriété.

D'après les équations (29), deux côtés opposés sont définis par une équation de la forme

$$\varphi(\rho) + \lambda\psi(\rho) = 0,$$

où λ est une arbitraire pouvant recevoir toutes les valeurs, ce qui montre qu'ils déterminent une involution sur la conique. Par conséquent, le point de concours de deux côtés opposés décrira une droite. Comme cette droite est la polaire du point de rencontre des diagonales, ce point de rencontre restera fixe.

Nous obtenons ainsi un nouveau cas particulier des théorèmes de Poncelet.

151. D'autres applications concernent les courbes du troisième degré. Étant donnée une telle courbe (C_3), coupons-la par deux

droites quelconques A_1, A_2. Si l'on joint les trois points où A_1 coupe la courbe aux trois points où la courbe est coupée par A_2, on obtient trois droites B_1, B_2, B_3. Soient

$$C = 0$$

l'équation de la courbe et

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = 0, \qquad B_3 = 0$$

les équations des trois droites B_1, B_2, B_3. L'équation

$$C + kB_1 B_2 B_3 = 0 \tag{31}$$

représente, quel que soit k, une courbe du troisième degré qui contient les points d'intersection de (C_3) et des droites A_1, A_2. Si l'on dispose de k de telle manière qu'elle contienne un des points de A_1 qui ne sont pas sur la courbe, la cubique représentée par l'équation précédente coupera en quatre points la droite A_1, et par conséquent la contiendra tout entière. A_1 sera donc en facteur dans le premier membre de l'équation (31). Si on le supprime, il nous restera l'équation d'une conique qui contiendra les trois points où la droite A_2 coupe la cubique (C_3) et qui se composera, par conséquent, de A_2 et d'une autre droite A_3. Ainsi, on pourra choisir k de manière à obtenir l'identité

$$C + kB_1 B_2 B_3 = A_1 A_2 A_3,$$

ce qui permettra d'écrire l'équation de la cubique sous la forme

$$C = -kB_1 B_2 B_3 + A_1 A_2 A_3 = 0. \tag{32}$$

Ainsi,

Étant donnée une cubique, si on la coupe par deux droites quelconques A_1, A_2 *et que l'on joigne comme on voudra les trois points d'intersection de la première droite avec la cubique aux trois points d'intersection de la seconde, on obtient trois droites* B_1, B_2, B_3 *qui vont couper la cubique en trois nouveaux points qui sont en ligne droite, et l'équation de la cubique peut être ramenée à la forme* (32).

Cette forme fait intervenir six droites A_i, B_h qui ne sont pas en général tangentes à une conique; mais, quelle que soit la cubique, il est aisé d'indiquer des cas particuliers assez nombreux dans lesquels elles satisfont à cette condition.

Supposons, par exemple, que les deux droites A_1, A_2 aient été prises coïncidentes. L'équation (32) deviendra

$$A_1^2 A_3 - k B_1 B_2 B_3 = 0$$

et elle n'emploiera plus que cinq droites, qui seront tangentes à une conique. En employant le système de coordonnées qui a pour base cette conique, la voie sera ouverte à l'application de la proposition générale. Ici seulement, il faudra supposer que $\varphi(\rho)$ a un facteur double et prendre

$$\varphi(\rho) = (\rho - a_1)^2 (\rho - a_3),$$
$$\psi(\rho) = \sqrt{h} (\rho - b_1)(\rho - b_2)(\rho - b_3),$$

$\Phi(\rho)$, $\Psi(\rho)$ se détermineront ensuite par les formules (29).

152. Nous ferons usage de l'un des résultats précédents pour établir une proposition qui nous sera utile dans la suite.

Étant donnée une cubique quelconque, menons une droite A_1 qui la coupe en trois points m_1, m_2, m_3. Menons la tangente en m_1, B_1. Elle va couper la conique en un point μ duquel on peut mener à cette courbe une tangente autre que μm_1. Soit m' le point de contact de cette tangente. Si l'on joint le point m' aux deux points m_2, m_3 de A_1, on obtient deux nouvelles droites B_2, B_3 qui, avec B_1, jouent le rôle de celles qui figurent dans l'équation générale (32). Donc les deux points d'intersection m'_2, m'_3, différents de m', m_2, m_3, des deux droites B_2, B_3 avec la cubique déterminent une droite qui va passer par le point m_1.

Ainsi, *il existe une double infinité de quadrilatères complets* $m_1 m' m_2 m'_2 m_3 m'_3$ *dont tous les sommets sont sur la cubique.*

Nous reviendrons sur cette proposition.

153. Étant données n droites définies par les équations

$$(33) \qquad A_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

il est aisé de montrer que l'équation générale des courbes d'ordre $n - 1$ passant par *tous* leurs points communs peut se mettre sous la forme

$$(34) \qquad \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} + \ldots + \frac{a_n}{A_n} = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignant des constantes arbitrairement choisies. Soit, en effet,

$$C = 0$$

l'équation d'une telle courbe. L'équation

$$C - A_1 A_2 \ldots A_n \left(\frac{a_1}{A_1} + \ldots + \frac{a_n}{A_n}\right) = 0$$

représente évidemment, si elle ne se réduit pas à une identité, une autre courbe jouissant de la même propriété. Car, si C devient nul pour $A_i = A_k = 0$, il en est évidemment de même du premier membre de l'équation précédente.

Or, on peut disposer des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de telle manière que ce premier membre s'annule pour un point de chaque droite A_i distinct de ceux où cette droite est coupée par les autres droites A_k. On aurait donc une courbe de degré $n-1$ qui serait coupée en n points par n droites et qui devrait par conséquent les contenir tout entières, ce qui est évidemment impossible. L'équation précédente doit donc se réduire à une identité, et l'équation (34) est bien l'équation générale des courbes de degré $n-1$ qui passent par tous les points d'intersection des droites A_i.

On rencontre des équations de cette forme quand on considère les polygones inscrits à une conique. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les côtés du polygone, pris dans leur ordre, de telle manière que la conique contienne tous les sommets $A_1 A_2, \ldots, A_i A_{i+1}, \ldots, A_n A_1$. Si l'on joint le sommet $A_n A_1$ au troisième, quatrième, ..., $n-1^{\text{ième}}$ sommet, on obtient des droites $B_1, B_2, \ldots, B_{n-3}$. La conique étant circonscrite aux triangles formés par les droites A_1, A_2, B_1, puis B_1, A_3, B_2, puis B_2, A_4, B_3 et ainsi de suite, son équation peut être mise sous les différentes formes suivantes :

$$\frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} + \frac{b_1}{B_1} = 0,$$

$$\frac{a_3}{A_3} + \frac{b_1}{B_1} + \frac{b_2}{B_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{a_{n-1}}{A_{n-1}} + \frac{b_{n-3}}{B_{n-3}} + \frac{a_n}{A_n} = 0.$$

L'élimination des fonctions B_i entre ces $n - 2$ relations conduit évidemment à une équation de la forme (34). Mais alors cette équation représente, en même temps que la conique circonscrite au polygone, une courbe d'ordre $n - 3$ *qui contient les points d'intersection des côtés qui ne sont pas des sommets du polygone.*

154. Ces résultats généraux étant établis, supposons que toutes les droites A_i qui figurent dans l'équation (34) soient tangentes à une même conique, que nous prendrons pour conique de base. Alors l'équation (34) prendra la forme

$$\sum_1^n \frac{a_i}{(\rho - \alpha_i)(\rho_1 - \alpha_i)} = 0, \tag{35}$$

et si l'on pose

$$\sum \frac{a_i}{\rho - \alpha_i} = \frac{f(\rho)}{\varphi(\rho)}, \tag{36}$$

l'équation pourra s'écrire, après multiplication par $\rho - \rho_1$,

$$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)}. \tag{37}$$

En répétant un raisonnement déjà fait, on peut lui donner la forme

$$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho) + kf(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1) + kf(\rho_1)}, \tag{38}$$

k désignant une constante arbitraire, ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Si une courbe d'ordre $n - 1$ contient tous les points d'intersection de n tangentes à une conique, elle contient aussi les points d'intersection d'une infinité d'autres systèmes de n tangentes à la même conique. Chacun de ces systèmes est défini par l'équation

$$\varphi(\rho) + kf(\rho) = 0, \tag{39}$$

où k désigne une constante arbitraire.

Nous avons vu qu'étant donnée une cubique, il sera toujours

possible de trouver une infinité de quadrilatères complets dont tous les sommets appartiendront à la cubique. Si l'on admet qu'il existe un tel quadrilatère, la proposition que nous venons de démontrer permettra de les déterminer tous. Il suffira de prendre comme conique de base une quelconque de celles qui sont inscrites dans le quadrilatère et d'appliquer ensuite la proposition précédente.

CHAPITRE II.

LES THÉORÈMES DE PONCELET.

Application nouvelle du théorème démontré à la fin du Chapitre précédent. Si un polygone est circonscrit à une conique (K) et inscrit à une conique (C), il existe une suite continue, simplement infinie, de polygones satisfaisant aux mêmes conditions. Par conséquent, il sera, en général, impossible de circonscrire à une conique un polygone d'un nombre de côtés déterminé inscrit dans une autre conique.

Étude de la suite continue de polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre quand elle existe. Tous les points d'intersection de deux côtés de ces polygones décrivent des coniques ou des droites. Quand le polygone a un nombre pair de côtés, les points de concours des côtés opposés décrivent une droite et les diagonales joignant les sommets opposés passent par un point fixe qui est le pôle de la droite. — Application au cas de deux cercles. Condition pour qu'un quadrilatère circonscrit à l'un soit inscrit à l'autre.

Compléments ajoutés aux résultats précédents par la considération d'une ligne brisée inscrite dans une conique et circonscrite à une autre conique. — Démonstration nouvelle du théorème de Poncelet. — Quand un polygone est inscrit à une conique (C) et circonscrit à une conique (K), les coniques décrites par les intersections de ses côtés font partie du faisceau tangentiel déterminé par (C) et par (K); et les coniques enveloppes de ses diagonales font partie du faisceau ponctuel déterminé par les mêmes coniques.

Explication du paradoxe soulevé par les théorèmes de Poncelet. Elle se trouve dans l'existence de polygones dont les côtés sont repliés les uns sur les autres. Si l'on écrit d'une façon suffisamment précise les conditions auxquelles doit satisfaire un polygone pour être inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, on obtient un système d'équations en nombre supérieur d'une unité à celui des inconnues.

Quand il y a une suite continue de polygones inscrits à une conique (C) et circonscrits à une conique (K), certains d'entre eux se réduisent à des lignes repliées. Il y a trois espèces de lignes repliées donnant lieu à des identités remarquables. — Rapports de cette théorie avec celle de la transformation des fonctions elliptiques.

---

155. A la fin du Chapitre précédent, nous avons donné un théorème général relatif aux courbes d'ordre $n-1$ qui passent par tous les points d'intersection de n tangentes à une conique et nous avons montré que ces n tangentes peuvent, sans que la définition de la courbe soit changée, être remplacées par une infinité d'autres systèmes de n tangentes dont les paramètres sont

donnés par une équation de la forme

$$(1) \qquad \varphi(\rho) + kf(\rho) = 0$$

où k désigne un paramètre arbitraire. Nous allons maintenant faire une étude spéciale du cas où le polygone formé par les n tangentes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la conique (K) est inscrit dans une autre conique qui contiendra, par exemple, les n sommets $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots, A_n A_1$. Nous avons vu (n° 152) que cette conique (C) satisfera à une équation de la forme (34), dans laquelle il sera permis de substituer à $\varphi(\rho)$ le polygone $\varphi(\rho) + kf(\rho)$.

Pour $k = 0$, le polygone dont les côtés sont définis par l'équation

$$\varphi(\rho) = 0$$

sera, d'après l'hypothèse, inscrit à la conique (C). Lorsque k variera d'une manière continue, l'équation (1) déterminera une suite de polygones qui, par raison de continuité, ne eesseront pas, évidemment, d'être inscrits dans (C), et dont les sommets seront l'intersection de cette conique (C) avec les tangentes de (K) dont les paramètres seront définis par l'équation (1). Et ainsi se trouve établie, dans le cas général, et par une méthode tout élémentaire, la plus belle découverte de Poncelet.

Quand un polygone est circonscrit à une conique (K) *et inscrit dans une autre conique* (C), *il existe une suite continue de polygones du même nombre de côtés qui satisfont aux mêmes conditions.*

Il suit évidemment de là qu'étant données deux coniques (C) et (K), il n'y a pas, en général, de polygone d'un nombre déterminé de côtés inscrit à (C) et circonscrit à (K). Car, s'il existait un tel polygone, il y en aurait une infinité. On pourrait prendre arbitrairement le sommet de l'un d'eux. En essayant de le construire, on pourra obtenir de proche en proche ses sommets successifs; mais il faudra une condition pour que le sommet de rang $n+1$, par exemple, si le polygone doit avoir n côtés, vienne coïncider avec le premier. Ainsi,

Si l'on veut construire un polygone d'un nombre de côtés déterminé inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, le problème est impossible ou indéterminé.

Nous reviendrons plus loin sur l'explication de ce paradoxe.

156. Dans le cas où le problème est possible, nous avons vu que l'équation (34) du Chapitre précédent représente, en même temps que la conique (C), une autre courbe (C') d'ordre $n-3$. Il est aisé de montrer que cette courbe (C') se décompose en $\frac{n-3}{2}$ coniques si n est impair, en $\frac{n-4}{2}$ coniques et une droite si n est pair.

Soit, en effet,

$$A\rho^2\rho_1^2 + B\rho\rho_1(\rho+\rho_1) + C(\rho^2+\rho_1^2) + D\rho\rho_1 + E(\rho+\rho_1) + F = 0$$

l'équation de la conique (C). Envisageons le polygone variable $A_1A_2\ldots A_n$ inscrit à (C) et circonscrit à (K). Soit ρ_i le paramètre du $n^{\text{ième}}$ côté A_iA_{i+1}. Pour assurer la généralité des raisonnements, convenons que, si i dépasse n, on aura

$$\rho_{n+i} = \rho_i.$$

Alors, en vertu de l'équation de la conique (C), deux paramètres consécutifs seront liés par la relation

$$(2)\qquad \begin{aligned} &A\rho_i^2\rho_{i+1}^2 + B\rho_i\rho_{i+1}(\rho_i+\rho_{i+1}) \\ &\quad + C(\rho_i^2+\rho_{i+1}^2) + D\rho_i\rho_{i+1} + E(\rho_i+\rho_{i+1}) + F = 0. \end{aligned}$$

D'après cela, on voit que, par des éliminations successives, on obtiendra une relation algébrique entre deux quelconques des paramètres ρ_i, par exemple entre ρ_i et ρ_{i+k}. Examinons quelle est la nature de cette relation.

Si l'on se donne le côté A_iA_{i+1} c'est-à-dire le paramètre ρ_i, l'équation (2), qui est du second degré, nous fera connaître les paramètres ρ_{i+1} et ρ_{i-1} des côtés adjacents. Si u désigne un de ces deux paramètres, toutes les équations de la forme (2) nous feront connaître les paramètres suivants en fonctions rationnelles de u et de ρ_i. De sorte que l'un quelconque d'entre eux sera de la forme

$$\rho_{i\pm k} = F_k(\rho_i, u),$$

F_k désignant une fonction rationnelle de u et de ρ_i. Donc ρ_{i+k}, ρ_{i-k} seront déterminés par une équation

$$(3)\qquad H(\rho_i)\rho_{i\pm k}^2 + K(\rho_i)\rho_{i\pm k} + L(\rho_i) = 0,$$

où H, K, L seront des fonctions rationnelles de ρ_i. Prenons, dans cette équation, k avec le signe $+$, ce qui donnera

$$(4) \qquad H(\rho_i)\rho_{i+k}^2 + K(\rho_i)\rho_{i+k} + L(\rho_i) = 0;$$

puis remplaçons i par $i-k$, ce qui est permis puisque l'équation précédente a lieu pour toutes les valeurs de k; nous aurons

$$(5) \qquad H(\rho_{i-k})\rho_i^2 + K((\rho_{i-k})\rho_i + L(\rho_{i-k}) = 0$$

et cette équation devra être compatible avec la suivante :

$$(6) \qquad H(\rho_i)\rho_{i-k}^2 + K(\rho_i)\rho_{i-k} + L(\rho_i) = 0$$

que l'on obtient en prenant le signe $-$ dans l'équation (3). Pour que les deux relations précédentes soient équivalentes, il faut évidemment qu'elles puissent être ramenées à une forme dans laquelle elles seront doublement quadratiques et symétriques par rapport à ρ_i, ρ_{i-k}.

Ce point étant établi, et nous y serons conduits plus loin d'une autre manière, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Le point d'intersection de deux côtés de rang i et $i+k$ du polygone variable inscrit à (C) *et circonscrit à* (K) *décrit aussi, quand on donne à k une valeur fixe, une conique, comme le point d'intersection de deux côtés consécutifs.*

157. Il y a cependant un cas particulier qu'il convient de signaler à part. Si le polygone variable a un nombre pair de côtés $2m$, il est clair qu'à un côté de rang i ne correspond qu'un côté de rang $i \pm m$. Par conséquent, la relation entre ρ_i et ρ_{i+m} sera seulement du premier degré, et comme elle est symétrique, *le point d'intersection de deux côtés opposés du polygone décrira une droite.*

Il suit des propositions précédentes que, si n est impair, la courbe (C′) définie plus haut (nº 153) se décomposera en $\frac{n-3}{2}$ coniques et que, si n est pair, elle se décomposera en $\frac{n-4}{2}$ coniques et une droite.

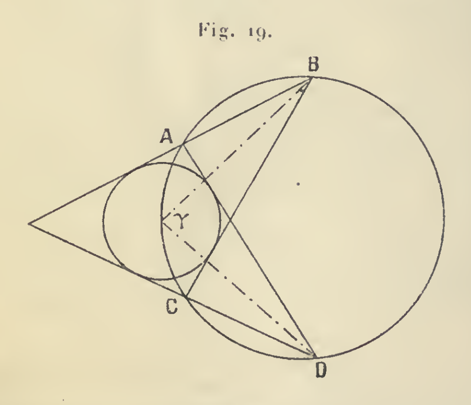
Examinons plus particulièrement le cas où n est pair. Puisque le point de concours de deux côtés opposés décrit une droite d,

la droite qui joint les points de contact avec (K) de ces deux côtés va passer par un point fixe O, qui est le pôle de d par rapport à (K). Nous allons montrer que ce point O a même polaire par rapport à (C) et à (K); qu'il est, par conséquent, un des sommets du triangle conjugué commun à ces deux coniques.

On peut présenter le raisonnement qui établit ce résultat essentiel sous une forme qui le rendra plus intuitif. Employons une homographie ou une perspective qui rejette à l'infini la polaire d de O par rapport à (K); O deviendra le centre de cette conique. Le polygone circonscrit aura maintenant ses côtés opposés parallèles, puisque la droite qui joint leurs points de contact passera par le centre. Il sera donc symétrique par rapport au point O, et par suite les diagonales qui joignent ses sommets opposés passeront par ce point. La conique (C) circonscrite au polygone aura, elle aussi, pour centre le point O, puisque plusieurs de ses cordes auront leur milieu en ce point. Ainsi, O aura même polaire par rapport aux deux coniques; et cette propriété, par sa nature, se conservera lorsqu'on reviendra à la figure primitive.

158. Supposons, par exemple, que les coniques (C) et (K) soient des cercles. Alors, les sommets du triangle conjugué sont le point à l'infini sur la direction perpendiculaire à la ligne des centres et les centres des deux cercles de rayon nul qui passent par l'intersection des deux cercles proposés.

Fig. 19.

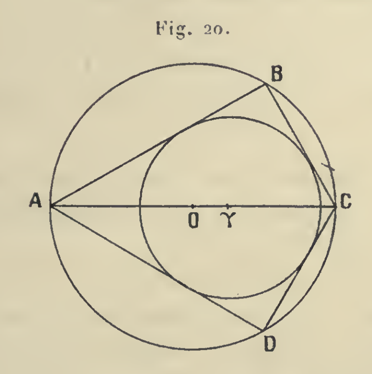


Si l'on demande qu'un quadrilatère ABCD circonscrit à (K) soit inscrit à (C), on aura donc le choix entre deux hypothèses.

Dans la première, l'un des quadrilatères circonscrits à (K) aura la position indiquée dans la figure 19, les deux diagonales AC et BD allant concourir au sommet du triangle conjugué qui se trouve à l'infini. Le cercle (C) sera celui qui sera circonscrit à ce quadrilatère. On reconnaît immédiatement *qu'il doit passer par le centre* γ *de* (K), le quadrilatère BγDC étant évidemment inscriptible.

Dans le second cas, l'un des quadrilatères circonscrits à (K) aura la position indiquée dans la figure 20. Pour qu'il soit inscriptible, il

Fig. 20.



faudra que les angles B et D soient droits. En exprimant que les deux angles BAC et BCA, dont les sinus sont $\frac{r}{R-d}$ et $\frac{r}{R+d}$, R désignant le rayon du cercle (C), r celui du cercle (K) et d la distance des centres, sont complémentaires, on obtiendra la relation

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2}.$$

159. Revenons au théorème général. Nous avons vu que tous les points d'intersection des côtés du polygone variable inscrit à (C) et circonscrit à (K) décrivent des coniques. Nous savons d'ailleurs (nº 89) qu'il existe plusieurs coniques par rapport auxquelles (C) et (K) sont polaires réciproques l'une de l'autre. Si nous effectuons cette transformation de (C) en (K) et de (K) en (C), aux polygones inscrits dans (C) et circonscrits à (K) correspondront des polygones *qui jouiront des mêmes propriétés;* mais aux points d'intersection des côtés du polygone primitif correspondront

maintenant les diagonales du second. Comme elles sont les polaires de points qui décrivent des coniques, elles envelopperont d'autres coniques qui seront les polaires réciproques des premières. En particulier, comme nous l'avons démontré directement, quand le polygone sera de degré pair, les diagonales qui joindront les sommets opposés passeront par un point fixe. Ainsi,

Quand il y a une suite continue de polygones inscrits dans une conique et circonscrits à une autre, les diagonales de ces polygones envelopperont des coniques. Quand les polygones auront un nombre pair de côtés, l'enveloppe des diagonales qui joignent deux sommets opposés se réduira à un point, qui aura même polaire par rapport aux deux coniques.

160. On peut compléter quelques-uns des résultats précédents et obtenir une démonstration nouvelle du théorème de Poncelet en raisonnant de la manière suivante :

Supposons que, d'un point quelconque de la conique (C), on mène à la conique (K) les deux tangentes qui passent par ce point; que, des nouveaux points où ces tangentes coupent la conique (C) on mène de nouvelles tangentes à la conique (K) et que l'on continue ainsi indéfiniment de manière à former une ligne brisée inscrite dans (C) et circonscrite à (K); cette ligne brisée sera indéfinie en général et pourra être prolongée dans deux sens différents. Si M est un point quelconque de (C), nous désignerons par ρ et ρ_1 les paramètres des tangentes de (K) qui se croisent en M, c'est-à-dire les coordonnées de M; celles du point M_1 où la tangente de paramètre ρ_1 coupe (C) de nouveau seront ρ_1 et ρ_2; celles du point M_{-1} où la tangente de paramètre ρ coupe (C) de nouveau seront ρ_{-1} et ρ; et ainsi de suite; en sorte que la ligne brisée $M_{-h}M_{-h+1}\ldots M_{-1}MM_1M_2\ldots M_{h'}\ldots$ sera telle que ρ_i sera le paramètre du côté $M_{i-1}M_i$, i étant positif, nul ou négatif. Si la ligne brisée se fermait, il suffirait de supposer que l'on a $\rho_{n+i}=\rho_i$ pour toutes les valeurs de i; elle se réduirait alors à un polygone de n côtés inscrit dans (C), circonscrit à (K).

Puisqu'elle est inscrite dans (C), les coordonnées de chacun de ses sommets vérifieront l'équation de cette courbe; c'est-à-dire que deux paramètres consécutifs ρ_i, ρ_{i+1} satisferont, quel que soit i,

à une relation de la forme suivante :

$$(7)\qquad f(\rho_i, \rho_{i+1}) = f(\rho_{i+1}, \rho_i) = A\rho_i^2\rho_{i+1}^2 + B\rho_i\rho_{i+1}(\rho_i + \rho_{i+1}) + C(\rho_i^2 + \rho_{i+1}^2) + D\rho_i\rho_{i+1} + E(\rho_i + \rho_{i+1}) + F = 0.$$

Nous allons montrer, de même, que toutes les intersections de deux tangentes dont le rang diffère de k et dont les paramètres sont, par conséquent, ρ_i, ρ_{i+k}, demeurent sur une même conique (C_{k-1}), lorsque la ligne brisée se déplace, c'est-à-dire qu'il existe entre ρ_i et ρ_{i+k} une relation

$$f_{k-1}(\rho_i, \rho_{i+k}) = 0,$$

tout à fait semblable à la précédente (7), quel que soit i, positif ou négatif.

En effet, l'équation (7) étant vérifiée pour toutes les valeurs de i, nous pouvons écrire les deux relations

$$f(\rho_i, \rho_{i+1}) = 0, \qquad f(\rho_i, \rho_{i-1}) = 0.$$

Si nous éliminons ρ_i entre ces deux équations, nous obtiendrons une relation du quatrième degré par rapport aux deux variables ρ_{i-1}, ρ_{i+1} ; mais le facteur $\rho_{i-1} - \rho_{i+1}$, qui était évident *a priori*, apparaîtra immédiatement dans la résultante, où il sera élevé au carré. Il restera donc une équation doublement quadratique

$$f_1(\rho_{i-1}, \rho_{i+1}) = 0,$$

qui sera évidemment symétrique par rapport aux deux variables et qui se changera dans la suivante :

$$(8)\qquad f_1(\rho_i, \rho_{i+2}) = 0$$

quand on remplacera i par $i+1$. C'est le résultat que nous avons annoncé, pour le cas le plus simple, celui où l'on a $k=2$.

Supposons maintenant que la proposition ait été établie jusqu'à une certaine valeur de k et que l'on ait obtenu les relations doublement quadratiques

$$f(\rho_i, \rho_{i+1}) = 0,\ f_1(\rho_i, \rho_{i+2}) = 0,\ \ldots,\ f_{k-2}(\rho_i, \rho_{i+k-1}) = 0,\ f_{k-1}(\rho_i, \rho_{i+k}) = 0.$$

Nous allons montrer qu'elle subsistera lorsqu'on augmentera k d'une unité. En effet, pour obtenir la relation entre ρ_i et ρ_{i+k+1}, il faut

éliminer ρ_{i+k} entre les deux équations

$$(9) \qquad f_{k-1}(\rho_i, \rho_{i+k}) = 0, \qquad f(\rho_{i+k}, \rho_{i+k+1}) = 0.$$

L'élimination conduira à une équation

$$(10) \qquad \Phi(\rho_i, \rho_{+k+1}) = 0,$$

entre ρ_i et ρ_{i+k+1}, du quatrième degré par rapport aux deux variables qu'elle contient. Mais comme la seconde des équations (9) est verifiée quand on y remplace ρ_{i+k+1} par ρ_{i+k-1} l'équation précédente devra l'être aussi quand on effectuera la même substitution, c'est-à-dire que son premier membre devra contenir le facteur $f_{k-2}(\rho_i, \rho_{i+k-1})$ qui, égalé à zéro, donne la relation entre $\rho_i \, \rho_{i+k-1}$. On aura donc

$$(11) \qquad \Phi = f_{k-2}(\rho_i, \rho_{i+k+1}) f_k(\rho_i, \rho_{i+k+1}).$$

C'est le second facteur, doublement quadratique lui aussi par rapport aux deux variables ρ_i, ρ_{i+k+1}, qu'il faudra égaler à zéro pour obtenir la relation cherchée. Comme f_k est de même forme que f_{k-1}, f_{k-2}, ..., notre proposition est démontrée.

161. Nous pouvons ajouter deux propriétés essentielles de ces polynomes f_k.

Comme, d'après la constitution de la ligne brisée, on peut changer de signe les indices, on aura, en même temps que la relation

$$(12) \qquad f_{k-1}(\rho_i, \rho_{i+k}) = 0,$$

la suivante :

$$(13) \qquad f_{k-1}(\rho_{-i}, \rho_{-i-k}) = 0.$$

Comme i est quelconque, on peut changer i en $-i-k$ dans la seconde relation, ce qui donnera

$$f_{k-1}(\rho_{i+k}, \rho_i) = 0.$$

C'est la relation primitive dans laquelle on aurait échangé les variables. *Cette relation est donc symétrique par rapport à ces variables.*

D'autre part, en changeant i en $-i$ dans la relation (13), on a

$$f_{k-1}(\rho_i, \rho_{i-k}) = 0.$$

On voit donc que les deux racines de l'équation (12) en ρ_{i+k} sont ρ_{i+k} et ρ_{i-k}. D'après cela, reprenons la relation entre deux paramètres consécutifs

$$f(\rho_i, \rho_{i+1}) = 0.$$

Si l'on résolvait par rapport à ρ_{i+1}, on trouverait deux racines ρ_{i+1} et ρ_{i-1}. Si l'on veut que ces deux racines soient égales, il faudra que ρ_i satisfasse à une équation du quatrième degré

$$F(\rho_i) = 0,$$

que l'on formera très aisément en se reportant à l'équation (7). D'après les remarques que nous avons présentées plus haut, ρ_{i+k} est une fonction rationnelle de ρ_i et ρ_{i+1}, on a

$$\rho_{i+k} = F_k(\rho_i, \rho_{i+1})$$

et de même

$$\rho_{i-k} = F_k(\rho_i, \rho_{i-1}).$$

Donc, lorsque ρ_{i-1} deviendra égal à ρ_{i+1}, ρ_{i+k} deviendra égal à ρ_{i-k}. Ainsi, *c'est pour les mêmes valeurs de ρ_i que toutes les équations*

$$(14) \qquad f_{k-1}(\rho_i, \rho_{i+k}) = 0$$

auront leurs racines égales.

162. Interprétons géométriquement les résultats précédents. Puisque les équations

$$f_{k-1}(\rho_i, \rho_{i+k}) = 0$$

sont symétriques par rapport aux deux variables qu'elles contiennent, le point de coordonnées ρ_i, ρ_{i+k} décrira une conique (C_{k-1}). Comme, d'autre part, les points de cette conique pour lesquels les deux valeurs de ρ_{i+k} deviennent égales sont ceux où elle est touchée par une des tangentes qui lui sont communes avec la conique fondamentale (K), et comme ces points correspondent à des valeurs *toujours les mêmes* de ρ_i, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'une ligne brisée se meut en restant inscrite dans (C) *et circonscrite à* (K), *les intersections de deux côtés de cette ligne dont les rangs diffèrent d'un même nombre k*

demeurent sur une conique (C_{k-1}), *qui est inscrite dans le quadrilatère circonscrit à* (C) *et à* (K).

La proposition précédente conduit, comme nous l'avons annoncé, à une nouvelle démonstration des théorèmes de Poncelet. Soit, en effet, $A_1 A_2 \ldots A_n$ un polygone inscrit à (C) et circonscrit à (K). Construisons une ligne brisée $A'_1 A'_2 \ldots A'_{n+1}$ inscrite dans (C), circonscrite à (K) et partant d'un point quelconque A'_1 de (C). Nous savons que le point d'intersection des côtés $A'_1 A'_2$ et $A'_n A'_{n+1}$ doit décrire une conique. Mais cette conique doit passer par chacun des sommets du polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$; par exemple, si A'_1 vient en A_1, A'_{n+1} vient aussi en A_1. Cette conique, passant par tous les sommets du polygone, doit évidemment se confondre avec (C).

Le raisonnement ne s'applique pas lorsque n est égal à 3 ou 4. Mais nous avons traité ces cas directement (n°s 86 et 150).

La démonstration précédente est moins simple que celle à laquelle nous avons été conduits tout d'abord. Mais elle offre l'avantage de mettre en évidence le corollaire suivant de notre proposition relative à la ligne brisée :

Lorsqu'un polygone variable se meut en demeurant inscrit dans (C) *et circonscrit à* (K), *la conique* (C_{k-1}) *décrite par le point d'intersection de deux côtés du polygone dont les rangs diffèrent de k est inscrite dans le quadrilatère circonscrit à* (C) *et à* (K). *De même, les diagonales du polygone enveloppent des coniques passant par l'intersection de* (C) *et de* (K).

163. Ce qui fait l'intérêt des théorèmes de Poncelet, c'est qu'ils mettent en évidence, dans un cas très étendu, un de ces problèmes qui devraient, semble-t-il, avoir toujours une solution et qui sont cependant impossibles en général, à moins qu'ils ne deviennent indéterminés. Les remarques suivantes contribueront à éclaircir ce paradoxe.

Soit

$$f(\rho, \rho_1) = 0 \tag{15}$$

l'équation de la conique (C); nous avons déjà remarqué que, si l'on exprime que l'équation en ρ_1 a ses racines égales, l'équation

du quatrième degré

$$F(\rho) = 0 \tag{16}$$

à laquelle on est conduit détermine les paramètres des tangentes communes à (C) et à (K). D'autre part, si l'on fait $\rho_1 = \rho$, l'équation

$$f(\rho, \rho) = 0, \tag{17}$$

du quatrième degré également, déterminera les points communs à (C) et à (K). Cela posé, s'il existe un polygone circonscrit à (K) et inscrit dans (C), les paramètres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ de ses n côtés devront satisfaire aux équations

$$f(\rho_1, \rho_2) = 0, f(\rho_2, \rho_3) = 0, \quad \ldots, \quad f(\rho_{n-1}, \rho_n) = 0, f(\rho_n, \rho_1) = 0, \tag{18}$$

qui sont au nombre de n et devront, par conséquent, avoir toujours des solutions, puisque les valeurs infinies des paramètres ne sont pas exclues. Il est intéressant d'expliquer comment ce résultat analytique, qui est incontestable, se concilie avec les théorèmes de Poncelet.

On voit immédiatement une solution des équations (1). On peut supposer que tous les paramètres ρ_i sont égaux. Alors, il suffira de vérifier l'équation

$$f(\rho_i, \rho_i) = 0$$

qui détermine les points α communs à (C) et à (K). Le polygone correspondant aurait tous ses sommets confondus en un point α et tous ses côtés confondus avec la tangente à (K) en α. Mais il y a beaucoup d'autres solutions.

La tangente en un des points α à (K) coupe (C) en α et en un autre point α_1. De ce point α_1 on peut mener une seconde tangente à (K) qui coupera (C) en un point α_2. En continuant de cette manière, on obtiendra des points $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_p$, généralement en nombre indéfini. Si, partant du point α_p, on remonte cette série on obtiendra un polygone $\alpha_p \alpha_{p-1} \alpha_{p-2} \ldots \alpha_1 \alpha \alpha \alpha \ldots \alpha \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1} \alpha_p$ qui sera fermé. Ses premiers côtés formeront la ligne brisée $\alpha_p \ldots \alpha_1 \alpha$; les côtés suivants seront formés de la tangente à (K) en α répétée un nombre arbitraire de fois. Le polygone se terminera par la ligne $\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_p$ qui se confondra avec sa première partie.

Cette hypothèse correspond au cas où l'on prendrait pour les inconnues $\rho_1, \ldots, \rho_n$ qui figurent dans les équations (18) les valeurs suivantes :

$$(19) \qquad \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{p-1}, \rho_p, \rho_p, \ldots, \rho_p, \rho_{p-1}, \rho_{p-2}, \ldots, \rho_2,$$

qui devraient satisfaire aux conditions

$$(20) \quad f(\rho_p, \rho_p) = 0, \quad f(\rho_p, \rho_{p-1}) = 0, \quad f(\rho_{p-1}, \rho_{p-2}) = 0, \quad \ldots, \quad f(\rho_2, \rho_1) = 0.$$

Si k est le nombre de fois que ρ_p figure dans la suite (19), on devra avoir

$$2p + k - 3 = n,$$

et, par conséquent, on pourra ainsi obtenir plusieurs solutions distinctes du système (18).

Il y a plus. Si n est pair tout au moins, on peut former des solutions de ce système (18) qui contiendront une arbitraire. Supposons $n = 2n'$, et construisons arbitrairement une ligne brisée $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n'+1}$ inscrite à (C) et circonscrite à (K). Il est clair que le polygone $\alpha_1 \ldots \alpha_{n'+1} \alpha_{n'} \alpha_{n'-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1$, formé par cette ligne brisée parcourue dans les deux sens, donnera une solution du problème et que les équations (18) seront vérifiées si l'on prend pour $\rho_1 \ldots \rho_{2n}$, la suite

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n'}, \rho_{n'+1}, \rho_{n'}, \rho_{n'-1}, \ldots, \rho_2,$$

les quantités qui figurent dans cette suite étant uniquement assujetties à vérifier les conditions

$$f(\rho_1, \rho_2) = 0, \qquad f(\rho_2, \rho_3) = 0, \qquad \ldots, \qquad f(\rho_{n'+1}, \rho_{n'}) = 0,$$

qui laissent subsister au moins une arbitraire.

164. On pourrait indiquer d'autres solutions du système des équations (18); les remarques précédentes suffisent à montrer qu'elles ne sont pas incompatibles; il reste à expliquer comment ce résultat s'accorde avec les théorèmes de Poncelet.

Pour cela, nous remarquerons que ces équations (18), dont nous venons de mettre en évidence certaines solutions, *ne traduisent qu'imparfaitement les conditions du problème*. Lorsque nous envisageons ces polygones circonscrits à (K) et inscrits à (C), nous supposons implicitement que deux de leurs côtés consécutifs sont

les deux tangentes, *en général distinctes*, que l'on peut mener à (K) du sommet du polygone qui est à leur point d'intersection; en sorte que, si l'on a trois côtés consécutifs de paramètres ρ_{i-1}, ρ_i, ρ_{i+1} donnant naissance aux deux équations

$$f(\rho_{i-1}, \rho_i) = 0, \qquad f(\rho_i, \rho_{i+1}) = 0,$$

ρ_{i-1} et ρ_{i+1} sont les deux racines de l'équation en u

$$f(\rho_i, u) = 0.$$

En exprimant qu'elles sont distinctes, que leur somme par exemple est celle des deux racines de l'équation précédente, on sera conduit à une équation de la forme

$$P(\rho_i)(\rho_{i-1} + \rho_{i+1}) + Q(\rho_i) = 0.$$

P et Q étant deux polynomes du second degré, cette équation peut aussi s'écrire

$$\theta_i = \frac{f(\rho_i, \rho_{i+1}) - f(\rho_i, \rho_{i-1})}{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}} = 0, \tag{21}$$

en sorte que, au système des équations (18), nous devons substituer le système des $n+1$ équations

$$f(\rho_1, \rho_2) = 0, \qquad \theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_n = 0, \tag{22}$$

qui sont *en nombre surabondant*.

A la vérité, comme on a

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{f(\rho_1, \rho_2) - f(\rho_1, \rho_n)}{\rho_2 - \rho_n}, \\ \theta_2 &= \frac{f(\rho_2, \rho_3) - f(\rho_2, \rho_1)}{\rho_3 - \rho_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_n &= \frac{f(\rho_n, \rho_1) - f(\rho_n, \rho_{n-1})}{\rho_1 - \rho_{n-1}}, \end{aligned} \right. \tag{23}$$

on obtiendra la relation

$$\theta_1(\rho_2 - \rho_n) + \theta_2(\rho_3 - \rho_1) + \ldots + \theta_n(\rho_1 - \rho_{n-1}) = 0.$$

Mais cette *identité* ne suffit pas à montrer que l'on puisse supprimer une des équations (22). Si l'on a, par exemple,

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{n-1} = 0,$$

on n'aura pas nécessairement

$$\theta_n = 0.$$

Il pourra se faire que ρ_1 égale ρ_{n-1}.

165. L'explication précédente du paradoxe soulevé par les théorèmes de Poncelet offre l'avantage de nous montrer que, même dans le cas où il y aura une infinité de polygones inscrits dans (C) et circonscrits à (K), certains d'entre eux, ayant pour sommets un des points que nous avons désignés par α et β, se réduiront à des lignes repliées. Mais comme chacun de leurs sommets devra être l'intersection des *deux* tangentes que l'on peut mener de ce sommet à (K), nous voyons tout de suite que deux sommets consécutifs ne peuvent venir se confondre que lorsqu'ils se réunissent en un de ces points β où la tangente à (C) est aussi tangente à (K); alors un des côtés du polygone se confondra avec cette tangente; et nous voyons, de même, que deux côtés consécutifs ne peuvent se confondre que si le sommet qui se trouve à leur intersection vient se placer en un des points α communs à (C) et à (K). Nous ne trouverons donc que trois espèces de lignes repliées : les unes qui commenceront en un des points α communs à (C) et à (K) et se termineront en un autre de ces points α'; les autres, commençant encore en un des points α, mais se terminant en un des points β de (C) pour lesquels la tangente est commune à (C) et à (K); enfin les dernières, commençant en un des points β et finissant en un autre point β', de même définition. Pour les premières, tous les côtés seront doubles; pour les secondes, un des côtés, la tangente en β, devra être regardé comme simple; pour les troisièmes, il y aura deux côtés simples, les tangentes en β et en β'.

Nous avons vu que les paramètres des côtés du polygone variable sont donnés par l'équation

$$\varphi(\rho) + kf(\rho) = 0, \tag{24}$$

où k est un paramètre arbitraire. Supposons d'abord que $\varphi(\rho)$ soit impair; les lignes repliées seront toutes de la seconde catégorie, et il y aura, par conséquent, quatre valeurs de k pour lesquelles auront lieu les identités suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} \varphi(\rho) + k_1 f(\rho) = (\rho - \beta_1)\,P_1^2, & \varphi(\rho) + k_3 f(\rho) = (\rho - \beta_3)\,P_3^2, \\ \varphi(\rho) + k_2 f(\rho) = (\rho - \beta_2)\,P_2^2, & \varphi(\rho) + k_4 f(\rho) = (\rho - \beta_4)\,P_4^2, \end{cases}$$

P_1, P_2, P_3, P_4 étant des carrés parfaits, et $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ désignant les paramètres des tangentes communes à (C) et à (K).

Si $\varphi(\rho)$ est de degré pair, il ne pourra y avoir que des lignes repliées de la première ou de la troisième catégorie. Celles qui auront deux de leurs sommets en des points communs à (C) et à (K) donneront naissance à deux identités de la forme

$$\varphi(\rho)+k_1 f(\rho)=P_1^2, \qquad \varphi(\rho)+k_2 f(\rho)=P_2^2.$$

Celles qui auront pour sommets extrêmes deux des points β conduiront à deux identités telles que les suivantes :

$$(26) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(\rho)+k_3 f(\rho)=(\rho-\beta_1)(\rho-\beta_2)P_3^2, \\ \varphi(\rho)+k_4 f(\rho)=(\rho-\beta_3)(\rho-\beta_4)P_4^2, \end{array}\right.$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ désignant toujours les paramètres des tangentes communes à (C) et à (K).

166. Les polynomes $\varphi(\rho)$ et $f(\rho)$, qui figurent dans l'équation (24) par laquelle on détermine les paramètres des côtés du polygone, mériteraient un examen approfondi. Leurs propriétés se rattachent aisément aux relations que l'on peut établir entre la théorie précédente et celle qui concerne la *transformation des fonctions elliptiques*. Ces rapports ont été signalés dans une étude de l'Auteur, *Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique*, parue en 1880 au Tome XC des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* mais ils n'ont pas un caractère assez élémentaire pour figurer dans cet Ouvrage. Je me bornerai donc à traiter le cas particulier où le polygone considéré a un nombre pair de côtés, $2n$.

Alors, la conique (C) pourra être représentée par une équation de la forme

$$(27) \qquad A_1 A_2 \ldots A_n = k B_1 B_2 \ldots B_n,$$

les équations $A_i=0$ représentant les côtés de rang impair et les équations $B_k=0$ les côtés de rang pair. On démontrerait directement, et il résulte des propositions précédentes, que la courbe représentée par l'équation (27) se décompose en coniques (et en une droite si n est impair). En conservant les notations du n° 150,

nous avons vu qu'on peut mettre son équation sous la forme

$$(28) \qquad \Phi(\rho)\Phi(\rho_1) = \Psi(\rho)\Psi(\rho_1),$$

où l'on a

$$\Phi(\rho) = m\varphi(\rho) + m'\psi(\rho), \qquad \Psi(\rho) = m\psi(\rho) + m'\varphi(\rho).$$

Il suit de là que l'on peut obtenir séparément les équations qui déterminent les paramètres des côtés de rang pair et celles qui déterminent les côtés de rang impair. Ce seront les suivantes :

$$\varphi(\rho) + \lambda\psi(\rho) = 0, \qquad \psi(\rho) + \lambda\varphi(\rho) = 0.$$

En multipliant, on aura l'équation qui déterminera les paramètres de *tous* les côtés

$$\varphi(\rho)\psi(\rho)(1+\lambda^2) + \lambda[\varphi^2(\rho) + \psi^2(\rho)] = 0.$$

Le premier membre deviendra un carré parfait lorsque λ deviendra égal à l'unité, soit positive, soit négative.

CHAPITRE III.

LE THÉORÈME GÉNÉRAL DE PONCELET.

Si un triangle mobile est circonscrit à une conique (K) et si deux de ses sommets décrivent des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à (K), il en est de même du troisième sommet.

Pour établir cette proposition fondamentale, on s'appuie sur un lemme démontré au n° 88. Si un triangle mobile demeure circonscrit à une conique fixe, il existe, à chaque instant, une conique tangente en chacun de ses sommets aux trajectoires de ces sommets. — Ce lemme, qui donne le moyen de construire la tangente à la courbe décrite par l'un des sommets quand on connaît les tangentes aux courbes décrites par les deux autres sommets, permet de déduire le théorème fondamental d'une propriété presque évidente des coniques homofocales. — Extension à un polygone d'un nombre quelconque de côtés du théorème démontré pour le triangle. — Emploi de l'Algèbre pour démontrer les théorèmes précédents par l'intégration d'une équation différentielle. — Comment, du théorème général, on peut revenir au cas particulier où le polygone est inscrit dans une conique. — Forme que Chasles a su donner aux théorèmes de Poncelet. — Polygones de périmètre maximum inscrits dans une ellipse, ou de périmètre minimum circonscrits à une ellipse. — Propositions diverses relatives à ces polygones.

---

167. Pour terminer l'étude précédente, nous démontrerons le théorème le plus général que Poncelet ait donné sur cette question des polygones inscrits et circonscrits.

Considérons un triangle mobile assujetti à demeurer circonscrit à la conique (K). D'après la proposition démontrée au n° 88, nous savons que, si l'on construit pour une de ses positions les tangentes aux courbes décrites par ses trois sommets, ces tangentes seront aussi celles d'une conique circonscrite au triangle, c'est-à-dire que les trois points où chaque côté du triangle est coupé par la tangente à la courbe décrite par le sommet opposé seront en ligne droite. Considérons des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à (K) et supposons que deux sommets du triangle décrivent des courbes admettant la même tangente qu'une des coniques du faisceau tangentiel passant par ce sommet. Nous allons montrer que le troisième sommet aura la même propriété.

Pour cela, il faut établir que, si l'on considère les coniques d'un

faisceau tangentiel et un triangle circonscrit à l'une d'elles, les tangentes aux six coniques du faisceau qui passent par les trois sommets peuvent être groupées trois à trois de telle manière que leurs points de concours avec les côtés opposés du triangle soient en ligne droite. C'est ce que l'on peut voir sans calcul de la manière suivante.

Transformons par l'homographie notre faisceau tangentiel en celui qui est formé des coniques homofocales. Il suffit, pour cela, de prendre deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit commun et de les transformer dans les points circulaires à l'infini. Si nous construisons le triangle circonscrit à l'une des coniques homofocales, nous savons que les tangentes aux six coniques homofocales qui passent par les trois sommets de ce triangle sont les bissectrices des angles du triangle; elles peuvent donc être groupées de quatre manières différentes pour former les tangentes à une conique circonscrite au triangle. Si celui-ci est réel, il suffit, par exemple, d'associer deux bissectrices intérieures et une extérieure, ou les trois bissectrices extérieures.

Revenant à la figure primitive, nous pouvons donc admettre que, si un triangle ABC est circonscrit à une conique fixe (K) du faisceau et si deux de ses sommets B et C décrivent des coniques (C′), (C″) du faisceau tangentiel, le troisième sommet A décrira une courbe qui, *pour chaque position du triangle*, sera tangente à l'une des deux coniques du faisceau qui passent par A. Il faudra donc, ou bien que cette trajectoire de A soit une troisième conique (C‴) du faisceau, ou bien qu'elle soit l'enveloppe d'une suite continue de coniques de ce faisceau. Or, cette dernière hypothèse est inadmissible, puisque nous connaissons cette enveloppe des coniques du faisceau, composée uniquement du quadrilatère circonscrit, commun à toutes les coniques du faisceau. Il faut donc que le sommet A décrive une conique (C‴) du faisceau. Ainsi,

Quand un triangle circonscrit à une conique (K) *se meut de manière que deux de ses sommets* B, C *décrivent des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à* (K), *le troisième sommet* A *décrit aussi une conique inscrite dans le même quadrilatère.*

Si l'on se donne la conique (K) et les deux coniques décrites par les sommets B et C, on verra aisément qu'il y a quatre coniques décrites par le sommet A.

168. Le lemme sur lequel repose la démonstration précédente a été établi par l'homographie. On peut aussi le démontrer directement.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 0, \\ au^2 + bv^2 + cw^2 = 0 \end{cases}$$

les équations tangentielles de deux coniques rapportées à leur triangle conjugué commun. Soient encore

$$(2) \qquad \begin{cases} ux + vy + wz = 0, \\ u'x + v'y + w'z = 0, \\ u''x + v''y + w''z = 0 \end{cases}$$

les équations de trois tangentes à la première des deux coniques. On aura

$$(3) \qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 0, \\ u'^2 + v'^2 + w'^2 = 0, \\ u''^2 + v''^2 + w''^2 = 0; \end{cases}$$

et l'équation du faisceau déterminé par les deux coniques sera

$$(a - k)u^2 + (b - k)v^2 + (c - k)w^2 = 0.$$

Le triangle formé par les trois droites (2) est circonscrit, par hypothèse, à la première des coniques du faisceau. Cherchons les tangentes à celles des coniques du faisceau qui passent par un de ses sommets, par exemple par celui que déterminent les deux premières équations (2).

Une droite passant par ce sommet a pour équation

$$ux + vy + wz - \lambda(u'x + v'y + w'z) = 0.$$

Pour qu'elle soit tangente à la conique de paramètre k, il faut donc que l'on ait

$$(a - k)(u - \lambda u')^2 + (b - k)(v - \lambda v')^2 + (c - k)(w - \lambda w')^2 = 0,$$

ce qui donne deux valeurs pour λ. Ces deux valeurs deviennent

égales pour les deux coniques du faisceau qui passent par le point considéré. On obtiendra donc les paramètres de ces deux coniques en exprimant que l'équation précédente en λ a une racine double. Si l'on tient compte des relations (3), cette équation peut s'écrire

$$au^2 + bv^2 + cw^2 - 2\lambda\,[(a-k)\,uu' + (b-k)\,vv' + (c-k)\,ww'] \\ + \lambda^2\,(au'^2 + bv'^2 + cw'^2) = 0.$$

L'équation

$$[(a-k)\,uu' + (b-k)\,vv' + (c-k)\,ww']^2 \\ = (au^2 + bv^2 + cw^2)\,(au'^2 + bv'^2 + cw'^2) = 0$$

déterminera donc les paramètres des deux coniques qui passent au sommet considéré et les valeurs correspondantes de λ seront fournies par l'équation

$$(4) \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{au^2 + bv^2 + cw^2}}{\sqrt{au'^2 + bv'^2 + cw'^2}}.$$

Il suit de là que les tangentes aux deux coniques du faisceau qui passent au sommet considéré auront pour équations

$$\frac{ux + vy + wz}{\sqrt{au^2 + bv^2 + cw^2}} = \pm\frac{u'x + v'y + w'z}{\sqrt{au'^2 + bv'^2 + cw'^2}}.$$

Les tangentes relatives aux deux autres sommets du triangle seront données de même par les équations

$$\frac{u'x + v'y + w'z}{\sqrt{au'^2 + bv'^2 + cw'^2}} = \pm\frac{u''x + v''y + w''z}{\sqrt{au''^2 + bv''^2 + cw''^2}},$$

$$\frac{u''x + v''y + w''z}{\sqrt{au''^2 + bv''^2 + cw''^2}} = \pm\frac{ux + vy + wz}{\sqrt{au^2 + bv^2 + cw^2}};$$

et l'on voit tout de suite que les six droites ainsi obtenues sont dans la même relation descriptive que les bissectrices des trois angles d'un triangle. Les coniques auxquelles elles sont tangentes ont pour équations

$$(5) \quad \frac{\sqrt{au^2 + bv^2 + cw^2}}{ux + vy + wz} \pm \frac{\sqrt{au'^2 + bv'^2 + cw'^2}}{u'x + v'y + w'z} \pm \frac{\sqrt{au''^2 + bv''^2 + cw''^2}}{u''x + v''y + w''z} = 0.$$

169. Le théorème que nous avons établi au n° **167** pour le triangle s'étend de lui-même à un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

Considérons, en effet, un polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ circonscrit à une conique (K) et dont le déplacement est défini par la condition que les $n-1$ sommets $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ décrivent des coniques $(C_1), (C_2), \ldots, (C_{n-1})$ appartenant, comme (K), à un même faisceau tangentiel. Si l'on considère le triangle formé par les côtés consécutifs A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, il est circonscrit à (K) et deux de ses sommets, A_2, A_3, décrivent les coniques $(C_2), (C_3)$ du faisceau. Donc, le sommet B_2 intersection des côtés A_1A_2 et A_3A_4 de ce triangle décrira, lui aussi, une conique (C'_2) du faisceau. Nous pourrons donc supprimer, dans le polygone considéré, le côté A_2A_3; nous lui substituerons un nouveau polygone de $n-1$ côtés $A_1B_2A_4 \ldots A_n$ dont le mouvement sera défini de la même manière que celui du polygone primitif; car tous ses sommets, moins un, décriront des coniques du faisceau. En continuant à supprimer des côtés, si cela est nécessaire, on finira par réduire le polygone à un triangle dont deux sommets décriront des coniques du faisceau tandis que ses côtés demeureront tangents à (K). Donc le troisième sommet A_n décrira, lui aussi, une conique du faisceau.

Il est clair que, si l'on se donne les coniques (K), (C_1), $(C_2), \ldots, (C_{n-1})$, il y a 2^{n-2} positions initiales distinctes du polygone et autant de trajectoires distinctes pour le sommet A_n.

170. La démonstration donnée au n° 167 repose sur un lemme d'analyse emprunté à la théorie des enveloppes. On peut éviter ce genre de considérations par l'emploi de la méthode suivante, qui exige d'ailleurs des calculs étendus :

Étant données deux coniques (f) et (φ), représentées en coordonnées tangentielles par les équations

$$f = a_0u^2 + a_2v^2 + a_4w^2 + 2a_3vw + 2a_2uw + 2a_1uv = 0, \tag{6}$$

$$\varphi = v^2 - 4uw = 0, \tag{7}$$

cherchons l'équation ponctuelle du faisceau tangentiel

$$f + m\varphi = 0,$$

déterminé par ces deux coniques. Cette équation se présentera

sous la forme d'un déterminant

$$(8)\qquad F = -\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ y & a_1 & a_2 + m & a_3 \\ z & a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose

$$(9)\qquad \begin{cases} H = (a_2 a_4 - a_3^2)x^2 + (a_0 a_4 - a_2^2)y^2 + (a_0 a_2 - a_1^2)z^2 \\ \qquad - 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)yz + 2(a_1 a_3 - a_2^2)xz - 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)xy, \\ K = a_4 x^2 + 4a_2 y^2 + a_0 z^2 - 4a_1 yz + 2a_2 xz - 4a_3 xy, \\ L = 4(xz - y^2), \end{cases}$$

on aura

$$(10)\qquad F = H + Km + Lm^2 = 0;$$

telle est l'équation ponctuelle des coniques du faisceau. Adoptons maintenant, en prenant pour base la conique (φ), le système de coordonnées dont nous avons fait usage dans les Chapitres précédents, et posons

$$(11)\qquad x = 1, \qquad -2y = \rho + \rho_1, \qquad z = \rho\rho_1;$$

en sorte que l'équation d'une tangente à la conique (φ) soit

$$(12)\qquad \rho^2 x + 2\rho y + z = 0.$$

Les fonctions H, K, L prendront la forme suivante :

$$(13)\qquad \begin{cases} H = a_2 a_4 - a_3^2 + \frac{1}{4}(a_0 a_4 - a_2^2)(\rho + \rho_1)^2 + (a_0 a_2 - a_1^2)\rho^2\rho_1^2 \\ \qquad + (a_0 a_3 - a_1 a_2)\rho\rho_1(\rho + \rho_1) + 2(a_1 a_3 - a_2^2)\rho\rho_1 \\ \qquad\qquad + (a_1 a_4 - a_2 a_3)(\rho + \rho_1), \\ K = a_0\rho^2\rho_1^2 + 2a_1\rho\rho_1(\rho+\rho_1) + 2a_2\rho\rho_1 + a_2(\rho+\rho_1)^2 + 2a_3(\rho+\rho_1) + a_4, \\ L = -(\rho - \rho_1)^2. \end{cases}$$

L'équation (10) de nos courbes du faisceau est du second degré en m; elle est aussi du second degré en ρ et en ρ_1. Si on la résolvait par rapport à l'une de ces variables, on aurait chaque fois un radical. Nous allons calculer successivement les trois radicaux.

Le premier est

$$\sqrt{K^2 - 4HL}.$$

Si l'on pose

$$f(\rho) = a_0\rho^4 + 4a_1\rho^3 + 6a_2\rho^2 + 4a_3\rho + a_4, \tag{14}$$

on trouvera

$$K^2 - 4HL = f(\rho)f(\rho_1). \tag{15}$$

Ordonnons maintenant l'équation (10) par rapport à ρ_1, nous trouverons une équation

$$P\rho_1^2 + Q\rho_1 + R = 0,$$

où P, Q, R seront déterminés par les équations

$$\begin{aligned} P = &- m^2 + (a_0\rho^2 + 2a_1\rho + a_2)m + (a_0a_2 - a_1^2)\rho^2 \\ &+ (a_0a_3 - a_1a_2)\rho + \frac{1}{4}(a_0a_4 - a_2^2), \\ Q = &\ 2\rho m^2 + 2(a_1\rho^2 + 2a_2\rho + a_3)m + (a_0a_3 - a_1a_2)\rho^2 \\ &+ \frac{a_0a_4 - a_2^2}{2}\rho + 2(a_1a_3 - a_2^2)\rho + a_1a_4 - a_2a_3, \\ R = &- \rho^2m^2 + (a_2\rho^2 + 2a_3\rho + a_4)m + \frac{1}{4}(a_0a_4 - a_2^2)\rho^2 \\ &+ (a_1a_4 - a_2a_3)\rho + a_2a_4 - a_3^2. \end{aligned}$$

On a ici [1]

$$Q^2 - 4PR = f(\rho)[4m^3 - im - j], \tag{16}$$

en posant, conformément aux notations du Livre Ier, Chapitre III,

$$\left\{ \begin{aligned} i &= a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \\ j &= a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 - a_2^3. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

En raison de la symétrie, si l'on écrivait l'équation (10) sous la forme

$$P_1\rho^2 + Q_1\rho + R_1 = 0, \tag{18}$$

---

[1] Le calcul de $Q^2 - 4PR$ est fastidieux. On peut le faire d'une manière très symétrique en opérant comme il suit :

Soit Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x' & y' & z' \\ 0 & 0 & x & y & z \\ x' & x & a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ y' & y & a_1 & a_2 + m & a_3 \\ z' & z & a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} les quatre éléments qui figurent dans les deux premières lignes et dans les deux premières colonnes et qui sont ici des

on aurait

$$(19)\qquad Q_1^2 - 4P_1R_1 = f(\rho_1)[4m^3 - im - j].$$

Nous poserons

$$(20)\qquad \Delta(m) = 4m^3 - im - j.$$

D'après cela, si nous différentions l'équation (10), en y considérant m, ρ, ρ_1 comme des variables, nous aurons

$$(21)\qquad (2Lm + K)\,dm + (2P\rho_1 + Q)\,d\rho_1 + (2P_1\rho + Q_1)\,d\rho = 0,$$

et, si l'on remarque que l'on a

$$(22)\qquad \begin{cases} 2Lm + K = \pm\sqrt{f(\rho)f(\rho_1)}, \\ 2P\rho_1 + Q = \pm\sqrt{f(\rho)\Delta(m)}, \\ 2P_1\rho + Q_1 = \pm\sqrt{f(\rho_1)\Delta(m)}, \end{cases}$$

---

zéros, la théorie des déterminants nous fournira l'identité bien connue

$$(a)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{11}}\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{22}} - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{12}}\right)^2 = \Delta\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha_{11}\partial\alpha_{22}}.$$

On a ici

$$\begin{aligned}\Delta = {} & a_0(yz' - zy')^2 + (a_2 + m)(zx' - xz')^2 + a_4(xy' - yx')^2 \\ & + 2a_1(yz' - zy')(zx' - xz') + (2a_2 - 4m)(xy' - yx')(yz' - zy') \\ & + 2a_3(xy' - yx')(yz' - zy'),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha_{11}\partial\alpha_{22}} = -4m^3 + im + j.$$

Dans les formules précédentes, attribuons à x, y, z; x', y', z' les valeurs suivantes :

$$x = 1, \qquad y = -\frac{\rho + \rho_1}{2}, \qquad z = \rho\rho_1,$$

$$x' = 1, \qquad y' = -\frac{\rho + \rho'_1}{2}, \qquad z' = \rho\rho'_1.$$

Nous aurons

$$\Delta = \frac{1}{4}f(\rho)(\rho_1 - \rho'_1)^2,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{11}} = -P\rho_1^2 - Q\rho_1 - R, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{22}} = -P\rho_1'^2 - Q\rho'_1 - R,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{12}} = -P\rho_1\rho'_1 - Q\frac{\rho_1 + \rho'_1}{2} - R,$$

et l'identité (a), après la suppression du facteur $(\rho_1 - \rho'_1)^2$ dans les deux membres, nous donnera précisément la formule (16) du texte, qu'il s'agissait de démontrer.

l'équation aux différentielles (21) nous donnera

$$\frac{dm}{\sqrt{\Delta(m)}} = \pm \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}}. \tag{23}$$

D'après cela, nous voyons que, si l'on se déplace sur une des deux coniques du faisceau qui passent par le point (ρ, ρ_1), on aura

$$\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = 0. \tag{24}$$

Réciproquement, si ρ et ρ_1 varient en satisfaisant à cette équation différentielle, on se déplacera sur une des courbes du faisceau. Car, m et m' étant les paramètres des deux courbes du faisceau qui passent au point (ρ, ρ_1), on aura évidemment

$$\left\{\begin{aligned} \pm \frac{dm}{\sqrt{\Delta(m)}} &= \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}}, \\ \pm \frac{dm'}{\sqrt{\Delta(m')}} &= \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Ainsi, *l'un des paramètres m, m' demeurera constant.*

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui nous donne, par des procédés élémentaires, l'intégration d'une équation différentielle :

Si ρ et ρ_1 varient de manière à satisfaire constamment à l'une ou à l'autre des équations différentielles

$$\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}}, \tag{26}$$

le point (ρ, ρ_1) décrit une des coniques du faisceau, et réciproquement.

171. Ce point étant établi, considérons un polygone de n côtés circonscrit à la conique de base du faisceau tangentiel, et dont tous les sommets, moins un, décrivent d'autres coniques du faisceau. Nous allons montrer que le sommet libre du polygone décrira aussi une des coniques du faisceau. En effet, soient $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$ les paramètres des différents côtés; et supposons que les $n - 1$ sommets (ρ_1, ρ_2), (ρ_2, ρ_3), $\ldots$, (ρ_{n-1}, ρ_n) décrivent des coniques

du faisceau. D'après le théorème précédent, on aura

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = \pm \frac{d\rho_2}{\sqrt{f(\rho_2)}}, \quad \ldots, \quad \frac{d\rho_{n-1}}{\sqrt{f(\rho_{n-1})}} = \pm \frac{d\rho_n}{\sqrt{f(\rho_n)}}.$$

Par l'élimination des intermédiaires $\rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$, on obtiendra la relation

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = \pm \frac{d\rho_n}{\sqrt{f(\rho_n)}}.$$

qui montre que le sommet libre (ρ_1, ρ_n) décrira, lui aussi, une conique du faisceau. Ainsi, nous retrouvons le théorème établi au n° 169 :

Quand un polygone se meut en demeurant circonscrit à une conique (K) *de telle manière que tous ses sommets, moins un, décrivent des coniques* $(K_1), \ldots, (K_{n-1})$, *toutes inscrites dans un quadrilatère circonscrit à* (K), *c'est-à-dire faisant partie avec* (K) *d'un faisceau tangentiel, le sommet laissé libre de ce polygone décrit aussi une conique du faisceau.*

En transformant par polaires réciproques, on obtient la proposition suivante :

Si un polygone se meut en demeurant inscrit dans une conique (C), *de telle manière que tous ses côtés, moins un, enveloppent des coniques* $(C_1), (C_2), \ldots, (C_{n-1})$ *coupant toutes la conique* (C) *aux mêmes points, c'est-à-dire faisant partie avec* (C) *d'un faisceau ponctuel, le côté laissé libre de ce polygone enveloppera aussi une conique du faisceau.*

172. Voici des exemples de ces deux théorèmes.

Si l'on considère des cônes du second degré ayant leur sommet au centre d'une sphère et tangents à quatre plans isotropes, ils constituent un faisceau tangentiel dont fait partie la sphère de rayon nul qui a son centre au centre de la sphère. Ces cônes coupent la sphère suivant des coniques tangentes à huit génératrices rectilignes de la sphère, c'est-à-dire des coniques homofocales. Ils sont d'ailleurs coupés par un plan quelconque suivant les coniques d'un faisceau tangentiel. En appliquant donc le premier théorème et le projetant en quelque sorte sur la sphère, on obtient la proposition suivante :

Quand un polygone sphérique dont les côtés sont des arcs de grand cercle se meut en demeurant circonscrit à une conique sphérique (K), *de telle manière que tous ses sommets, moins un, décrivent des coniques homofocales à la conique* (K), *le sommet laissé libre du polygone décrira aussi une conique homofocale à* (K).

Il est clair que ce théorème s'applique immédiatement à la Géométrie plane. On peut, de même, indiquer le cas particulier suivant du second théorème :

Si un polygone se meut, en demeurant inscrit dans un cercle (C), *de telle manière que tous ses côtés, moins un, demeurent tangents à des cercles* (C_1), (C_2), ..., (C_{n-1}) *admettant avec* (C) *le même axe radical, le côté laissé libre de ce polygone enveloppera aussi un cercle admettant avec* (C) *le même axe radical que les précédents.*

173. Avec ces théorèmes généraux, on a quelque difficulté à retrouver le cas particulier si intéressant qui nous a servi de point de départ.

Considérons, par exemple, un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$, circonscrit à une conique (K) et inscrit dans une autre conique (C), et cherchons à démontrer qu'il existera une infinité de tels polygones. Pour cela, nous rendrons mobile le polygone et nous le remplacerons par un autre $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$, toujours assujetti à demeurer circonscrit à (K) et dont les sommets A'_2, A'_3, ..., A'_n devront demeurer sur (C). Alors, d'après notre théorème général, le sommet A'_1 devra décrire une conique faisant partie du faisceau tangentiel déterminé par (C) et par (K).

Comme A_1 est la position initiale du point A'_1, cette conique décrite par A'_1 devra être l'une des deux coniques du faisceau qui passent par A_1. Elle pourra donc se confondre avec (C); mais il faut établir qu'elle ne peut être la seconde conique du faisceau qui passe par A_1. A la démonstration déjà donnée au n° 162, on peut joindre la suivante.

Soit

$$\varphi(\rho, \rho_1) = 0$$

l'équation doublement quadratique et symétrique de la courbe (C).

Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ désignent les paramètres des côtés $A'_1 A'_2$, $A'_2 A'_3$, ..., $A'_n A'_1$ du polygone mobile, on aura les relations

$$(26)\quad \varphi_1 = \varphi(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \varphi_2 = \varphi(\rho_2, \rho_3) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = \varphi(\rho_{n-1}, \rho_n) = 0$$

auxquelles il faut joindre, *pour la position initiale*, la suivante :

$$(27)\qquad \varphi_n = \varphi(\rho_n, \rho_1) = 0.$$

Remarquons de plus que, ρ_{i-1} et ρ_{i+1} étant les deux racines de l'équation

$$\varphi(\rho_i, x) = 0$$

que l'on peut écrire

$$P(\rho_i)x^2 + Q(\rho_i)x + R(\rho_i) = 0,$$

ρ_{i-1} et ρ_{i+1} donneront deux signes différents à la dérivée

$$(28)\qquad 2P(\rho_i)x + Q(\rho_i) = \pm\sqrt{Q^2(\rho_i) - 4P(\rho_i)R(\rho_i)}.$$

On aura donc nécessairement

$$(29)\qquad \frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial\rho_{i-1}} = -\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_{i+1}},$$

pour $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Et l'on devra joindre à ces équations les suivantes :

$$(30)\qquad \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\rho_{n-1}} = -\frac{\partial\varphi_n}{\partial\rho_1}, \qquad \frac{\partial\varphi_n}{\partial\rho_n} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2},$$

qui sont vérifiées seulement *pour la position initiale du polygone.*

D'après cela, différentions les équations (24) qui définissent le mouvement du polygone variable. Nous aurons

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}d\rho_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2}d\rho_2,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_2}d\rho_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_3}d\rho_3, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\rho_{n-1}}d\rho_{n-1} = -\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\rho_n}d\rho_n.$$

Si nous multiplions ces équations membre à membre, nous aurons, en tenant compte des équations (29),

$$\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\rho_{n-1}}d\rho_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2}d\rho_n.$$

Appliquons cette équation générale à la position initiale du

polygone; nous pourrons faire usage des deux équations (30), et il viendra

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \rho_n} d\rho_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$d\varphi_n = 0.$$

Ainsi, la trajectoire du sommet libre A'_1 du polygone devra être tangente en A_1 à la courbe (C); et, comme cette trajectoire doit être une des deux courbes, à tangentes distinctes, qui passent en A_1 et font partie du faisceau tangentiel, *elle se confondra avec la courbe* (C).

174. Nous terminerons cette étude élémentaire des théorèmes de Poncelet en faisant connaître la forme très élégante que *Chasles* a su leur donner (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 17, p. 838). Mais auparavant, nous démontrerons un lemme, qui est d'ailleurs intéressant en lui-même.

Désignons sous le nom de *réseau* l'ensemble des coniques qui sont définies par une équation de la forme

$$(31) \qquad \lambda S + \mu T + \nu U = 0,$$

où S, T, U sont trois polynomes déterminés et λ, μ, ν des paramètres arbitraires. Si les coordonnées employées sont ponctuelles, le réseau sera dit *ponctuel*. Il sera *tangentiel* si l'on emploie les coordonnées tangentielles.

Si l'on considère λ, μ, ν comme les coordonnées homogènes d'un point du plan, à tout point du plan correspondra une conique du réseau; à toute droite du plan correspondra un faisceau de coniques compris dans le réseau et qui sera déterminé par deux d'entre elles comme une droite est déterminée par deux points. Il suit de là que *deux faisceaux compris dans le réseau auront toujours en commun une conique du réseau;* cette conique correspondra au point d'intersection des deux droites qui définissent les deux faisceaux. La propriété que nous venons de rappeler, quoique très simple, est fondamentale dans l'étude des réseaux.

Considérons, par exemple, le réseau tangentiel défini de la manière suivante : il comprendra la conique formée des deux

points circulaires I et J, une conique composée de deux points distincts F, F′ et enfin une conique composée de deux points confondus en un point quelconque A. Parmi les faisceaux contenus dans ce réseau, nous pouvons signaler celui qui comprend les deux coniques (IJ) et (FF′), c'est-à-dire qui est *formé de toutes les coniques ayant* F, F′ *pour foyers* et aussi celui qui comprend les deux coniques (AA) et (IJ) et *qui est formé de tous les cercles de centre* A.

Soit (C) une quelconque des coniques homofocales. Si de A on lui mène des tangentes, dont les points de contact seront H, H′, toutes les coniques tangentes à (C) en ces deux points formeront un faisceau compris dans le réseau. En sorte que la conique *formée des deux points* H, H′ *fera partie du réseau.*

Il est facile de montrer que la construction précédente donne tous les couples de points (H, H′) qui font partie du réseau. Car, soit (H, H′) un tel couple. Toutes les coniques passant en H, H′ et tangentes en ces points à AH, AH′ formeront un faisceau qui fera partie du réseau et *comprendra*, par conséquent, *une des coniques homofocales.*

D'après cela, considérons le faisceau formé avec les deux coniques suivantes du réseau : une des coniques homofocales (C) et l'un quelconque des cercles qui ont pour centre le point A. Ce faisceau comprend, comme on sait, trois couples de points H, H′ qui sont les sommets opposés du quadrilatère circonscrit à (C) et au cercle. En se rappelant la propriété des points H, H′, on obtient donc ce beau théorème de *Graves* et de *Chasles* :

Étant donnés une conique quelconque (C) *et un cercle* (Γ) *de centre* A, *deux sommets opposés quelconques du quadrilatère circonscrit à* (C) *et à* (Γ) *sont sur une même conique homofocale à* (C), *et les tangentes à la conique en ces deux points vont concourir au centre du cercle, en* A.

Si le cercle (Γ) est tangent à la conique en un point B, cette tangente commune doit être comptée pour deux; il y a deux autres tangentes communes au cercle et à la conique qui se coupent en un point B′ et viennent couper en H, H′ la tangente commune. Les trois couples de points faisant partie du faisceau tangentiel sont le couple (BB′) et le couple (HH′), qui devra compter

pour deux. Donc, *il y aura une conique homofocale à* (C), *qui passera par les points* H, H′ *et y admettra les tangentes* AH, AH′. Telle est la proposition dont nous aurons à faire usage.

175. Cela posé, proposons-nous de trouver les polygones d'un nombre de côtés déterminé et de périmètre maximum inscrits dans une ellipse. Nous nous appuierons sur la remarque suivante.

Si A, B, C sont trois sommets consécutifs d'un polygone de périmètre maximum inscrit dans une courbe quelconque (K), il faut que le point B soit choisi sur l'arc de la courbe AC de telle manière que AB + BC soit un maximum et, pour cela, il faut que l'ellipse de foyers A, C, qui passe par B, comprenne dans son intérieur l'arc AC, c'est-à-dire qu'elle soit tangente en B à la courbe. Cette conclusion, qu'il serait aisé d'obtenir par d'autres voies, nous montre que le polygone cherché doit satisfaire à la condition suivante : *En chacun de ses sommets, la tangente à la courbe doit faire des angles égaux avec les deux côtés qui y aboutissent; elle doit être la bissectrice de l'angle formé par un de ces côtés et par le prolongement de l'autre.*

Appliquons cette condition à une ellipse (E). Si A_i est un des sommets du polygone cherché, les côtés A_iA_{i-1}, A_iA_{i+1} doivent faire des angles égaux avec la tangente en (A_i) à (E); et, par conséquent, ils doivent être tangents à une même conique (E′) homofocale à (E), conique qui, d'après la disposition de la figure, sera nécessairement une ellipse [1].

Comme il y a une seule conique homofocale tangente à une droite, on reconnaît immédiatement que l'ellipse (E′) tangente à

---

[1] Il faudrait ajouter : si le polygone est convexe, ou si, du moins, un de ses côtés ne passe pas entre les foyers de l'ellipse (E). Il peut exister, en effet, des polygones inscrits dans (E) et circonscrits à une hyperbole homofocale (H). Ces polygones, dont tous les côtés passent entre les foyers de l'ellipse et qui, par suite, ne peuvent être convexes, donnent lieu à des propriétés de maximum ou de minimum, analogues à celles que nous avons étudiées. Si nous les laissons de côté, nous devons du moins signaler un exemple dans lequel on les obtient.

Soit

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse (E). Considérons l'hyperbole homofocale (H) définie par

deux côtés consécutifs sera tangente aux deux côtés adjacents et, de proche en proche, à tous les autres. Ainsi, nous obtenons ce beau théorème de Chasles :

Les polygones de périmètre maximum et d'un nombre de côtés donné inscrits dans une ellipse (E) *devront être circonscrits à une ellipse* (E′), *homofocale à* (E).

D'après cela, si nous voulons inscrire le polygone de n côtés, on pourra procéder de la manière suivante.

Prenons l'ellipse (E′), suffisamment voisine de (E), et inscrivons dans (E) une ligne brisée $A_1 A_2 \ldots A_n A_{n+1}$ circonscrite à (E′). Elle ne se fermera pas tout d'abord. Mais, si l'ellipse (E′) diminue, le point A_{n+1} s'avancera sur (E), et il arrivera nécessairement un moment où il rejoindra A_1. Alors la ligne brisée se transformera en un polygone convexe satisfaisant à toutes les conditions géométriques que nous avons énoncées. Si l'ellipse (E′) continue à diminuer, le point A_{n+1}, avançant toujours sur (E), viendra coïncider une seconde fois avec A_1 de manière à donner un polygone qui ne se fermera qu'après deux tours, et ainsi de suite. On aura donc, comme dans le cercle, à envisager à la fois des polygones convexes et des polygones étoilés.

176. D'après les théorèmes de Poncelet, nous savons que, dès que l'on aura obtenu un de ces polygones, il y en aura une infinité. Comme ils satisfont tous à la condition du maximum, il est à prévoir qu'ils auront tous le même périmètre. C'est une propriété dont on

---

l'équation

$$\text{(H)} \qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{a'^2 - c^2} = 1.$$

Si a' a pour valeur

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2},$$

il existera une infinité de quadrilatères circonscrits à (H) et inscrits dans (E). L'un d'eux sera formé par les deux asymptotes de l'hyperbole et par ses tangentes aux sommets.

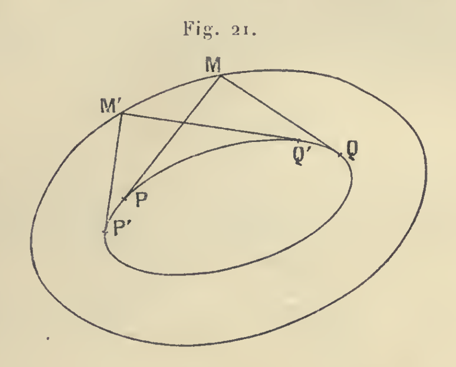
Cette solution exige, comme on le voit, que l'ellipse (E) soit telle que l'on ait

$$a < c\sqrt{2}, \qquad \text{ou} \qquad b < c.$$

peut rattacher la démonstration à une proposition élégante de Chasles.

Considérons deux ellipses homofocales (E), (E′), et supposons que, d'un point quelconque M de l'ellipse extérieure (E), on mène les deux tangentes MP, MQ à l'ellipse intérieure (E′). Nous allons démontrer que, *lorsque le point* M *se déplacera sur* (E), *la*

Fig. 21.



différence entre la somme des tangentes MP, MQ *et l'arc* PQ *de l'ellipse* (E′)

$$D = \overline{MP} + \overline{MQ} - \text{arc } PQ$$

demeurera constante.

Pour établir cette proposition, nous emploierons la formule connue

$$d\,AB = -AA' \cos \overline{A'AB} - BB' \cos \overline{B'BA},$$

relative à la différentielle d'un segment de droite AB qui, de sa position primitive AB, passe à la position infiniment voisine A′B′. Si nous l'appliquons successivement aux deux segments MP, MQ en supposant que le point M vienne dans la position voisine M′, nous aurons

$$d\,\overline{MP} = -\overline{MM'} \cos \overline{M'MP} + \overline{PP'},$$

$$d\,\overline{MQ} = -\overline{MM'} \cos \overline{M'MQ} - \overline{QQ'}.$$

Si l'on ajoute ces deux relations, en remarquant que, d'après la propriété de la tangente en M, les deux angles $\overline{M'MP}$ et $\overline{M'MQ}$ sont supplémentaires, il vient

$$d(\overline{MP} + \overline{MQ}) = \overline{PP'} - \overline{QQ'} = d \text{ arc } PQ.$$

La différence

$$D = \overline{MP} + \overline{MQ} - \text{arc } PQ$$

est donc constante, comme il fallait le démontrer.

Supposons maintenant que les ellipses (E), (E′) soient telles qu'il y ait un polygone et, par conséquent, une infinité de polygones inscrits dans (E) et circonscrits à (E′). En calculant la différence précédente pour les sommets de chacun de ces polygones et ajoutant toutes les équations ainsi obtenues, on sera conduit à l'égalité

$$nD = P - kp',$$

P étant le périmètre du polygone, k le nombre de tours qu'il fait avant de se fermer et p' le périmètre de l'ellipse (E′). P *sera donc le même pour tous les polygones considérés.*

177. Une autre propriété importante de ces polygones est la suivante :

S'ils sont de périmètre maximum parmi ceux qui sont inscrits dans (E), *ils sont de périmètre minimum parmi tous ceux qui sont circonscrits à* (E′).

Pour le démontrer, nous allons chercher la condition à laquelle doit satisfaire un polygone circonscrit à une courbe (Γ) pour avoir son périmètre minimum. A cet effet, nous maintiendrons invariables tous les côtés du polygone circonscrit, moins un, et nous chercherons la condition à laquelle doit satisfaire le côté variable pour former, avec tous les autres côtés laissés fixes, un polygone de périmètre minimum. Cette condition devra être remplie par tous les côtés du polygone cherché.

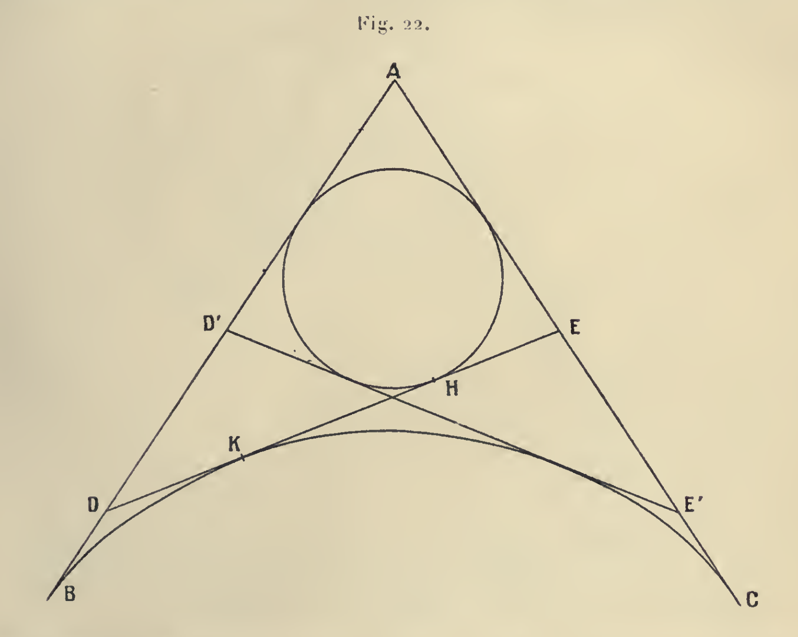
Or, soient (*fig.* 22) AB, AC les deux côtés du polygone circonscrit qui comprennent le côté variable. D'après les propriétés des maxima et des minima, il y aura deux tangentes à (Γ), DE et D′E′ infiniment voisines de la position de la tangente qui donne le minimum cherché et pour lesquelles les portions variables du périmètre BDEC, BD′E′C seront *rigoureusement* égales. Donc, d'après une proposition bien connue de géométrie élémentaire, le cercle inscrit au triangle ADE le sera aussi au triangle AD′E′. En supposant que les deux côtés DE, D′E′ se rapprochent indéfi-

niment de celui qui convient au minimum, on est conduit à la conclusion suivante :

Chaque côté du polygone circonscrit touche la courbe (Γ) *au même point où il est touché par le cercle inscrit au triangle formé par ce côté et les côtés adjacents.*

On arriverait à la même conclusion si, considérant dans la figure précédente DE comme le còté du polygone cherché, on admettait

Fig. 22.

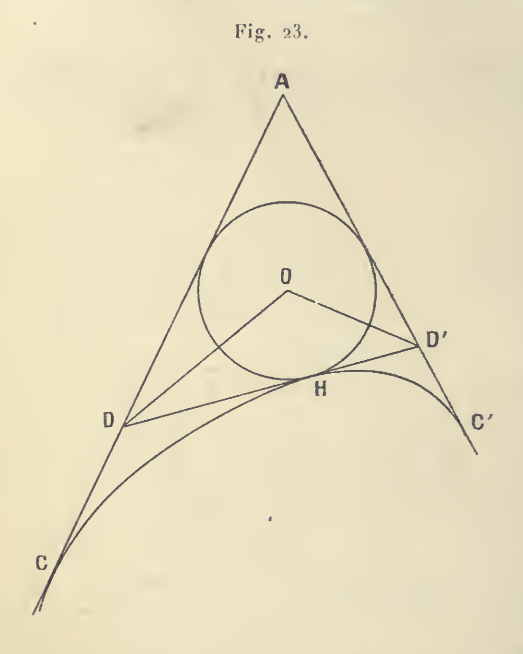


qu'il est touché par le cercle inscrit au triangle ADE en un point H différent de celui, K, où il touche la courbe (Γ). Car alors, on pourrait mener à (Γ) une infinité de tangentes qui ne rencontreraient pas le cercle inscrit, et toutes ces tangentes donneraient des polygones de périmètres inférieurs à celui du polygone proposé.

Appliquons à l'ellipse (E′) la condition générale que nous venons de trouver. Puisque (*fig.* 23), CD, DD′, D′C′ étant trois côtés consécutifs, le cercle inscrit au triangle ADD′ touche DD′ au même point H que l'ellipse (E′), il existe, d'après le lemme établi au n° 174, une conique (E) homofocale à (E′), passant par les points D, D′ et y admettant pour tangentes les bissectrices exté-

rieures des angles du polygone circonscrit. Cette conique (E) est évidemment une ellipse, qui est entièrement définie par la condition de passer par un des sommets. Comme elle passe aussi par les sommets adjacents, on reconnaîtra aisément, en raisonnant de

Fig. 23.



proche en proche, qu'elle devra passer par tous les autres sommets du polygone. Ainsi, ce polygone sera, lui aussi, inscrit dans une ellipse et circonscrit à une ellipse homofocale.

178. Les raisonnements précédents s'appliquent presque sans aucune modification aux coniques sphériques homofocales. Nous laisserons au lecteur le soin de le démontrer, nous bornant à faire remarquer que la considération des figures supplémentaires permet alors de déterminer les polygones d'aire maximum inscrits dans une conique. Ils sont circonscrits à une conique homocyclique et sont d'aire minimum par rapport à tous les polygones circonscrits à la même conique.

L'application des lemmes précédents permet aussi de construire la ligne brisée de périmètre maximum inscrite dans un segment

d'ellipse. Les côtés de cette ligne devront être tangents à une ellipse homofocale.

De même, le polygone de périmètre minimum circonscrit à un segment d'ellipse aura tous ses sommets sur une ellipse homofocale.

Dans le plan, la question des polygones d'aire maximum ou minimum inscrits ou circonscrits à une ellipse ne présente aucune difficulté. Il suffit de projeter l'ellipse de telle manière qu'elle devienne un cercle, et l'on est ramené à une question bien connue de géométrie élémentaire.



LIVRE IV.

LA GÉOMÉTRIE CAYLEYENNE.

CHAPITRE I.

ORIGINES DE LA GÉOMÉTRIE CAYLEYENNE.

Différence essentielle entre la Géométrie plane et la Géométrie sphérique; dans celle-ci, les notions d'angle et de distance sont en étroite corrélation; il n'en est plus de même pour celle-là. Ce que devient la Géométrie sphérique quand on projette la sphère sur un plan en plaçant le point de vue au centre. — On est ainsi conduit à une Géométrie plane dans laquelle toute mesure dérive du rapport anharmonique. — Géométrie sur une droite. — Géométrie dans le plan et dans l'espace. — Toutes les définitions métriques se rattachent, dans l'espace, à une quadrique fixe qu'on appelle l'*absolu*. — Distance de deux points. — Angle de deux plans ou de deux droites. — On n'étudiera dans la suite que les cas où l'*absolu* est une surface imaginaire ou bien une surface réelle convexe. — La Géométrie Cayleyenne comprend comme cas limite la Géométrie Euclidienne; il suffit de supposer que l'*absolu* se réduit au cercle imaginaire de l'infini. — Discussion de la formule qui donne la distance de deux points. — Propositions relatives à deux droites qui ne se coupent pas; elles ont, en général, deux perpendiculaires communes; propriétés de maximum et de minimum relatives à ces perpendiculaires communes. — Distance d'un point à une droite. — Formules relatives aux courbes et aux surfaces.

179. Dans les Chapitres précédents, où nous avons étudié des questions de Géométrie sphérique et de Géométrie plane, nous avons pu constater des différences essentielles entre les deux Géométries. Tandis que, dans la première, les notions d'angle et de distance sont en corrélation étroite et peuvent être rattachées de la même manière à celle du rapport anharmonique, il semble que, dans la Géométrie plane, ces mêmes notions d'angle et de distance soient nettement séparées et ne puissent être ramenées à une commune origine. Notre but est d'étudier maintenant une

Géométrie due au grand géomètre anglais *Cayley*, et dans laquelle toutes les notions métriques sont obtenues par un procédé uniforme. Voici comment on y est conduit.

Imaginons que, du centre O d'une sphère, on projette ses différents points sur un plan (P). Les grands cercles de la sphère se projetteront suivant les lignes droites du plan (P); le cône isotrope qui a le point O pour sommet et pour base le cercle de l'infini coupera le plan (P) suivant un cercle imaginaire (C). L'arc de cercle qui réunit deux points M, M' de la sphère est, nous l'avons vu, égal à

$$\text{arc}\,MM' = \frac{1}{2i}\log\mathcal{R}(OM', OM, OI, OJ),$$

I et J étant les points où le grand cercle MM' vient couper le cercle de l'infini. Les deux points M, M' se projettent suivant deux points m, m' du plan (P) et les deux points I et J se projettent suivant les points i, j où la droite mm' rencontre le cercle imaginaire (C). On aura donc

$$\text{arc}\,MM' = \frac{1}{2i}\log\mathcal{R}(m', m, i, j).$$

De même, sur la sphère, l'angle V de deux arcs de courbe qui se croisent en M et y admettent les tangentes Mt, Mt' est égal à

$$V = \frac{1}{2i}\log\mathcal{R}(Mt', Mt, \alpha, \beta),$$

α et β étant les génératrices rectilignes du premier et du second système qui se croisent en M. En projection, le point M vient en m, les génératrices α et β se projettent suivant les tangentes α', β' menées de m au cercle (C), les tangentes Mt', Mt suivant les tangentes mt'_1, mt_1 aux courbes planes qui sont les projections des courbes sphériques; et l'on a

$$V = \frac{1}{2i}\log\mathcal{R}(mt'_1, mt_1, \alpha', \beta').$$

On voit donc que, si l'on constitue une géométrie des relations métriques dans le plan en introduisant un cercle imaginaire (C) que l'on appellera l'*absolu*, en prenant, pour la distance de deux points, le quotient par $2i$ du rapport anharmonique formé par les

deux points et ceux où la droite qui les joint va rencontrer le cercle (C) et, pour l'angle de deux courbes, le quotient par $2i$ du rapport anharmonique des tangentes à ces deux courbes en leur point commun et des deux tangentes que l'on peut mener de ce point au cercle (C), on aura, *dans le plan*, une Géométrie qui sera l'équivalent de la Géométrie sphérique et, surtout, qui pourra comprendre comme cas limite notre Géométrie plane ordinaire, puisqu'on sait que la Géométrie de la sphère se réduit à celle du plan, quand le rayon de la sphère grandit indéfiniment.

Ces définitions nouvelles, qui reposent uniquement sur l'emploi du rapport anharmonique, subsistent, par cela même, quand on effectue une transformation homographique quelconque, en sorte que l'on peut substituer au cercle (C) une conique quelconque.

180. Les remarques précédentes, sur lesquelles nous aurons à revenir, feront comprendre comment Cayley a été conduit à sa nouvelle Géométrie. Commençons par examiner le cas le plus simple.

Soient, sur une droite quelconque, deux points fixes A et B et des points variables M, M′, ... qui correspondent respectivement aux diverses valeurs d'un paramètre variable m. Le rapport anharmonique des quatre points M, M′, A, B aura pour expression, comme on sait,

$$\mathcal{R}(\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{m-a}{m-b} : \frac{m'-a}{m'-b},$$

m, m', a et b étant les valeurs du paramètre qui correspondent respectivement aux points M, M′, A et B.

Si l'on pose

$$\frac{m-a}{m-b} = \varphi(m), \tag{1}$$

le rapport précédent peut s'écrire

$$\mathcal{R}(\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{\varphi(m)}{\varphi(m')},$$

et de là résulte l'identité

$$\mathcal{R}(\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{A}, \mathrm{B})\,\mathcal{R}(\mathrm{M}', \mathrm{M}'', \mathrm{A}, \mathrm{B})\,\mathcal{R}(\mathrm{M}'', \mathrm{M}, \mathrm{A}, \mathrm{B}) = 1. \tag{2}$$

Si, au lieu de prendre le rapport anharmonique, on pose

$$(3)\qquad \delta(MM') = \frac{1}{C}\,\mathrm{Log}\,\mathcal{R}\,(M', M, A, B),$$

C désignant une constante quelconque, l'identité précédente deviendra

$$(4)\qquad \delta(MM') + \delta(M'M'') + \delta(M''M) = 0.$$

On reconnaît la relation caractéristique entre les abscisses de trois points en ligne droite. Il est donc naturel d'appeler *distance* de M et de M' la fonction δ déterminée par l'équation (3).

Cette distance sera donc définie par cette formule, dès que l'on aura fixé les points qui servent de *base* ou d'*absolu*, A et B.

D'après les propriétés du logarithme, elle n'est déterminée qu'à un multiple près de $\frac{2\pi i}{C}$. Elle change de signe, sans changer de valeur, quand on échange M et M', ou encore A et B.

Si les deux points A et B sont réels, il peut se présenter deux cas : ou bien les deux segments AB et MM' empiètent l'un sur l'autre, auquel cas le rapport anharmonique est négatif, et, quelle que soit la valeur donnée à la constante C, $\delta(MM')$ est imaginaire ; ou bien les deux segments MM', AB n'empiètent pas l'un sur l'autre, et alors la constante C peut prendre une valeur réelle quelconque. Il n'y a donc de géométrie intéressante dans ce cas que si l'on considère uniquement des points entre A et B, ou uniquement des points hors du segment AB.

Supposons maintenant que les deux points A et B soient imaginaires conjugués, M, M' étant réels. Si l'on change i en $-i$, le point A est remplacé par le point B et, réciproquement, B est remplacé par A. Le rapport anharmonique est remplacé par son inverse. Cela ne peut avoir lieu que si son module est égal à 1. Le logarithme sera alors une quantité purement imaginaire et, pour que $\delta(MM')$ soit réelle, il sera nécessaire et suffisant que C soit une imaginaire pure de la forme Ki. On prendra $C = \frac{2i}{R}$, pour donner à $\delta(M, M')$ la période πR, et l'on aura alors

$$(5)\qquad e^{\frac{2i}{R}\delta(M,M')} = \mathcal{R}(M', M, A, B).$$

Les définitions précédentes s'appliquent immédiatement aux plans qui passent par une droite fixe et aux droites d'un plan qui passent par un point fixe. Dans le premier cas, l'*absolu* sera donné par deux plans fixes contenant la droite et, dans le second, par deux droites fixes contenant le point. On aura, dans l'un et l'autre cas,

$$\text{angle}(\mu\mu') = \frac{1}{C}\log \mathcal{R}(\mu', \mu, \alpha, \beta), \tag{6}$$

α, β étant les paramètres fixes qui déterminent la base, et μ, μ' ceux qui déterminent les plans ou les droites.

181. Toutes ces définitions étant admises, on peut en faire dériver un système entier de Géométrie métrique en introduisant une conique dans le plan, une quadrique dans l'espace. Nous nous bornerons à l'espace, qui comprend le plan comme cas particulier.

Étant donnée une quadrique quelconque que nous appellerons l'*absolu*, nous prendrons, pour mesurer la distance de deux points quelconques M, M′, la *base* formée par les deux points A et B où la droite MM′ rencontre l'*absolu*. Nous aurons donc

$$MM' = \frac{1}{C}\operatorname{Log}\mathcal{R}(M', M, A, B). \tag{a}$$

Pour déterminer l'angle de deux plans μ, μ', nous prendrons la base formée par les deux plans α, β qui passent par leur intersection et sont tangents à l'*absolu*. Nous aurons donc

$$\widehat{\mu\mu'} = \frac{1}{C'}\operatorname{Log}\mathcal{R}(\mu', \mu, \alpha, \beta). \tag{b}$$

Enfin, pour déterminer l'angle de deux droites *qui se coupent*, *d*, *d′*, nous prendrons la base formée par les deux tangentes à l'*absolu* *a*, *b*, qui sont dans le plan de ces droites et passent par leur intersection. Nous aurons donc

$$\widehat{dd'} = \frac{1}{C''}\operatorname{Log}\mathcal{R}(d', d, a, b). \tag{c}$$

Nous prendrons toujours $C' = C''$, et nous verrons comment on peut disposer de C et de C′. Mais, dès à présent, nous remarquerons que ces définitions sont, en quelque manière, indépendantes

de toute transformation homographique, ou de toute transformation par polaires réciproques.

Cela est tout à fait évident pour la transformation homographique, qui conserve les rapports anharmoniques. En particulier, et cette remarque est importante pour la suite, *toute transformation homographique qui conservera l'absolu ne changera rien aux définitions précédentes*. Voyons ce qui arrivera quand on transformera par polaires réciproques.

Dans ce cas, les points M, M' seront remplacés par des plans μ, μ'; les points A et B de l'absolu seront remplacés par les deux plans tangents au nouvel *absolu* qui passent par l'intersection des plans μ, μ'. La formule qui donne les distances sera remplacée par celle qui donne les angles, et *réciproquement*. Il n'y aura qu'une modification à faire : échanger les constantes C et C'.

Quant à la formule qui donne l'angle des deux droites, il n'y aura rien à y changer; les deux droites d, d' seront remplacées par leurs polaires réciproques, et les deux droites a, b par deux autres droites de même construction. La constante C' devra être conservée.

182. Ces remarques préliminaires et essentielles étant faites, voyons comment on évaluera les éléments que nous venons de définir. Soit

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{7}$$

l'équation ponctuelle homogène de l'*absolu*. Si x, y, z, t; x', y', z', t' sont les coordonnées homogènes de deux points M, M', nous avons vu comment on obtient les points d'intersection de la droite MM' et de la quadrique;

$$x + \lambda x', \qquad y + \lambda y', \qquad z + \lambda z', \qquad t + \lambda t'$$

étant les coordonnées d'un point quelconque de la droite MM', les valeurs de λ correspondantes aux points cherchés seront déterminées par l'équation

$$\begin{aligned} (8)\quad & f(x', y', z', t')\lambda^2 \\ & + [x' f'_x(x, y, z, t) + y' f'_y + z' f'_z + t' f'_t]\lambda + f(x, y, z, t) = 0. \end{aligned}$$

Nous rencontrerons souvent dans la suite la combinaison

$$\frac{1}{2}x' f'_x(x, y, z, t) + \frac{1}{2}y' f'_y + \frac{1}{2}z' f'_z + \frac{1}{2}t' f'_t,$$

qui est symétrique par rapport aux deux systèmes de variables x, y, z, t et x', y', z', t'. Nous la désignerons, pour abréger, par $f(x, x')$, ou par (M, M') quand nous voudrons mettre en évidence les points, et non leurs coordonnées. Elle donne lieu aux identités

$$(9)\quad \begin{cases} f(x, x) = f(x, y, z, t), \\ f(x + hx', x'' + kx''') = f(x, x'') + hf(x', x'') + kf(x, x''') + hkf(x', x'''). \end{cases}$$

D'après l'équation (8), le rapport anharmonique $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ des deux points M, M′ et de ceux où la droite MM′ rencontre la quadrique sera déterminé par la formule

$$(10)\quad \frac{(\lambda + \lambda')^2}{4\lambda\lambda'} = \frac{(1 + \mathcal{R})^2}{4\mathcal{R}} = \frac{f^2(x, x')}{f(x, x) f(x', x')} = \frac{(MM')^2}{(MM)(M'M')}.$$

On voit qu'il a deux valeurs inverses l'une de l'autre, ce qui était évident *a priori* puisqu'on peut échanger les deux points où la droite MM′ coupe l'*absolu*.

Si l'on écrit la constante C de l'équation (3) sous la forme $\frac{2i}{K}$, on aura

$$(11)\quad \frac{2i}{K}\overline{MM'} = \log \mathcal{R},$$

et la formule précédente nous donnera

$$(12)\quad \begin{cases} \cos^2 \dfrac{\overline{MM'}}{K} = \dfrac{f^2(x, x')}{f(x, x) f(x', x')} = \dfrac{(MM')^2}{(MM)(M'M')}, \\[2ex] \sin^2 \dfrac{\overline{MM'}}{K} = \dfrac{f(x, x) f(x', x') - f^2(x, x')}{f(x, x) f(x', x')} = \dfrac{(MM)(M'M') - (MM')^2}{(MM)(M'M')}. \end{cases}$$

La seconde de ces formules a une application intéressante. Si l'on y suppose les deux points M, M′ infiniment voisins et si l'on y remplace x', y', z', t' par $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $t + dt$, elle nous donnera l'*élément linéaire de l'espace* dans la nouvelle Géométrie, sous la forme

$$(13)\quad \frac{ds^2}{K^2} = \frac{f(x, x) f(dx, dx) - f^2(x, dx)}{f^2(x, x)}.$$

S'il s'agit maintenant de deux plans μ, μ', on devra, nous l'avons dit, déterminer leur angle en prenant la *base* formée par les deux plans tangents à l'*absolu* qui passent par leur intersection.

Soit

$$\varphi(u, v, w, p) = 0 \tag{14}$$

l'équation tangentielle de l'*absolu;* étendons les notations précédentes, en convenant de poser

$$\varphi(u, u') = \frac{1}{2}u'\varphi'_u(u, v, w, p) + \frac{1}{2}v'\varphi'_v + \frac{1}{2}w'\varphi'_w + \frac{1}{2}p'\varphi'_p = (\mu, \mu'). \tag{15}$$

On aura la formule

$$\frac{(1+\mathcal{R}')^2}{4\mathcal{R}'} = \frac{\varphi^2(u, u')}{\varphi(u, u)\varphi(u', u')}, \tag{16}$$

où $\mathcal{R}'$ désigne le rapport anharmonique des deux plans μ, μ' et des deux plans tangents à l'*absolu* menés par leur intersection. Ici, *nous prendrons toujours la constante* C′ *égale à* $2i$ et nous poserons

$$e^{2i\widehat{\mu\mu'}} = \mathcal{R}', \tag{17}$$

ce qui donnera

$$\cos^2\widehat{\mu\mu'} = \frac{\varphi^2(u, u')}{\varphi(u, u)\varphi(u', u')} = \frac{(\mu\mu')^2}{(\mu\mu)(\mu'\mu')}. \tag{18}$$

183. La même méthode peut être appliquée enfin à deux droites concourantes. Il suffira de prendre pour *base* les deux tangentes menées de leur point de concours, et dans leur plan, à l'*absolu*. Le calcul peut se faire comme il suit.

Soit A le point de concours de deux droites d, d', et soient B, C deux points pris arbitrairement sur les droites. Le rapport anharmonique $\mathcal{R}'$ des deux droites et des tangentes menées par A à l'*absolu* dans leur plan est évidemment égal au rapport anharmonique des deux points B, C et des deux points où la droite BC coupe le cône de sommet A circonscrit à l'*absolu*. Pour calculer ce rapport, il suffira donc d'appliquer la formule (10) en substituant à l'*absolu* ce cône circonscrit.

En adoptant les notations précédentes, l'équation de ce cône est

$$(AA)(MM) - (AM)^2 = 0.$$

L'application de la formule (10) nous donnera donc

$$(19)\quad \frac{(1+\mathfrak{R}'')^2}{4\mathfrak{R}''} = \cos^2\widehat{dd'} = \frac{[(AA)(BC)-(AB)(AC)]^2}{[(AA)(BB)-(AB)^2][(AA)(CC)-(AC)^2]}.$$

184. Ainsi, nous avons défini la distance de deux points, l'angle de deux plans, l'angle de deux droites concourantes. Nous avons laissé arbitraire la constante C qui figure dans le premier de ces trois éléments. En vue des applications, nous avons donné à cette constante la valeur $2i$ quand il s'est agi de la définition des angles. Examinons maintenant ce que nous donnent ces définitions quand on choisit différentes formes de l'*absolu*.

Si cette quadrique est imaginaire, les éléments qui fournissent les bases dans les trois déterminations métriques seront toujours imaginaires conjugués. Donc, d'après la remarque faite au nº 180, les trois rapports anharmoniques qui ont été désignés par $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ seront des imaginaires de module égal à l'unité. D'après la formule (17), à laquelle on peut joindre la suivante :

$$(20)\quad e^{2i\widehat{dd'}} = \mathfrak{R}'',$$

les angles de deux plans réels ou de deux droites concourantes réelles seront toujours réels. Quant à la distance de deux points réels, *il suffira, pour qu'elle soit toujours réelle, qu'il en soit de même de la constante* K, *que nous remplacerons par* R.

Remarquons que ces définitions laissent subsister une certaine ambiguïté. Les trois éléments ne sont déterminés qu'au signe près et à un multiple près de π ou de πR, suivant qu'il s'agit des angles et des distances. Il n'y a rien là qui doive nous étonner. Une indétermination analogue se présente pour les angles dans la Géométrie ordinaire; elle se présente même pour les distances en Géométrie sphérique.

Si l'*absolu* est une quadrique réelle, il y a lieu de distinguer.

Supposons d'abord que ce soit une surface réglée. Alors, dans quelque région que l'on soit placé, les droites qui passent en un point M se diviseront en deux catégories. Les unes, à l'extérieur du cône circonscrit de sommet M, ne rencontreront pas la surface; les autres la couperont.

Pour les premières, le rapport anharmonique $\mathfrak{R}$ formé avec M et

un point voisin de la droite sera une imaginaire de module 1; pour les autres, ce même rapport sera réel et positif. Donc, quelle que soit la valeur donnée à la constante K dans la formule (11), il y aura des points réels voisins de M pour lesquels la distance pourra être réelle; il y en aura certainement d'autres pour lesquels elle sera imaginaire. Des conclusions analogues pourraient être établies pour les angles. Ce cas peut être intéressant à étudier; *mais il ne correspond à aucune réalité pratique et nous l'écarterons dans notre étude.*

Des difficultés analogues se présenteront si l'*absolu* est une surface réelle convexe et *si l'on est à l'extérieur de cette surface*. Alors, par chaque point M, il passera des droites qui couperont la surface, d'autres qui ne la couperont pas. Nous écarterons ce cas comme le précédent et pour les mêmes raisons.

Mais *si l'on est à l'intérieur de la surface*, toute droite de cette région coupe l'*absolu* en deux points; le rapport $\mathcal{R}$ (M, M', A, B) est toujours positif. D'après la formule (11), il suffira, pour que la distance soit réelle, *que* K *soit une imaginaire pure de la forme* R*i*. Alors, la distance de deux points n'aura que deux valeurs réelles, égales et de signes contraires. Pour les angles, les formules (17) et (20) donneront lieu à quelque difficulté, les plans tangents et les tangentes qui servent de base dans les mesures n'étant pas toujours imaginaires conjugués.

Si la droite d'intersection de deux plans réels est sécante de l'*absolu*, nos formules donneront pour l'angle de ces plans une valeur réelle. Si nous appelons *espace accessible* celui qui est à l'intérieur de l'*absolu* et *espace inaccessible* celui qui est à l'extérieur, ce premier cas est celui où les deux plans ont des points communs dans l'espace accessible.

Si, au contraire, tous les points communs aux deux plans sont dans l'espace inaccessible, il n'y aura plus lieu de parler de leur angle, il sera devenu imaginaire.

De même, deux droites qui se coupent ne forment un angle réel que si leur point commun est dans l'espace accessible.

185. En résumé, nous n'étudierons que deux hypothèses : l'une dans laquelle l'*absolu* est une surface imaginaire et qui embrasse tous les points réels; elle a été introduite dans la Science par

B. Riemann; l'autre, dans laquelle l'*absolu* est une surface convexe telle que la sphère, mais où l'on n'envisage que la portion de l'espace comprise à l'intérieur de la surface. Cette dernière Géométrie est au fond, comme l'a montré M. F. Klein [1], celle à laquelle ont été conduits, par leurs études sur les principes, *Lobatschewsky*, *Bolyai*, *Gauss*, etc. C'est la *Géométrie dite non Euclidienne.*

Nous allons tout d'abord établir ce résultat essentiel, que l'une et l'autre comprennent comme cas-limite la Géométrie ordinaire. Il suffit de supposer que l'*absolu* s'aplatit indéfiniment et se réduit au cercle de l'infini.

Prenons, en effet, pour *absolu* la sphère représentée en coordonnées rectangulaires homogènes par l'équation

$$x^2+y^2+z^2+R^2t^2=0. \tag{21}$$

Si l'on envisage deux points $M(x, y, z, t)$, $M'(x', y', z', t')$ et si l'on prend pour K la valeur R, la formule (12) nous donnera, pour leur distance, la valeur suivante :

$$\cos\frac{MM'}{R}=\frac{xx'+yy'+zz'+R^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2+R^2)(x'^2+y'^2+z'^2+R^2)}}.$$

Quand la sphère se réduit au cercle de l'infini, R devient infini. Développons donc les deux membres de l'équation précédente suivant les puissances de $\frac{1}{R}$; nous aurons

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2R^2}(MM')^2+\frac{1}{R^4}\cdots\\ =1-\frac{1}{2R^2}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]+\frac{1}{R^4}\cdots\end{aligned}$$

En comparant les développements des deux membres, on obtient

$$\overline{MM'}^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \tag{22}$$

pour la valeur limite de MM'. *C'est l'expression bien connue de la distance de deux points en coordonnées rectangulaires.*

---

[1] On pourra lire une traduction du Mémoire de M. Klein *Sur la Géométrie dite non Euclidienne* dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (1re série, t. II, 1871, p. 341).

Voyons maintenant ce que deviennent les angles. Nous nous bornerons à l'angle de deux plans. L'équation tangentielle de la sphère étant

$$u^2 + v^2 + w^2 + \frac{p^2}{R^2} = 0, \tag{23}$$

l'angle V de deux plans sera défini par la formule

$$\cos V = \frac{uu' + vv' + ww' + \frac{pp'}{R^2}}{\sqrt{\left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{p^2}{R^2}\right)\left(u'^2 + v'^2 + w'^2 + \frac{p'^2}{R^2}\right)}},$$

qui se réduit, lorsqu'on y suppose R *infini, à l'expression bien connue en Géométrie Euclidienne.*

La démonstration s'applique aux deux Géométries que nous avons réservées ; l'une, la Géométrie de Riemann, s'obtient en supposant R réel ; l'autre, la Géométrie non Euclidienne, correspond à l'hypothèse dans laquelle on prend pour R une imaginaire pure.

186. Les définitions précédentes ne sont pas les seules qu'on pourrait adopter, même en restant fidèle au point de départ, qui exige le choix de deux éléments servant de base pour toute mesure métrique. Par exemple, sur chaque droite d, on pourrait choisir comme *base* les deux points divisant harmoniquement deux quadriques fixes, ou bien les deux points formant une proportion équianharmonique avec les trois points d'intersection de la droite et d'une surface cubique fixe. On pourrait aussi diminuer l'ambiguïté qui se présente dans les formules en supposant que la quadrique se réduise au système formé par deux plans et par deux points pris sur leur intersection. *Sophus Lie* a démontré que la définition adoptée est la seule qui conduise à une Géométrie admettant tous les déplacements que l'expérience nous permet de constater autour de nous.

187. Avant d'étudier ces déplacements, nous discuterons rapidement les formules qui nous ont servi de définition.

Reprenons d'abord la formule (12)

$$\cos \frac{\overline{MM'}}{K} = \pm \frac{(MM')}{\sqrt{(MM)(M'M')}}. \tag{24}$$

Elle nous montre immédiatement, comme nous l'avons déjà remarqué, que $\overline{MM'}$ est une fonction multiforme et que toutes ses valeurs s'expriment, en fonction de l'une d'elles δ_0, par la formule

$$\overline{MM'} = \pm \delta_0 + n\pi K, \tag{25}$$

n étant un entier, positif ou négatif.

La distance ne deviendra indéterminée que si l'un des points est sur l'*absolu* et si l'autre se trouve dans le plan tangent à l'*absolu* en ce premier point. On le verrait encore en considérant le rapport anharmonique $\mathcal{R}(M, M', A, B)$.

Pour que la distance devienne nulle, il faut que ce rapport anharmonique soit égal à l'unité, c'est-à-dire que M coïncide avec M' ou A avec B. Si donc M et M' sont distincts, la distance ne sera nulle que si la droite qui les joint est tangente à l'*absolu*.

Si les points M, M' sont réels, les deux hypothèses que nous venons de faire ne pourront se présenter dans aucune des deux Géométries que nous avons réservées.

Pour que la distance MM' devienne infinie, il faut que le rapport anharmonique $\mathcal{R}(M, M', A, B)$ soit nul ou infini, ce qui exige que l'un des points soit sur l'*absolu*. Lorsque M et M' sont réels, cette hypothèse ne peut se présenter qu'en Géométrie non Euclidienne; M, M' étant à l'intérieur de l'absolu, leur distance est réelle et croît indéfiniment si l'un des points s'approche de l'*absolu*.

Signalons encore une valeur particulière remarquable de la distance. Lorsque les deux points M, M' sont conjugués par rapport à l'*absolu*, on a

$$\mathcal{R}(M, M', A, B) = -1, \qquad \overline{MM'} = \frac{\pi K}{2} + n\pi K,$$

n étant entier.

Ainsi, il revient au même de dire que deux points sont conjugués ou que l'une des valeurs de leur distance est égale à $\frac{\pi K}{2}$. En d'autres termes, le lieu des points à une distance $\frac{\pi K}{2}$ d'un point M est le plan conjugué de M.

En Géométrie non Euclidienne, ce lieu n'existe pas, puisque $\frac{\pi K}{2}$

est imaginaire et que le plan polaire d'un point à l'intérieur est tout entier hors de l'*absolu*.

Les remarques précédentes expliquent certaines particularités relatives aux surfaces qui jouent dans la Géométrie Cayleyenne le rôle de la sphère, c'est-à-dire qui sont le lieu des points à une distance donnée δ d'un point donné.

Si A est le point donné, que nous appellerons le *centre de la sphère Cayleyenne*, l'équation de cette sphère sera, d'après la formule (12),

$$(AM)^2 = \cos^2 \frac{\delta}{K} (AA)(MM). \tag{26}$$

C'est une quadrique inscrite à l'*absolu* suivant le plan polaire du centre A. On s'explique très bien pourquoi le lieu doit contenir la section de l'*absolu* par ce plan polaire, quel que soit le rayon donné δ. Car cette section est le lieu des points dont la distance au point A est indéterminée.

188. Comme on passe des plans aux points par la méthode des polaires réciproques, les conclusions précédentes peuvent facilement être transportées aux plans, et par suite aux droites, si l'on passe de la Géométrie dans l'espace à celle du plan.

On verra facilement :

1° Que les diverses valeurs de l'angle de deux plans, ou de deux droites concourantes, sont de la forme

$$\pm V_0 + n\pi;$$

2° Que cet angle ne devient indéterminé que si l'un des plans ou l'une des droites touche la surface, l'autre passant par son point de contact;

3° Qu'il ne devient infini que si l'un des plans ou l'une des droites est tangente à la surface;

4° Qu'il ne devient nul que si les deux plans se coupent suivant une tangente à l'*absolu*, ou si les deux droites sont dans un plan tangent à cette surface ou bien se coupent en un de ses points;

5° Qu'il ne devient égal à $\frac{\pi}{2}$ que si les deux plans sont conjugués ou si les deux droites sont conjuguées. On sait que deux plans sont *conjugués* quand l'un d'eux, que l'on peut choisir arbitrairement,

contient le pôle de l'autre. Nous dirons alors qu'ils sont perpendiculaires.

Rappelons de même que deux droites sont *conjuguées* lorsque l'une des deux, choisie arbitrairement, rencontre la polaire de l'autre. Alors, il y a, sur chacune d'elles, un point dont le plan polaire passe par l'autre; cette définition, on le voit, est *dualistique*. Quand deux droites qui se coupent seront conjuguées, nous dirons aussi qu'elles sont *perpendiculaires*.

L'emploi des polaires réciproques montre également que l'angle de deux droites est égal à celui de leurs polaires.

Pour définir les angles des droites et des plans, on suivra la même marche que dans la Géométrie ordinaire.

On dira qu'une droite d est perpendiculaire à un plan ϖ quand elle passera par le pôle de ce plan. Alors, elle sera évidemment perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans le plan; car ces droites vont toutes rencontrer la polaire de d, nécessairement située dans le plan ϖ.

Par un point quelconque M, on peut toujours mener une perpendiculaire à un plan ϖ. Il suffit de joindre M au pôle de ϖ, de sorte que, si M coïncide avec ce pôle, toutes les droites menées par M seront perpendiculaires à ϖ. En dehors de ce cas exceptionnel, la perpendiculaire sera unique.

Par un point M, on peut mener un plan perpendiculaire à une droite d et un seul, à moins que M ne soit sur la polaire d' de d, auquel cas tous les plans menés par d' sont perpendiculaires à d. En effet, tous les plans perpendiculaires à d doivent avoir leur pôle sur d; ils passent donc par la polaire d' de d. Si donc M n'est pas sur cette polaire, il y a un seul plan perpendiculaire, déterminé par M et par d'.

Deux plans distincts ϖ et ϖ' ont toujours une perpendiculaire commune, qui passe par les pôles des deux plans.

Quand une droite d est perpendiculaire à un plan ϖ, tout plan ϖ' passant par cette droite est perpendiculaire au plan ϖ. En effet, la polaire de d se trouve dans le plan ϖ; il en est donc de même du pôle du plan ϖ'.

Les propositions précédentes permettent de compléter nos définitions en leur ajoutant celle de l'angle d'une droite et d'un plan. Ce sera le complément de l'angle que fait la droite avec la perpendiculaire au plan menée par son pied dans le plan.

189. Avant de continuer, nous allons examiner quelles sont les conséquences des propositions précédentes, au point de vue des relations entre les éléments réels, dans les deux Géométries que nous avons retenues.

Dans la Géométrie de Riemann, où l'*absolu* est imaginaire, la distance de deux points réels ne sera jamais infinie : c'est ainsi que les choses se passent dans la Géométrie sphérique.

Dans la Géométrie non Euclidienne, où l'*absolu* est une surface convexe et où l'on reste, par hypothèse, dans l'intérieur, la distance de deux points deviendra infinie quand l'un des points se rapprochera de l'*absolu*. De sorte qu'un point ne pourrait sortir de la surface sans que sa distance à tous les points de l'intérieur devînt infinie. C'est pour cela que nous avons qualifié d'*inaccessible* l'espace extérieur.

Si l'on envisage, dans la Géométrie de Riemann, un point M et une droite d, la distance de M à tout point de d restant finie, il n'y aura plus lieu d'admettre la notion de parallèle. Ici encore, ce sera comme dans la Géométrie sphérique, où cette notion a disparu.

Au contraire, si l'*absolu* est une surface convexe, les deux points p, p' où la droite d, prise dans l'espace accessible, coupe l'absolu seront à une distance infinie de M. Il y aura donc ici deux parallèles ou, plus exactement, on pourra faire passer par M deux séries de droites : les unes, comprises dans l'angle $p\mathrm{M}p'$, rencontreront d dans l'espace accessible; les autres, comprises dans l'angle supplémentaire, rencontreront la portion de d située dans l'espace inaccessible : et si nous considérons cet espace inaccessible comme inexistant, elles ne rencontreront pas d.

Il y a lieu de faire des distinctions analogues pour les perpendiculaires à un plan ϖ. Dans le premier cas, deux perpendiculaires à un même plan se rencontreront toujours en un point réel, le pôle de ce plan. Dans le second cas, et si le plan ϖ coupe l'*absolu*, toutes ses perpendiculaires vont passer par le pôle, qui est dans l'espace inaccessible et *devront être considérées comme ne se coupant pas*. Ainsi, dans la Géométrie de Riemann, deux perpendiculaires à un plan se rencontrent toujours; dans la Géométrie non Euclidienne au contraire, deux perpendiculaires à un plan de l'espace accessible ne se rencontrent jamais. Et, par un point de cet espace, on ne peut mener qu'une perpendiculaire à un plan.

On établira sans peine des distinctions analogues pour ce qui

concerne les plans menés par un point M, perpendiculairement à une droite d. Les plans cherchés doivent contenir la polaire d' de d. Ils pourront donc être indéterminés dans la Géométrie de Riemann si M est sur d'; ils ne le seront jamais dans la Géométrie non Euclidienne.

190. Les remarques précédentes ne contiennent rien qui concerne deux droites *qui ne se coupent pas*. Nous allons étudier leur ensemble, et nous démontrerons d'abord qu'elles ont, en général, deux perpendiculaires communes.

Soient, en effet, d, d_1 les deux droites, et δ, δ_1 leurs droites polaires. Nous avons vu que toute droite perpendiculaire à d, par exemple, doit rencontrer δ. Donc, les perpendiculaires communes à d et à d_1 doivent rencontrer aussi δ et δ_1. Or on sait qu'il existe, en général, deux droites rencontrant quatre droites données. Notre proposition est donc établie.

Il est clair que les deux perpendiculaires communes ainsi obtenues sont polaires l'une de l'autre; cela se voit tout de suite si l'on transforme par polaires réciproques relativement à l'*absolu*.

191. La proposition précédente tombera en défaut si les quatre droites d, δ, d_1, δ_1 sont des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde; car alors elles seront rencontrées par toutes les génératrices de l'autre système, et notre problème aura acquis une infinité de solutions. Examinons si cette hypothèse peut se réaliser.

S'il en est ainsi, désignons par H la quadrique déterminée par les droites d, d_1, δ, δ_1. Toute génératrice rectiligne du second système de H doit couper l'*absolu* en deux points m, m_1 divisant harmoniquement les deux segments de cette droite compris respectivement entre d, δ et entre d_1, δ_1; cela résulte des propriétés des droites polaires. D'après les propriétés développées au n° 118, cette remarque suffit à montrer que les points m, m_1 décrivent deux droites de H : à savoir celles qui divisent harmoniquement les couples de génératrices d, δ et d_1, δ_1; et ces deux droites appartiennent évidemment à l'*absolu*.

Réciproquement, si l'on prend un hyperboloïde coupant l'*absolu* suivant une génératrice rectiligne ε et contenant deux droites d, δ, polaires l'une de l'autre, il coïncidera avec sa polaire

réciproque par rapport à l'*absolu*. Pour obtenir le cas d'indétermination que nous recherchons, il suffira d'associer à d une quelconque d_1 des génératrices de H, du même système que d.

On peut d'ailleurs donner une construction beaucoup plus simple des couples des droites d, d_1.

Prenons arbitrairement la droite d. Elle coupe l'*absolu* en deux points M_0, M'_0. Construisons les deux génératrices rectilignes d'un même système de cette surface η, η_1, qui passent respectivement par M_0, M'_0; ce qui peut se faire de deux manières différentes. Toute droite d_1 rencontrant à la fois η et η_1 pourra être associée à d pour donner une solution du problème. Comme on peut obtenir deux couples η, η_1 en s'adressant successivement aux génératrices des deux systèmes, on voit qu'il passera par tout point de l'espace deux droites d_1 que l'on pourra associer à d.

Laissant au lecteur le soin de justifier cette construction, nous nous contenterons de remarquer que, si l'*absolu* est imaginaire et la droite d réelle, cette construction nous donne des droites réelles d_1 passant par tout point réel de l'espace.

192. On peut étudier plus complètement cette question des perpendiculaires communes à deux droites à l'aide d'une formule que nous allons établir et qui nous sera, plus tard, très utile.

Considérons un segment AB et cherchons sa différentielle lorsqu'il se déplace d'une manière quelconque dans l'espace. D'après les principes relatifs à la différentiation, on peut supposer que la variation de ses extrémités a lieu successivement, et ajouter ensuite les résultats obtenus. Supposons d'abord que l'extrémité B se déplace seule et vienne en B'. Dans le plan des trois points A, B, B', la Géométrie nouvelle est, nous le savons (n° 179), identique à celle de la sphère. On aura donc, comme sur la sphère,

$$d.\overline{AB} = -\overline{BB'}\cos\widehat{B'BA},$$

formule que l'on vérifierait d'ailleurs très aisément à l'aide des relations établies précédemment. Si donc on suppose que les deux extrémités du segment se sont déplacées, on aura, comme dans la Géométrie ordinaire,

$$d.\overline{AB} = -\overline{AA'}\cos\widehat{A'AB} - \overline{BB'}\cos\widehat{B'BA}. \tag{26}$$

Cette formule a de nombreuses conséquences. Appliquons-la à la question qui nous occupe.

193. Nous commencerons par supposer que l'*absolu* soit une quadrique imaginaire, et nous envisagerons deux droites réelles d, d_1. Si l'on prend un point réel P sur la première et un point réel P_1 sur la seconde, la distance PP_1 ne peut devenir ni nulle, ni infinie, ni indéterminée. Elle aura donc au moins un maximum et un minimum. Si le segment PP_1 se déplace infiniment peu et devient $P'P'_1$, la formule (26) nous donnera la relation

$$d.\overline{PP_1} = -\overline{PP'}\cos\widehat{P'PP_1} - \overline{P_1P'_1}\cos\widehat{P'_1P_1P},$$

et nous voyons que, lorsque $\overline{PP_1}$ passera par un maximum ou un minimum, on devra avoir, $\overline{PP'}$ et $\overline{P_1P'_1}$ étant arbitraires,

$$\cos\widehat{P'PP_1} = 0, \qquad \cos\widehat{P'_1P_1P} = 0,$$

c'est-à-dire que le segment PP_1 devra être perpendiculaire aux deux droites d, d_1. Ainsi, il est établi *a priori* qu'il y aura au moins deux perpendiculaires communes, réelles si les droites d, d_1 le sont. Nous savons, d'ailleurs, qu'il ne pourrait y en avoir plus de deux, au moins dans le cas général.

Ces résultats sont confirmés par le calcul suivant.

Soient M_0, M'_0 les deux points imaginaires conjugués où la droite réelle d rencontre l'*absolu;* soient de même M_1, M'_1 ceux où la droite d_1 rencontre l'*absolu*. Si x_0, y_0, z_0, t_0, x'_0, y'_0, z'_0, t'_0 désignent les coordonnées de M_0, M'_0, un point P de la droite d aura pour coordonnées

$$x_0 + \lambda x'_0, \qquad y_0 + \lambda y'_0, \qquad z_0 + \lambda z'_0, \qquad t_0 + \lambda t'_0,$$

et comme M_0, M'_0 sont imaginaires conjugués, on verra aisément que le point P ne peut être réel que si λ a son module égal à 1 et est, par suite, de la forme $e^{i\mu}$.

De même, les coordonnées d'un point P_1 de la droite d_1 seront

$$x_1 + \lambda_1 x'_1, \qquad y_1 + \lambda_1 y'_1, \qquad z_1 + \lambda_1 z'_1, \qquad t_1 + \lambda_1 t'_1.$$

x_1, y_1, z_1, t_1 et x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 désignant respectivement les coor-

données de M_1, M'_1, et λ_1 devant avoir un module égal à 1 si le point P_1 est réel.

Cela posé, d'après nos notations, on doit avoir

$$\cos\frac{\overline{PP_1}}{R} = \frac{(PP_1)}{\sqrt{(PP)(P_1P_1)}}. \tag{27}$$

Si l'on tient compte des équations

$$(M_0M_0) = (M_1M_1) = (M'_0M'_0) = (M'_1M'_1) = 0,$$

qui signifient que les quatre points M_0, M'_0, M_1, M'_1 sont sur l'*absolu*, on trouvera, en appliquant l'identité (9),

$$(PP) = 2\lambda(M_0M'_0), \qquad (P_1P_1) = 2\lambda_1(M_1M'_1),$$
$$(PP_1) = (M_0M_1) + \lambda(M'_0M_1) + \lambda_1(M_0M'_1) + \lambda\lambda_1(M'_0M'_1).$$

Posons

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(M_0M_1)}{\sqrt{(M_0M'_0)(M_1M'_1)}} = Ae^{i\alpha}, && \frac{(M'_0M'_1)}{\sqrt{(M_0M'_0)(M_1M'_1)}} = Ae^{-i\alpha}, \\ &\frac{(M'_0M_1)}{\sqrt{(M_0M'_0)(M_1M'_1)}} = Be^{i\beta}, && \frac{(M_0M'_1)}{\sqrt{(M_0M'_0)(M_1M'_1)}} = Be^{-i\beta}. \end{aligned}\right.$$

On verra facilement que A, B, α, β sont réels, ce qui permet de supposer A et B positifs. Si l'on effectue en outre le changement de notations

$$\lambda = e^{i\mu}, \qquad \lambda_1 = e^{i\mu_1},$$

d'après lequel μ et μ_1 sont réels pour les points réels correspondants P, P_1, il viendra

$$\cos\frac{\overline{PP_1}}{R} = A\cos\left(\frac{\mu+\mu_1}{2} - \alpha\right) + B\cos\left(\frac{\mu_1-\mu}{2} - \beta\right). \tag{29}$$

On voit tout de suite que la valeur absolue du premier membre oscille entre $|A - B|$ et $A + B$. Ainsi, il y aura une plus courte et une plus longue distance des deux droites. Elles correspondent aux positions des points P, P_1 pour lesquelles on a

$$\frac{\mu+\mu_1}{2} - \alpha = n\pi, \qquad \frac{\mu_1-\mu}{2} - \beta = n'\pi.$$

n et n' désignant des entiers.

Cela donne

$$\mu_1 - \alpha - \beta = (n + n')\pi, \qquad \mu - \alpha + \beta = (n - n')\pi.$$

En négligeant les multiples de 2π, ce qui est évidemment permis, on a seulement les deux solutions

$$(30) \qquad \mu_1 = \alpha + \beta + \pi, \qquad \mu = \alpha - \beta + \pi$$

et

$$(31) \qquad \mu_1 = \alpha + \beta, \qquad \mu = \alpha - \beta.$$

Ainsi, *il y a une plus courte et une plus longue distance pour deux points pris respectivement sur les deux droites.*

194. Notre solution générale nous a appris que les deux perpendiculaires communes sont les deux droites p, p_1 qui rencontrent, en même temps que d, d_1, leurs droites polaires δ, δ_1. De là il résulte que *chacune des droites p, p_1 est la polaire de l'autre.* Car la droite p rencontrant d, d_1, δ, δ_1, sa polaire doit rencontrer δ, δ_1, d, d_1 et, par conséquent, se confondre avec p_1. C'est ce qu'il serait aisé de vérifier ici, les deux positions de la perpendiculaire commune divisant harmoniquement les segments $M_0M'_0$ et $M_1M'_1$. Nous préférons insister sur une notion plus importante.

Si, au lieu de considérer des points sur les droites d, d_1, on envisage des plans passant par ces droites, on est conduit à étudier les variations de l'angle de ces plans. Or, cette question revient à celle que nous avons traitée; car les deux plans ont pour pôles deux points ϖ, ϖ_1 des deux droites δ, δ_1 polaires de d, d_1; et leur angle est égal à la distance $\varpi\varpi_1$, divisée par la constante R. Donc cet angle aura un maximum et un minimum qui correspondront aux deux cas où la droite $\varpi\varpi_1$ est perpendiculaire commune à δ et à δ_1 et, *par conséquent*, à d et à d_1. Ainsi, *le maximum et le minimum de cet angle auront lieu lorsque les plans contiendront une des deux perpendiculaires communes à d et à d_1.*

Mais ce n'est pas tout; il y a des relations plus étroites encore entre cette question et la précédente. Soient a, a_1, α, α_1 les points où l'une des perpendiculaires communes coupe d, d_1, δ, δ_1; soient de même b, b_1, β, β_1 les points où l'autre perpendiculaire commune

coupe les mêmes droites. Les plans qui passent par d, d_1 et par a, a_1 ont pour pôles les deux points β, β_1; leur angle sera donc égal au quotient par R de la distance $\beta\beta_1$. Mais, sur la seconde perpendiculaire commune bb_1, les deux points β, β_1 ont b, b_1 pour conjugués harmoniques relativement à l'*absolu*; donc leur distance sera égale à la longueur de la seconde perpendiculaire commune aux deux droites données d, d_1.

195. En résumé, les deux droites ont deux perpendiculaires communes aa_1 et bb_1. Si l'on étudie la variation de la distance de deux points pris sur les deux droites, on trouve qu'elle est maximum, par exemple pour la position aa_1, et minimum pour la position bb_1. Si l'on étudie la variation de l'angle de deux plans passant respectivement par les deux droites, on trouve que cet angle est minimum lorsqu'ils contiennent la perpendiculaire maximum aa_1 et alors il est égal à bb_1, divisé par la constante R. Il est, au contraire, maximum quand les deux plans contiennent bb_1 et alors il est égal à aa_1, divisé par la constante R.

En terminant ce qui concerne cette question, je ferai remarquer que la méthode suivie met en évidence le cas d'indétermination.

Si l'on a, à la fois,

$$(M_0 M_1) = 0, \qquad (M'_0 M'_1) = 0, \tag{32}$$

ou

$$(M_0 M'_1) = 0, \qquad (M'_0 M_1) = 0, \tag{33}$$

ce qui signifie que les deux droites $M_0 M_1$, $M'_0 M'_1$ ou bien $M_0 M'_1$, $M'_0 M_1$, sont des génératrices de l'*absolu*, la formule qui donne $\overline{PP_1}$ se réduit à un seul terme, l'un des modules A ou B étant nul. Supposons, par exemple, que ce soit B. Alors il suffira, pour qu'il y ait maximum ou minimum, que l'on ait

$$\frac{\mu + \mu_1}{2} - \alpha = n\pi,$$

n étant entier.

L'indétermination serait plus grande encore si les droites d, d_1 étaient polaires réciproques l'une de l'autre. Alors les relations (32) et (33) seraient vérifiées en même temps, et la distance de tout point de d à tout point de d_1 serait égale à $\frac{\pi R}{2}$.

196. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que l'*absolu* est imaginaire. Si l'*absolu* est une surface convexe et si l'on considère les portions des droites d, d_1 qui sont dans l'espace accessible, on verra aisément qu'*elles auront une perpendiculaire commune et une seule*. En effet, la distance d'un point de d à un point de d_1 devient infinie lorsqu'un de ces points s'approche de l'*absolu*. Cette distance a donc, dans l'espace accessible, un ou plusieurs minimums. On peut affirmer qu'il y en a un seul, puisque le problème comporte, au plus, deux solutions. Donc, une des perpendiculaires communes coupera les deux droites dans l'espace accessible; l'autre, qui est la polaire de la première, sera tout entière dans l'espace inaccessible. C'est ce que confirmerait un calcul analogue à celui que nous avons fait dans le premier cas.

197. Les questions relatives à deux droites qui ne se coupent pas étant élucidées, les autres notions métriques ne présentent aucune difficulté. Par exemple, la distance d'un point à un plan sera la distance du point au pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan; elle est le complément à $\frac{\pi K}{2}$ de la distance du point au pôle du plan par rapport à l'*absolu*.

De même, d'un point quelconque M, on peut, en général, abaisser une seule perpendiculaire sur une droite donnée d. C'est la droite qui, partant de M, rencontre à la fois d et sa droite polaire δ. La distance de M à la droite sera celle de ce point au pied de la perpendiculaire; elle sera le complément à $\pi\frac{K}{2}$ de la distance de ce même point à la polaire δ; de sorte que le lieu des points à égale distance d'une droite d sera aussi le lieu des points à une distance constante de sa polaire δ.

Ce résultat se confirme par un calcul direct. Soient A, B les points où d coupe l'*absolu*, C et D les points où la polaire δ coupe la même quadrique. On sait que les quatre droites AC, AD, BC, BD sont des génératrices de l'*absolu*. Si donc on prend le tétraèdre ABCD pour tétraèdre de référence, l'équation de l'*absolu* prend la forme

$$xy + zt = 0, \tag{34}$$

la droite d étant représentée, par exemple, par les équations

$$x = 0, \qquad y = 0, \tag{35}$$

et la droite δ par les équations

$$z = 0, \qquad t = 0. \tag{36}$$

Soient x_0, y_0, z_0, t_0 les coordonnées d'un point M. La perpendiculaire à d passant par ce point aura pour équations

$$xy_0 - yx_0 = 0, \qquad zt_0 - tz_0 = 0.$$

Les coordonnées du pied P de cette perpendiculaire seront

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = z_0, \qquad t = t_0.$$

Donc la distance $\overline{\text{MP}}$ qui est, par définition, la distance à la droite d, aura son expression donnée par la formule

$$\cos\frac{\overline{\text{MP}}}{\text{K}} = \frac{\sqrt{z_0 t_0}}{\sqrt{x_0 y_0 + z_0 t_0}}, \tag{37}$$

qui est une simple application de l'équation générale (12) (n° 182). On déduit de là

$$\operatorname{tang}\frac{\overline{\text{MP}}}{\text{K}} = \sqrt{\frac{x_0 y_0}{z_0 t_0}}; \tag{38}$$

en sorte que le lieu des points à une distance donnée de la droite d (et par conséquent de sa polaire) est la quadrique définie par l'équation

$$\frac{xy}{zt} = \text{const.} \tag{39}$$

On peut la définir en disant qu'elle coupe l'*absolu* suivant le quadrilatère gauche formé par les quatre génératrices rectilignes qui passent aux points d'intersection de la droite et de l'*absolu*.

198. Après avoir étudié les questions relatives aux points, aux plans et aux droites, nous allons examiner celles qui concernent les courbes et les surfaces. L'angle de deux courbes qui se croisent en un point sera celui de leurs tangentes en ce point, et il sera aisé de l'évaluer.

Appliquons, par exemple, la formule (19). En désignant par x, y, z, t les coordonnées du point A et par d et δ, respectivement, les caractéristiques relatives à des déplacements sur les courbes dont nous voulons mesurer l'angle, on pourra prendre

$$x + dx, \qquad y + dy, \qquad z + dz, \qquad t + dt;$$
$$x + \delta x, \qquad y + \delta y, \qquad z + \delta z, \qquad t + \delta t,$$

pour les coordonnées des points B, C; et la formule (19) nous donnera, V désignant l'angle des deux courbes,

$$(40)\quad \cos V = \frac{f(x,x)\,f(dx,\delta x) - f(x,dx)\,f(x,\delta x)}{\sqrt{[f(x,x)\,f(dx,dx) - f^2(x,dx)]\,[f(x,x)\,f(\delta x,\delta x) - f^2(x,\delta x)]}}.$$

La condition de perpendicularité des deux tangentes sera donc

$$(41)\qquad f(x,x)\,f(dx,\delta x) - f(x,dx)\,f(x,\delta x) = 0.$$

199. C'est ici le lieu de rappeler une notion introduite par *Beltrami*. Considérons une forme quadratique ds^2 définie par la formule

$$(42)\qquad ds^2 = \sum_{i,k}\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients a_{ik} sont des fonctions quelconques de x_1, x_2, ..., x_n satisfaisant à la condition

$$(43)\qquad a_{ik} = a_{ki};$$

en sorte que ds^2 peut s'écrire

$$(44)\qquad ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + \ldots + 2a_{12}\,dx_1\,dx_2 + \ldots.$$

Si l'on fait un changement de variables quelconque, en substituant aux x_i des fonctions y_i de ces variables, on aura

$$(45)\qquad ds^2 = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\,dx_i\,dx_k = \Sigma\Sigma\, b_{ik}\,dy_i\,dy_k;$$

et, en considérant deux systèmes de différentielles, on verra aisément que l'on a

$$(46)\qquad \Sigma\Sigma\, a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k = \Sigma\Sigma\, b_{ik}\,dy_i\,\delta y_k.$$

Il suffit de remplacer dans l'équation précédente dx_i par $dx_i + \lambda\,\delta x_i$, ce qui conduira à remplacer dy_i par $dy_i + \lambda\,\delta y_i$, et d'égaler les coefficients de λ dans les deux membres. De là il suit que *l'angle θ défini par l'équation*

$$(47)\qquad \cos\theta = \frac{\Sigma\Sigma\, a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k}{\sqrt{\Sigma\Sigma\, a_{ik}\,dx_i\,dx_k}\,\sqrt{\Sigma\Sigma\, a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k}}$$

est un invariant. Nous l'appellerons l'angle des deux directions définies par les caractéristiques d et δ, relativement à la

forme quadratique déterminée par la formule (44). Quand cette forme est *définie*, c'est-à-dire lorsqu'elle peut se ramener à une somme de carrés tous de même signe, θ est essentiellement réel.

On voit que *l'angle ne change pas lorsque tous les coefficients de la forme quadratique sont multipliés ou divisés par une même fonction, d'ailleurs quelconque, des variables.*

Si nous appliquons ici cette notion, nous pourrons dire que l'angle V de deux directions, défini par la formule (40), n'est autre que l'angle de ces deux directions, évalué par rapport à la forme quadratique (13) qui donne l'élément linéaire de l'espace Cayleyen.

200. Les méthodes précédentes peuvent être étendues et appliquées aux questions concernant deux surfaces. Nous avons vu que, si

$$\varphi(u, v, w, p) = 0$$

est l'équation tangentielle homogène de l'*absolu*, l'angle de deux plans est déterminé par la formule (18). S'il s'agit de deux surfaces représentées par les équations homogènes

$$(48) \qquad F(x, y, z, t) = 0, \qquad F_1(x, y, z, t) = 0,$$

leurs plans tangents auront pour équations

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + \ldots = 0, \qquad X\frac{\partial F_1}{\partial x} + \ldots = 0,$$

et il suffira d'appliquer la formule (18) à ces deux plans pour avoir l'angle des deux surfaces en un de leurs points communs.

Soit

$$(49) \quad \begin{aligned} f(x, y, z, t) = {} & A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy \\ & + 2 C xt + 2 C' yt + 2 C'' zt + D t^2 = 0 \end{aligned}$$

l'équation ponctuelle de l'*absolu*. Pour avoir son équation tangentielle, on écrira les équations

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} A x + B'' y + B' z + C t &= u, \\ B'' x + A' y + B z + C' t &= v, \\ B' x + B y + A'' z + C'' t &= w, \\ C x + C' y + C'' z + D t &= p, \end{aligned} \right.$$

qui déterminent le pôle du plan (u, v, w, p), et l'on exprimera que ce pôle est dans le plan, ce qui donnera la nouvelle relation

$$ux + vy + wz + pt = 0. \tag{51}$$

L'élimination de x, y, z, t entre ces relations fournira l'équation tangentielle demandée. Posons

$$H = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}, \tag{52}$$

on aura, pour le premier membre de l'équation tangentielle.

$$\Phi(u, v, w, p) = -\frac{1}{H} \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u \\ B'' & A' & B & C' & v \\ B' & B & A'' & C'' & w \\ C & C' & C'' & D & p \\ u & v & w & p & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial H}{\partial A} u^2 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial B''} uv + \ldots + \frac{\partial H}{\partial C} up + \ldots + \frac{\partial H}{\partial D} p^2 \right\}. \tag{53}$$

On verra alors très aisément que, si l'on introduit les notations suivantes :

$$\Delta(\varphi, \varphi_1) = -\frac{1}{H} \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ B'' & A' & B & C' & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ B' & B & A'' & C'' & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ C & C' & C'' & D & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & 0 \end{vmatrix}, \tag{54}$$

$$\Delta\varphi = \Delta(\varphi, \varphi), \tag{55}$$

φ et φ_1 étant des fonctions homogènes de x, y, z, t, l'angle V de deux surfaces en un point sera donné par la formule

$$\cos V = \frac{\Delta(\varphi, \varphi_1)}{\sqrt{\Delta\varphi}\,\sqrt{\Delta\varphi_1}}, \tag{56}$$

$\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$ étant les équations des deux surfaces.

Au reste, on peut donner une représentation géométrique

de $\Delta\varphi$, $\Delta(\varphi, \varphi_1)$. Puisque les coordonnées sont homogènes, admettons qu'on ait choisi le facteur de proportionnalité de telle manière que l'on ait

$$f(x, y, z, t) = 1. \tag{57}$$

Alors, les formules que nous avons données pour l'élément linéaire et pour l'angle de deux courbes se simplifieront beaucoup. Les expressions que nous avons désignées par $f(x, dx)$, $f(x, \delta x)$ seront nulles, et l'on aura,

$$ds^2 = f(dx, dx). \tag{58}$$

Quant à l'angle V de deux courbes, il sera donné par la formule très simple

$$ds\, \delta s \cos V = f(dx, \delta x). \tag{59}$$

D'après cela, voici comment on déterminera la normale à une surface définie par l'équation

$$\varphi(x, y, z, t) = 0. \tag{60}$$

Pour tout déplacement s'effectuant à partir du point (x, y, z, t) sur la surface, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta t = 0.$$

Donc, d'après la condition d'orthogonalité exprimée par l'équation

$$f(dx, \delta x) = 0,$$

le déplacement pour lequel on aura

$$\left\{\begin{aligned}
&A\, dx + B''dy + B'dz + C\, dt = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x},\\
&B''dx + A'dy + B\, dz + C'dt = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y},\\
&B'dx + B\, dy + A'dz + C''dt = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z},\\
&C\, dx + C'dy + C''dz + D\, dt = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial t},
\end{aligned}\right. \tag{61}$$

sera perpendiculaire à *tous* les déplacements qui peuvent se produire sur la surface. Il aura donc lieu nécessairement suivant la

normale à la surface. Ainsi, les équations précédentes définissent la direction de la normale.

Adjoignons-leur l'identité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = d\varphi, \tag{62}$$

qui fait connaître la variation de φ quand on se déplace suivant cette normale.

L'élimination de dx, dy, dz, dt entre les équations (61), (62) nous donnera

$$d\varphi = \lambda\, \Delta\varphi.$$

D'autre part, si nous ajoutons les équations (61), après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, dt, il vient

$$ds^2 = \lambda\, d\varphi.$$

Et, en joignant cette relation à la précédente, nous avons

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi^2}{ds^2}, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\Delta\varphi} = \frac{ds}{\lambda}. \tag{63}$$

Ainsi, $\sqrt{\Delta\varphi}$ représente la dérivée de φ quand on se déplace suivant la normale.

Si, au lieu d'adjoindre au système (61) l'équation (62), on avait employé la suivante :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt = d\varphi_1,$$

on aurait été conduit à la relation

$$\frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{\Delta(\varphi, \varphi_1)}{\sqrt{\Delta\varphi}}, \tag{64}$$

la variation de φ_1 se rapportant encore à un déplacement suivant la normale à la surface définie par l'équation (60).

CHAPITRE II.

LES DÉPLACEMENTS CAYLEYENS.

Quelques mots sur les diverses Géométries que l'on pourrait imaginer et sur une propriété caractéristique de la Géométrie Cayleyenne. — Transformation d'une forme quadratique homogène en elle-même par des substitutions linéaires. — Cas particulier des formes à quatre variables. — Quelques propriétés des génératrices rectilignes d'une quadrique, intervention du Hessien, distinctions en deux systèmes. — Toutes les transformations continues d'une quadrique en elle-même s'obtiennent en soumettant à deux homographies distinctes les paramètres des deux systèmes de génératrices. — Application aux déplacements Cayleyens. — Étude préliminaire du cas où les génératrices de l'un des systèmes ne sont pas déplacées par la transformation. — Théorie géométrique des déplacements correspondants que l'on appelle *Riemanniens* parce qu'ils ne sont réels que si l'*absolu* est imaginaire. La théorie analytique de ces déplacements se rattache à l'identité célèbre de *Lagrange*, d'après laquelle le produit de deux sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés. Emploi des quaternions. — Retour à la théorie générale. On obtient, en dehors des déplacements précédents, trois espèces distinctes nouvelles : les retournements, les rotations et les déplacements hélicoïdaux ; ces derniers sont les plus généraux. — Définitions et propriétés de ces déplacements; analogies avec la Géométrie ordinaire. — Tout déplacement résulte, d'une infinité de manières, de la composition de deux retournements. — Surface lieu des points à égale distance d'une même droite. — Déplacement continu. Courbes analogues à l'hélice, au cercle.

---

201. Au n° 186, nous avons déjà remarqué que l'on obtiendrait un grand nombre de géométries nouvelles en conservant la notion de *base*, mais en choisissant des bases toutes différentes de celles que nous a données l'emploi d'une quadrique comme *absolu*. Ce point de vue peut être beaucoup élargi. Par exemple, on peut définir les distances en introduisant une surface quelconque (S). Si l'on désigne par A, A′, A″, ... les points d'intersection de cette surface avec la droite qui joint deux points quelconques M, M′, la formule

$$\overline{MM'} = \varphi(M', A, A', A'', \ldots) - \varphi(M, A, A', A'', \ldots),$$

où φ désigne une fonction quelconque des coordonnées des points qui y figurent, donnera une expression de la distance dans laquelle

les propriétés additives des abscisses et des segments portés sur une même droite seront conservées. On pourra, de même, définir l'angle de deux plans μ, μ' ou de deux droites qui se coupent d, d' par des formules telles que les suivantes :

$$\widehat{\mu\mu'} = \Psi(\mu', \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots) - \Psi(\mu, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots),$$
$$\widehat{dd'} = \chi(d', a, a', a'', \ldots) - \chi(d, a, a', a'', \ldots),$$

où α, α', α'' désignent les plans tangents à une surface quelconque (T) menés par l'intersection de μ et de μ'; et de même a, a', a'', ... les tangentes menées à une troisième surface (U) dans le plan des droites d, d' et par leur point commun, et où les fonctions Ψ et χ auront été choisies d'une manière arbitraire. On pourrait même obtenir un grand nombre de géométries de ce genre qui comprendraient comme cas-limite la Géométrie ordinaire. Considérons, par exemple, n quadriques (S_1), (S_2), ..., (S_n) et définissons chacun des éléments, angles ou distances, comme la somme des éléments homologues calculés successivement avec les diverses quadriques. Si l'on suppose que la première de ces quadriques se réduise au cercle imaginaire de l'infini, dans les conditions énumérées au n° 185, et que les constantes C, C', C'' relatives aux autres quadriques, qui figurent dans les formules (a), (b), (c) du n° 180, deviennent toutes infinies, on retombera sur la Géométrie Euclidienne.

Ainsi, la Géométrie Cayleyenne est bien loin d'être la seule qui puisse se rapprocher indéfiniment de la Géométrie ordinaire, mais, comme l'a démontré *Sophus Lie*, elle est la seule qui partage avec la Géométrie Euclidienne une autre propriété fondamentale.

Celle-ci utilise à chaque instant, pour ses démonstrations, les déplacements des figures dans le plan et dans l'espace, c'est-à-dire des transformations homographiques dans lesquelles les angles et les distances sont conservés. Il existe aussi de telles transformations dans la Géométrie Cayleyenne et, comme les déplacements dans la Géométrie ordinaire, elles dépendent de six paramètres. Nous allons maintenant les étudier.

202. Pour qu'une transformation homographique conserve les distances, il faut et il suffit évidemment qu'elle conserve l'*absolu*, c'est-à-dire qu'elle transforme cette quadrique en elle-même. La

transformation homographique devra donc remplacer l'équation de l'*absolu* par une équation proportionnelle. On peut même demander que la nouvelle équation soit identique à la première; car il est permis de multiplier par une constante arbitraire tous les coefficients d'une substitution homographique.

Nous sommes donc conduits à cette belle question des transformations d'une forme quadratique en elle-même par des substitutions linéaires; et, bien que, dans le cas particulier que nous avons à envisager, elle soit susceptible d'une solution particulièrement simple, je vais dire quelques mots de sa solution dans le cas général.

Considérons une forme quadratique homogène à n variables

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

et soient

$$(1) \qquad x_i = \sum_k \alpha_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n)$$

les formules qui définissent la substitution cherchée et qui assurent l'identité

$$(2) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n).$$

En écrivant que la forme quadratique

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

obtenue par la substitution (1), a ses coefficients égaux à ceux de $f(y_1, \ldots, y_n)$, on sera conduit à $\frac{n(n+1)}{2}$ relations entre les n^2 constantes α_{ik}. Et, par suite, la solution comportera $\frac{n(n-1)}{2}$ arbitraires.

On obtient aisément cette solution en ramenant la forme f à une somme de carrés. Mais il n'est pas nécessaire d'entrer dans le détail pour établir un résultat fondamental.

D'après une propriété générale, dans toute substitution *linéaire*, le Hessien de la forme $f(x_1, \ldots, x_n)$, c'est-à-dire le déterminant

$$(3) \qquad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots\cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}$$

se reproduit, multiplié par le carré du déterminant de la substitution.

Si donc la forme redevient elle-même, il faudra que le déterminant de la substitution ait son carré égal à 1. Il y aura donc deux classes de substitutions linéaires; pour les unes, le déterminant sera -1, pour les autres il sera $+1$.

Il y a entre elles une différence essentielle. Imaginons qu'une substitution varie d'une manière continue; son déterminant, qui est $+1$ ou -1, ne pourra changer de signe, et la substitution restera dans sa classe primitive. On conçoit donc que, par une variation continue des paramètres indépendants, on puisse déduire de chaque substitution toutes celles qui appartiennent à la même classe. Or la substitution *identique*, définie par les relations

$$x_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

est de celles pour lesquelles le déterminant est $+1$, et nous dirons que ces substitutions forment *la première classe*. Nous voyons donc que c'est à la première classe qu'appartiendra nécessairement toute transformation continue de la forme quadratique en elle-même.

On sait qu'en appliquant successivement deux transformations données, le déterminant de la substitution composée est le produit des déterminants des deux substitutions.

Il suit de là que le produit de deux substitutions de la même classe est une substitution de la première classe, et que l'on obtient toutes les substitutions de la seconde classe en appliquant une substitution particulière quelconque de cette classe à *toutes* les substitutions de la première classe.

Au reste, il est aisé d'obtenir une substitution particulière de seconde classe. Si le carré de x_1 figure dans la forme, on peut toujours, en posant

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x'_1,$$

ramener $f(x_1, \ldots, x_n)$ à la forme suivante :

$$a x'^2_1 + \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Il suffira, pour obtenir une substitution de seconde classe, de changer le signe de x'_1, en conservant toutes les autres variables.

203. Dans le cas qui doit nous occuper, où f ne dépend que de quatre variables, la solution la plus simple, celle qui nous sera le plus utile, sera fournie par la considération des génératrices rectilignes.

Soit

$$f(x, y, z, t) = 0$$

une équation à coefficients réels représentant une quadrique. Nous présenterons d'abord une remarque essentielle relative au signe de son Hessien. Ce signe ne change pas si l'on multiplie les coefficients par un nombre quelconque, positif ou négatif, si l'on effectue une substitution homographique quelconque, de déterminant positif ou négatif. *Il indique donc une propriété de la surface.* Et, en effet, on voit immédiatement sur les formes réduites que, *si le Hessien est positif, la surface est imaginaire ou réelle et réglée;* au contraire, *elle est réelle et convexe si le Hessien est négatif.* Dans l'un et l'autre cas, nous l'avons vu (n° 116), les deux systèmes de génératrices, réelles ou imaginaires, peuvent être représentés par deux équations telles que les suivantes :

$$P = \lambda R, \qquad S = \lambda Q \tag{4}$$

et

$$P = \mu S, \qquad R = \mu Q, \tag{5}$$

où P, Q, R, S sont des fonctions linéaires et qui conduisent à l'équation de la quadrique, mise sous la forme

$$PQ - RS = 0. \tag{6}$$

Si l'on calculait avec cette forme le Hessien H, on trouverait évidemment

$$H = \delta^2,$$

δ étant le déterminant des fonctions P, Q, R, S prises, par exemple, dans l'ordre que nous indiquons ici.

Si H est positif, δ est réel. Si H est négatif, δ est une imaginaire pure.

Comme on peut échanger R et S, on fera en sorte que, dans le premier cas, δ soit positif, et, dans le second cas, qu'il en soit de même de son quotient par i.

Quand cette condition sera remplie, nous dirons que le système (4) représente les génératrices du premier système, et le système (5) celles du second.

Si l'on employait, pour représenter la surface, les formules à deux paramètres déjà données

$$(7)\qquad \begin{cases} x = a\,\lambda\mu + b\,\lambda + c\,\mu + d, \\ y = a'\,\lambda\mu + b'\,\lambda + c'\,\mu + d', \\ z = a''\,\lambda\mu + b''\,\lambda + c''\,\mu + d'', \\ t = a'''\lambda\mu + b'''\lambda + c'''\mu + d''', \end{cases}$$

et si l'on posait

$$(8)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix},$$

on verrait aisément que Δ^2 est réel et du signe du Hessien. Si Δ, ou son quotient par i, est positif, λ est le paramètre des génératrices rectilignes du premier système ; c'est une condition que l'on peut toujours obtenir, en échangeant, s'il y a lieu, λ et μ.

Cette distinction établie entre les deux systèmes de génératrices subsistera évidemment quand on effectuera une substitution linéaire de déterminant positif, et en particulier une substitution de la première classe.

204. Ces distinctions étant nettement établies, revenons au problème proposé, et cherchons à obtenir toutes les substitutions linéaires de déterminant *un* qui conservent l'*absolu*. Ces substitutions, devant évidemment conserver les génératrices rectilignes de chaque système, devront nous conduire à des relations de la forme suivante :

$$\lambda' = \varphi(\lambda), \qquad \mu' = \psi(\mu),$$

entre les paramètres λ, μ et ceux λ', μ' qui leur correspondent. Un calcul direct nous conduirait aisément à reconnaître que φ et ψ sont des fonctions rationnelles du premier degré. Mais il vaut mieux remarquer que la substitution cherchée, étant homographique, doit respecter le rapport anharmonique de quatre génératrices quelconques, qui est celui des quatre points où ces droites coupent une génératrice de l'autre système. Il faut donc que $\varphi(\lambda)$ par exemple

satisfasse à une équation fonctionnelle telle que la suivante :

$$\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)}{\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_1)}\,\frac{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_0)}=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-\lambda_1}\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_0},$$

d'où l'on déduit immédiatement, en donnant à λ_0, λ_1, λ_2 des valeurs constantes, que $\varphi(\lambda)$ doit être une fonction rationnelle du premier degré. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Pour obtenir toutes les transformations homographiques continues de l'absolu en lui-même il faut soumettre les paramètres des deux familles de génératrices rectilignes à deux substitutions linéaires quelconques.

Ainsi apparaissent les six constantes qui, d'après le n° 202, doivent figurer dans les substitutions cherchées. Mais notre analyse ne sera complète que lorsque nous aurons démontré que la condition précédente, qui est évidemment nécessaire, est aussi suffisante.

Pour établir ce résultat essentiel, nous prendrons l'équation de l'*absolu* sous la forme

$$PQ-RS=0. \tag{9}$$

Alors les formules

$$P=\lambda\mu,\qquad Q=1,\qquad R=\mu,\qquad S=\lambda. \tag{10}$$

qui conviennent à tout point de la surface, mettent en évidence les paramètres λ et μ des génératrices rectilignes. Si l'on effectue sur ces paramètres les deux substitutions linéaires définies par les formules

$$\lambda=\frac{a\lambda'+b}{\alpha\lambda'+\beta},\qquad \mu=\frac{c\mu'+d}{\gamma\mu'+\delta}, \tag{11}$$

les équations

$$P'=\lambda'\mu',\qquad Q'=1,\qquad R'=\mu',\qquad S'=\lambda' \tag{12}$$

définiront un autre point de l'*absolu*. En éliminant λ, μ, λ', μ', on trouve aisément les relations

$$\left\{\begin{aligned}\rho P &= acP'+bdQ'+bcR'+adS',\\ \rho Q &= \alpha\gamma P'+\beta\delta Q'+\beta\gamma R'+\alpha\delta S',\\ \rho R &= \alpha cP'+\beta dQ'+\beta cR'+d\alpha S',\\ \rho S &= a\gamma P'+b\delta Q'+b\gamma R'+a\delta S',\end{aligned}\right. \tag{13}$$

où ρ désigne un facteur de proportionnalité. Si l'on considère ces équations comme s'appliquant à deux points quelconques de l'espace, elles définissent une transformation homographique; et, comme elles donnent naissance à l'identité

$$(14)\qquad \rho^2(PQ - RS) = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} (P'Q' - R'S'),$$

on voit immédiatement qu'en prenant pour ρ la valeur donnée par l'équation

$$(15)\qquad \rho^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

la transformation donnée par les équations (13) reproduira le premier membre de l'équation de l'*absolu*. D'ailleurs, sur cette surface elle-même, les paramètres des génératrices aux points correspondants seront liés par les relations (11). Notre analyse se trouve ainsi complétée.

205. Il convient d'expliquer ici une différence qui se présente entre les résultats précédents et ceux que nous avons obtenus au n° 59 pour le cas particulier de la Géométrie Euclidienne, où l'on peut considérer l'*absolu* comme réduit au cercle de l'infini. Nous avons vu qu'alors les transformations cherchées s'obtiennent par la combinaison d'une homothétie et d'un déplacement, qu'elles dépendaient, par conséquent, de *sept* constantes arbitraires. Ici, nous n'avons plus, dans la transformation la plus générale, que *six* constantes arbitraires; mais il faut remarquer qu'en effectuant la transformation homographique qui conserve l'*absolu*, on pourrait changer la valeur de la constante arbitraire qui figure dans l'expression de la distance en fonction du rapport anharmonique.

206. Les résultats que nous venons d'établir nous conduisent à une construction et à une représentation très simple des déplacements dans l'espace Cayleyen. Tous ces déplacements, nous venons de l'établir, s'obtiennent en soumettant à deux substitutions linéaires distinctes les paramètres des deux systèmes de génératrices. Ces deux substitutions linéaires ne peuvent, en même temps, se réduire aux deux substitutions *identiques*

$$\lambda = \lambda', \qquad \mu = \mu';$$

car toute homographie qui ne déplace aucun des points d'une quadrique conserve toutes les droites et se réduit, par conséquent, à la substitution identique. Mais cette circonstance pourra se présenter pour l'un des deux systèmes de génératrices.

Supposons, par exemple, que les formules (11) se réduisent aux suivantes :

$$(16) \qquad \lambda = \lambda' \qquad \mu = \frac{c\mu' + d}{\gamma\mu' + \delta}.$$

Alors aucun point des deux génératrices du second système dont les paramètres sont définis par l'équation

$$(17) \qquad \gamma\mu^2 + (\delta - c)\mu - d = 0,$$

ne sera déplacé. Ainsi, il y aura sur *l'absolu* deux génératrices dont tous les points demeureront immobiles dans le déplacement considéré.

Avant d'étudier plus complètement cette hypothèse, nous allons montrer que le déplacement précédent ne peut être réel que si l'*absolu* est une quadrique imaginaire.

En effet, si le déplacement est réel, les deux génératrices rectilignes qu'il laisse invariables sont nécessairement imaginaires conjuguées. Et comme elles appartiennent au même système, elles n'ont aucun point commun. Donc aucune des deux n'a de point réel. L'*absolu* ne saurait donc être une surface réelle convexe; car, sur une telle surface comme sur la sphère, toute génératrice rectiligne imaginaire contient un point réel, celui où elle est coupée par la génératrice rectiligne imaginaire conjuguée.

Supposons donc que l'*absolu* soit une quadrique imaginaire et que l'on ait pris sur cette surface deux génératrices rectilignes imaginaires conjuguées, nécessairement du même système, d, d_1. Voici comment on définira le déplacement correspondant.

Soit M un point quelconque de l'espace. On peut toujours, par ce point, mener une droite D qui rencontre à la fois d, d_1, et cette droite sera évidemment réelle. Comme elle coupe l'*absolu* en deux points qui demeurent immobiles, elle ne fera que glisser sur elle-même dans le déplacement. Ainsi si M' désigne la nouvelle position de M, M' sera sur la droite D.

Pour achever de définir la relation entre M et M', nous considérerons un autre point quelconque P, dont la nouvelle position

sera P'. Toutes les droites s'appuyant sur MP, sur d et sur d_1 rencontrent évidemment M'P'. Donc MP, M'P', d, d_1 sont quatre génératrices rectilignes d'une même quadrique. Désignons par a, a_1 et b, b_1 les points où les droites MM', PP' rencontrent d et d_1. D'après les propriétés des quadriques réglées, le rapport anharmonique $\mathcal{R}(M', M, a, a_1)$ sera évidemment égal au rapport anharmonique $\mathcal{R}(P', P, b, b_1)$; c'est-à-dire la distance MM' devra être toujours égale à la distance PP' et, par conséquent, sera constante. Il s'agit, bien entendu, des distances relatives à l'*absolu*.

Ainsi, *on peut définir les déplacements considérés en disant que tous les points de l'espace sont déplacés de la même longueur et que la droite réelle qui joint un point à sa position nouvelle va rencontrer deux génératrices fixes de l'absolu, imaginaires conjuguées l'une de l'autre.*

207. On peut rattacher la théorie analytique des déplacements précédents à l'identité célèbre donnée par *Lagrange*, et d'après laquelle le produit de deux sommes de quatre carrés est encore une somme de quatre carrés. Si l'on pose

$$(18)\qquad \begin{cases} X = ax + by + cz + dt, \\ Y = -bx + ay + dz - ct, \\ Z = -cx - dy + az + bt, \\ T = -dx + cy - bz + at, \end{cases}$$

on vérifiera aisément que l'on a

$$(19)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Si donc on suppose que l'on ait

$$(20)\qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

les formules (18) donneront une transformation de la forme quadratique

$$(21)\qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

en elle-même; et l'on verra aisément que cette transformation est de première classe, son déterminant étant égal à 1. Dans le cas qui nous occupe, on peut toujours supposer que l'on ait choisi le tétraèdre de référence de telle manière que l'équation de l'*absolu*

s'obtienne en égalant à zéro la forme (21). Alors, si l'on cherche à reconnaître comment se transforment les génératrices rectilignes de la quadrique, on arrive à cette conséquence singulière que, seules, les génératrices de l'un des systèmes sont déplacées. Définissons, en effet, les paramètres de ces génératrices par les formules

$$(22) \qquad \frac{X - iY}{Z - iT} = A, \qquad \frac{X + iY}{Z - iT} = B, \qquad \frac{x - iy}{z - it} = \alpha, \qquad \frac{x + iy}{z - it} = \beta,$$

on trouve, comme conséquence des équations (18),

$$(23) \qquad A = \alpha, \qquad B = \frac{(a - ib)\beta + c + id}{(-c + id)\beta + a + ib},$$

ce qui démontre la proposition.

Si, au lieu d'employer les formules (18), on eût effectué la substitution définie par les formules très voisines

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= ax + by + cz + dt, \\ Y &= -bx + ay - dz + ct, \\ Z &= -cx + dy + az - bt, \\ T &= -dx - cy + bz + at, \end{aligned} \right.$$

que l'on déduit des précédentes en changeant les signes de Y, y, b, on eût trouvé

$$(25) \qquad B = \beta, \qquad A = \frac{(a + ib)\alpha + c + id}{(-c + id)\alpha + a - ib};$$

de sorte que *l'application successive des formules* (23) *et des précédentes où l'on aura remplacé* a, b, c, d *par* a_1, b_1, c_1, d_1 *donnerait le déplacement le plus général.*

208. Les formules précédentes permettent de vérifier très aisément les propriétés géométriques que, dans le numéro précédent, nous avons assignées aux déplacements considérés. Quel que soit celui des deux systèmes de formules (18) ou (24) que l'on adoptera, on obtiendra les deux identités

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} Xx + Yy + Zz + Tt &= a(x^2 + y^2 + z^2 + t^2), \\ X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \end{aligned} \right.$$

entre les coordonnées d'un point $m\ (x, y, z, t)$ et de sa nouvelle position $M\ (X, Y, Z, T)$.

On aura donc

$$\cos \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{R}} = a. \tag{27}$$

Remarquons que, si la constante a est nulle, les deux points M, m sont conjugués par rapport à l'*absolu*. On obtient alors un de ces déplacements qui joueront plus loin un rôle essentiel dans nos déductions, et dont la répétition ramène tout point de l'espace à sa position primitive.

209. Je ne quitterai pas ce sujet sans rappeler les rapports que l'identité de *Lagrange* présente avec la théorie des quaternions d'*Hamilton*.

On sait que, si l'on convient de tenir compte de l'ordre des facteurs et d'introduire trois unités complexes i, j, k satisfaisant aux relations

$$\left\{\begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j, \end{array}\right. \tag{28}$$

les formules (18) peuvent être remplacées par l'une ou l'autre des identités

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} + i\mathrm{Y} + j\mathrm{Z} + k\mathrm{T} = (a - bi - cj - dk)(x + iy + jz + kt), \\ \mathrm{X} - i\mathrm{Y} - j\mathrm{Z} - k\mathrm{T} = (x - iy - jz - kt)(a + bi + cj + dk), \end{array}\right. \tag{29}$$

De même, les formules (24) sont équivalentes à l'une des identités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} + i\mathrm{Y} + j\mathrm{Z} + k\mathrm{T} = (x + iy + jz + kt)(a - bi - cj - dk), \\ \mathrm{X} - i\mathrm{Y} - j\mathrm{Z} - k\mathrm{T} = (a + bi + cj + dk)(x - iy - jz - kt). \end{array}\right. \tag{30}$$

De là, on déduira aisément que la substitution la plus générale de première classe sera définie par l'identité

$$\begin{aligned} &\mathrm{X} + i\mathrm{Y} + j\mathrm{Z} + k\mathrm{T} \\ &\quad = (a - bi - cj - dk)(x + iy + jz + kt)(a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k) \end{aligned} \tag{31}$$

où les constantes a, ..., a_1, ... devront satisfaire aux conditions

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \qquad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 1. \tag{32}$$

Les formules que l'on obtiendra ne différeront que par la notation de celles (13) que nous avons déjà données au n° 204.

210. Passons maintenant au cas général, où les deux substitutions auxquelles on soumet les génératrices rectilignes de l'*absolu* sont quelconques.

Si le déplacement est réel et si l'*absolu* est une quadrique imaginaire, les deux homographies auxquelles on soumet les génératrices rectilignes de chaque système sont telles que leurs droites doubles sont imaginaires conjuguées. Ainsi, le quadrilatère ABCD formé par les deux couples de droites doubles sera tel que AB et CD, ainsi que AC et BD, seront des droites imaginaires conjuguées. Il suit de là que les points A et C, qui ne sauraient être réels, seront imaginaires conjugués. Il en sera de même évidemment de B et D; par suite, *les diagonales* AC, BD *du quadrilatère* ABCD *formé par les quatre génératrices de l'absolu seront réelles.*

Supposons, au contraire, que, le déplacement restant réel, l'*absolu* soit une quadrique convexe. Alors, les deux droites doubles AB et CD de l'une des homographies ne pourront être imaginaires conjuguées. Ce seront les deux droites doubles AD et BC de l'autre homographie qui seront imaginaires conjuguées des premières. Si AD, par exemple, est imaginaire conjuguée de AB et, par conséquent, CD de CB, les points A et C seront réels et les points B et D imaginaires conjugués. Ainsi, *les diagonales* AC, BD *du quadrilatère* ABCD *seront encore réelles et l'une d'elles rencontrera l'absolu en deux points réels.*

Remarquons que, dans les deux cas et par suite de leur construction, ces deux diagonales sont polaires, l'une de l'autre. Ainsi,

Dans tout déplacement, il existe deux droites D, Δ, *polaires l'une de l'autre par rapport à l'absolu, qui glissent sur elles-mêmes, et ces deux droites sont réelles quand le déplacement est réel.*

Nous les appellerons les *axes du déplacement*.

Pour achever de définir le déplacement quand les deux droites D, Δ sont données, nous raisonnerons comme il suit.

Soit M un point de la droite D, par exemple; le déplacement l'amènera en un autre point M' de D; et, par conséquent, M' se déduira de M par une homographie. Les points doubles de cette homographie sont évidemment ceux, A et C par exemple, où la droite D rencontre l'*absolu*. Par suite, le rapport anharmonique

$\mathcal{R}(M', M, A, B)$ demeurera constant. C'est dire que la distance MM', évaluée par rapport à l'*absolu*, demeurera constante.

Ainsi, *sur chacune des droites* D, Δ, *le déplacement aura pour effet de déplacer les points d'une quantité constante, qui ne sera pas nécessairement la même pour les deux droites.*

Nous sommes maintenant en mesure d'indiquer comment on pourra construire la nouvelle position P' que le déplacement donne à un point quelconque P de l'espace.

On mènera par le point P la droite d qui rencontre à la fois D, Δ et, par conséquent, leur est perpendiculaire. Soient m et μ ses points d'intersection avec D et Δ. La nouvelle position m' de m s'obtiendra en portant sur D une longueur constante a; de même la nouvelle position μ' de μ s'obtiendra en portant sur Δ une longueur constante α, et $m'\mu'$ sera la nouvelle position d' de la droite d. Pour obtenir la nouvelle position P' de P, il suffira de porter sur d', à partir de m', une longueur $m'P'$ égale à mP.

On peut énoncer cette construction de manière à mettre mieux en évidence l'analogie avec la Géométrie ordinaire. On peut passer de $m\mu$ à $m'\mu'$ en prenant comme intermédiaire la droite $m'\mu$. Alors, dans le passage de $m\mu$ à $m'\mu$, le point μ demeurera immobile et mm' sera égal à a. Dans le passage de $m'\mu$ à $m'\mu'$, le point m' demeurera immobile et $\mu\mu'$ sera égal à α. Ce sera comme si la droite $m'\mu$ avait tourné d'un angle constant proportionnel à α, dans un plan perpendiculaire à D.

Si l'*absolu* se réduit au cercle de l'infini, le premier déplacement de $m\mu$ à $m'\mu$ devient la translation le long de l'axe d'un déplacement hélicoïdal, le second se réduit à une rotation autour de cet axe.

211. Quoi qu'il en soit, la construction précédente nous conduit à une classification très simple des déplacements. Si les constantes a, α ne sont pas nulles, tous les points de l'espace seront déplacés, sauf ceux où les axes D, Δ coupent l'*absolu*; car la droite $m\mu$, qui contient le point P, est remplacée par la droite $m'\mu'$, qui n'a aucun point commun avec elle. Donc P' ne peut se confondre avec P. Le déplacement correspondant sera dit *hélicoïdal*.

Si une seule des constantes a, α est nulle, a par exemple, tous les points de la droite D demeureront immobiles. Nous dirons que le déplacement est une *rotation* autour de D.

Enfin, si les constantes a, α sont nulles toutes les deux, tous les points de D, Δ, toutes les droites telles que $m\mu$, seront conservés par le déplacement. Pour construire le point P′ correspondant au point P de $m\mu$, on remarquera que P, P′ se correspondent dans une homographie dont les points doubles sont m, μ et dont un couple de points correspondants est fourni par ceux p et p' où la droite $m\mu$ rencontre l'*absolu*. Or p, p' sont conjugués harmoniques par rapport au segment $m\mu$; il en sera donc de même de P, P′. Ainsi,

Le déplacement qui correspond au cas où a, α sont nulles s'obtient en prenant deux droites fixes D, Δ *polaires réciproques l'une de l'autre et en construisant le conjugué harmonique* P′ *d'un point quelconque* P *par rapport au segment déterminé par les axes* D, Δ *sur la droite qui passe par* P *et rencontre ces deux axes.*

Nous avons ici un exemple nouveau, et plus général, de ces déplacements dont la répétition ramène toute figure à sa position primitive. Nous leur donnerons le nom de *retournements*.

En résumé, nous avons trois espèces de déplacements, pouvant tous être réels :

1° Les *déplacements hélicoïdaux* dans lesquels restent seuls immobiles quatre points de l'*absolu*. Les diagonales D, Δ du quadrilatère formé par ces quatre points sont polaires l'une de l'autre. Ce sont, avec les côtés du quadrilatère, les seules droites qui glissent sur elles-mêmes dans le déplacement. Si l'*absolu* est une surface convexe, et si le déplacement est réel, deux des quatre points sont réels.

2° Les *rotations*, pour lesquelles tous les points de l'un des axes D, Δ sont immobiles.

3° Les *retournements*, pour lesquels demeurent immobiles tous les points des axes D, Δ.

Il est à remarquer que, pour être entièrement exacts, ces énoncés doivent exclure les déplacements que nous avons étudiés aux n°s 206 à 209. Nous avons vu, en effet, qu'une des propriétés caractéristiques de ces déplacements est de faire glisser sur elles-mêmes une double infinité de droites, toutes celles qui rencontrent deux

génératrices imaginaires conjuguées de l'*absolu*, choisies arbitrairement. Pour distinguer de ceux qui précèdent ces déplacements, qui, nous l'avons vu, ne sont jamais réels quand l'*absolu* est une quadrique réelle convexe, nous les appellerons des *déplacements Riemanniens*.

212. On peut définir analytiquement, et de la manière la plus simple, tous les déplacements que nous venons d'envisager.

Dans le cas, le plus général, où aucun des deux systèmes de génératrices rectilignes de l'absolu ne reste invariable dans le déplacement, nous prendrons pour tétraèdre de référence celui ABCD qui a été défini plus haut et dont les arêtes AB, BC, CD, DA appartiennent à l'*absolu*, tandis que les deux autres arêtes AC, BD sont polaires réciproques, l'une de l'autre, par rapport à cette surface. Si l'un des systèmes de génératrices n'est pas déplacé par la transformation, il suffira de prendre *arbitrairement*, dans ce système, deux génératrices imaginaires conjuguées, de les associer aux deux génératrices de l'autre système qui sont le lieu des points laissés invariables par le déplacement, et l'on aura ainsi constitué un tétraèdre ABCD ayant exactement les mêmes propriétés que le précédent.

L'équation de l'*absolu*, rapportée à ce tétraèdre, sera évidemment de la forme

$$xy + zt = 0. \tag{33}$$

Si cet *absolu* est imaginaire, on pourra supposer que les coordonnées x, y soient, comme z et t, imaginaires conjuguées. Si c'est une surface réelle convexe, x et y seules seront imaginaires conjuguées, z et t seront réelles.

Le déplacement devant conserver les sommets du tétraèdre, les équations qui le déterminent seront de la forme

$$x' = ax, \qquad y' = by, \qquad z' = cz, \qquad t' = dt;$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques; et, pour que le premier membre de l'équation (33) se reproduise, il faudra que l'on ait

$$ab = cd = 1.$$

On pourra donc écrire les formules qui définissent le déplace-

ment sous la forme

$$(34) \qquad x' = hx, \qquad y' = \frac{1}{h}y, \qquad z' = kz, \qquad t' = \frac{1}{k}t.$$

Commençons par chercher les points qui demeurent immobiles dans le déplacement. Il faut, pour cela, écrire que l'on a

$$(35) \qquad x' = \rho x, \qquad y' = \rho y, \qquad z' = \rho z, \qquad t' = \rho t,$$

ρ étant une inconnue à déterminer. En portant ces valeurs de x', y', z', t' dans les formules (34), on a les relations

$$(36) \quad (\rho - h)x = 0, \quad \left(\rho - \frac{1}{h}\right)y = 0, \quad (\rho - k)z = 0, \quad \left(\rho - \frac{1}{k}\right)t = 0,$$

qui conduisent nécessairement à l'équation

$$(37) \qquad (\rho - h)\left(\rho - \frac{1}{h}\right)(\rho - k)\left(\rho - \frac{1}{k}\right) = 0.$$

Supposons d'abord que les quatre racines de cette équation soient distinctes. Alors, en égalant ρ à l'une d'elles, on trouvera l'un des sommets du tétraèdre; de sorte que, dans ce cas, les sommets du tétraèdre seront les seuls points qui resteront immobiles. Le déplacement obtenu sera celui que nous avons appelé ***hélicoïdal***.

Supposons maintenant que deux au moins des racines de l'équation (37) soient égales. Si l'on a

$$h = \frac{1}{h}, \qquad h^2 = 1,$$

on pourra supposer $h = 1$. Et si l'inégalité suivante :

$$k^2 - 1 \neq 0,$$

est vérifiée, les deux autres racines de l'équation (37) seront distinctes. A l'hypothèse $\rho = 1$ correspondent tous les points de la droite

$$z = 0, \qquad t = 0;$$

aux deux autres racines correspondent seulement les sommets du tétraèdre qui sont situés sur l'arête opposée et sont définis par les équations

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad zt = 0.$$

Le déplacement sera alors une *rotation*. Il sera défini par les formules

$$(38) \qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = kz, \qquad t' = \frac{1}{k} t.$$

Si, h étant égal à 1, on a $k^2 - 1 = 0$, il faudra supposer $k = -1$; sans cela, on aurait la substitution identique. Les formules qui définiront le déplacement seront

$$(39) \qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = -z, \qquad t' = -t.$$

Ce sera un *retournement;* car il laissera invariable tous les points des deux arêtes du tétraèdre qui n'appartiennent pas à l'*absolu*.

Une dernière hypothèse reste à envisager : c'est celle où h serait égale à une des racines $k, \frac{1}{k}$. On pourra supposer

$$h = k.$$

Alors les formules qui définissent le déplacement seront

$$(40) \qquad x' = hx, \qquad y' = \frac{1}{h} y, \qquad z' = hz, \qquad t' = \frac{1}{h} t.$$

Celui-ci laissera invariables les deux génératrices rectilignes de l'*absolu* définies respectivement par les équations

$$x = z = 0 \quad \text{et} \quad y = t = 0.$$

Ce sera un *déplacement Riemannien*. Il sera réel si h est une imaginaire de module égal à 1.

On peut reconnaître aussi dans quel cas il se réduira à un retournement. Sa répétition conduit, en effet, aux formules

$$x'' = h^2 x, \qquad y'' = \frac{1}{h^2} y, \qquad z'' = h^2 z, \qquad t'' = \frac{1}{h^2} t.$$

Pour que x'', y'', z'', t'' soient proportionnels à x, y, z, t, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$h^2 = -1.$$

On sera alors conduit aux formules

$$(41) \qquad x' = ix, \qquad y' = -iy, \qquad z' = iz, \qquad t' = -it,$$

qui définissent le *retournement Riemannien*.

213. On se rendra mieux compte des propriétés des déplacements particuliers et des différences qui les séparent si l'on suppose qu'on répète chacun d'eux un certain nombre de fois.

Prenons d'abord les formules générales

$$(42) \qquad x' = hx, \qquad y' = \frac{1}{h}y, \qquad z' = kz, \qquad t' = \frac{1}{k}t.$$

Si nous répétons n fois le déplacement, nous aurons les formules

$$(43) \qquad x_n = h^n x, \qquad y_n = \frac{1}{h^n}y, \qquad z_n = k^n z, \qquad t_n = \frac{1}{k^n}t.$$

Au lieu d'y considérer n comme un entier, supposons que ce soit un paramètre variable pouvant prendre toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$. Pour $n = 0$, nous obtiendrons la position primitive de toute figure. Quand n variera d'une manière continue, nous aurons un déplacement, qui sera continu aussi, de la figure primitive.

Dans ce déplacement continu, on aura toujours

$$\frac{x_n y_n}{z_n t_n} = \frac{xy}{zt};$$

et, d'après les développements donnés au n° 197, cette équation exprime que le point mobile demeurera sur une surface lieu des points qui sont à une distance invariable de l'un quelconque des deux axes. Nous donnerons à de telles surfaces le nom de *pseudo-cylindres*. Sur cette surface, le point mobile décrira une courbe transcendante, analogue aux hélices de la Géométrie ordinaire. Si l'*absolu* est imaginaire, x, y, ainsi que z, t, étant imaginaires conjuguées, la trajectoire sera définie d'une manière réelle par des équations telles que les suivantes :

$$(44) \qquad x = e^{in\alpha}x_0, \qquad y = e^{-in\alpha}y_0, \qquad z = e^{in\beta}z_0, \qquad t = e^{-in\beta}t_0.$$

Si l'*absolu* est une surface réelle convexe, on pourra prendre

$$(45) \qquad x = e^{in\alpha}x_0, \qquad y = e^{-in\alpha}y_0, \qquad z = k^n z_0, \qquad t = k^{-n} t_0.$$

Dans le cas où le déplacement se réduira à une rotation, il faudra faire $h = 1$, et la trajectoire transcendante se réduira à une

conique plane définie par les deux équations

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{x_n y_n}{z_n t_n} = \frac{xy}{zt}.$$

Cette conique, dont le plan passera par la polaire de l'axe de rotation, est l'analogue du cercle dans la Géométrie ordinaire. Elle est, dans son plan, le lieu des points qui sont à une distance constante de l'axe de rotation ou, ce qui revient au même, du point où cet axe perce le plan de la courbe; elle est doublement tangente à l'*absolu*.

Si l'on a $h = 1$, $k = -1$, le déplacement se réduit à un retournement, et il n'y a plus lieu de parler de mouvement continu.

Enfin, si l'on a $h = k$, on obtient un déplacement Riemannien, et la trajectoire se réduit à la droite définie par les deux équations

$$\frac{x_n}{z_n} = \frac{x}{z}, \qquad \frac{y_n}{t_n} = \frac{y}{t},$$

comme nous l'avons déjà montré directement au n°.206.

214. Après avoir indiqué la définition et les propriétés des déplacements dans l'espace Cayleyen, nous allons montrer comment la proposition fondamentale du n° 211 relative à ces déplacements permet de les représenter à l'aide des plus simples d'entre eux. Nous nous appuierons à cet effet sur le lemme suivant :

Toute transformation homographique peut être remplacée, d'une infinité de manières, par deux transformations involutives.

Nous avons déjà obtenu cette proposition sous forme géométrique au n° 83; mais on peut aussi la démontrer très simplement par l'analyse.

Soit

$$\frac{\lambda - a}{\lambda - b} = h\,\frac{\lambda' - a}{\lambda' - b}$$

la formule qui définit une transformation homographique, les éléments doubles a et b y étant mis en évidence. On peut évidemment la remplacer par les deux suivantes :

$$\frac{\lambda - a}{\lambda - b}\,\frac{\lambda_1 - a}{\lambda_1 - b} = k, \qquad \frac{\lambda_1 - a}{\lambda_1 - b}\,\frac{\lambda' - a}{\lambda' - b} = \frac{k}{h},$$

qui sont toutes deux involutives et contiennent l'arbitraire k.

Si les deux points doubles sont confondus, le résultat sera le même. La relation homographique sera de la forme

$$\frac{1}{\lambda - a} = \frac{1}{\lambda' - a} + h,$$

et elle pourra être remplacée par les deux *involutions*

$$\frac{1}{\lambda - a} + \frac{1}{\lambda_1 - a} = k, \qquad \frac{1}{\lambda_1 - a} + \frac{1}{\lambda' - a} = k - h,$$

où k est encore arbitraire.

Enfin, si la relation homographique se réduit à l'identité

$$\lambda = \lambda',$$

il suffira, pour la remplacer, d'appliquer deux fois successivement une involution, d'ailleurs quelconque.

Il n'est pas difficile de démontrer que, dans chaque cas, la suite de deux involutions que l'on substitue à l'homographie est la plus générale que l'on puisse obtenir.

Supposons, par exemple, que les deux éléments doubles de l'homographie soient distincts, et désignons-les, comme nous l'avons fait, par a et b. La première involution substituera à a et b deux éléments a', b'; la seconde devra ramener a' en a et b' en b. Si donc les couples a, a' et b, b' étaient distincts, la première et la seconde involution ne sauraient être distinctes, ce qui est inadmissible. Il faut donc que a' coïncide avec b et b' avec a. Ainsi, les deux involutions successives doivent échanger, l'un dans l'autre, les éléments doubles de l'homographie. C'est ce que montrent les formules données plus haut.

215. De la proposition précédente il résulte que les deux transformations homographiques auxquelles doivent être soumises les génératrices rectilignes de la quadrique peuvent chacune, et d'une infinité de manières, être remplacées par un couple d'involutions; en sorte que le déplacement le plus général résultera, d'une infinité de manières, de la composition de deux déplacements caractérisés, l'un et l'autre, par la propriété de soumettre à une involution les génératrices rectilignes de chaque système. Ces déplacements ont donc la propriété *caractéristique* de ramener

la figure à sa position primitive, si on les effectue deux fois successivement. *Ce sont des retournements.*

On peut les définir comme il suit. Gardons toutes les notations précédentes; désignons par A, B, C, D les sommets du tétraèdre de référence. Les déplacements élémentaires que nous avons à considérer s'obtiennent en soumettant les génératrices rectilignes des deux systèmes à deux involutions : l'une, dans laquelle AB est remplacée par CD; l'autre, dans laquelle AD est remplacée par BC. Le retournement qui en résulte échange donc A et C, B et D. Donc, d'après les propriétés déjà établies, les deux axes de ce retournement doivent diviser harmoniquement les deux axes AC et BD du déplacement primitif. Ce sont deux droites, polaires l'une de l'autre, perpendiculaires à AC et à BD. Ainsi,

Tout déplacement résulte, d'une infinité de manières, de la composition de deux retournements dont les axes sont des perpendiculaires communes aux deux axes de ce déplacement.

216. On pourrait construire et définir complètement par la Géométrie les deux retournements composants. Nous préférons la méthode analytique suivante.

Reprenons les formules

$$(46) \qquad x' = hx, \qquad y' = \frac{1}{h}y, \qquad z' = kz, \qquad t' = \frac{1}{k}t,$$

qui définissent le déplacement le plus général. Elles peuvent évidemment être remplacées par les suivantes :

$$(47) \qquad x_1 = ay, \qquad y_1 = \frac{1}{a}x, \qquad z_1 = bt, \qquad t_1 = \frac{1}{b}z,$$

$$(48) \qquad x' = a_1 y_1, \qquad y' = \frac{1}{a_1}x_1, \qquad z' = b_1 t_1, \qquad t' = \frac{1}{b_1}t,$$

pourvu que l'on ait

$$(49) \qquad \frac{a_1}{a} = h, \qquad \frac{b_1}{b} = k.$$

Les formules (47) et (48) sont toutes semblables, et il est aisé d'établir qu'elles définissent, les unes et les autres, un retournement.

Considérons, par exemple, les premières. Comme elles en-

traînent les relations

$$x_1 y_1 = xy, \qquad z_1 t_1 = zt,$$

on voit immédiatement qu'elles conservent l'*absolu* et, par conséquent, définissent un déplacement. Comme elles laissent invariables tous les points des deux droites

$$(50) \qquad x - ay = 0, \qquad z - bt = 0$$

et

$$(51) \qquad x + ay = 0, \qquad z + bt = 0,$$

on reconnaît que ce déplacement est un retournement, dont les deux axes sont donnés par les équations précédentes.

Ces deux axes, qui sont des droites polaires l'une de l'autre, rencontrent les deux axes du déplacement considéré et leur sont, par suite, perpendiculaires.

Les formules (48) définissent un retournement de même nature dont les axes sont donnés par les équations

$$(52) \qquad x - a_1 y = 0, \qquad z - b_1 t = 0$$

et

$$(53) \qquad x + a_1 y = 0, \qquad z + b_1 t = 0.$$

Ainsi, nous retrouvons le théorème fondamental et nous voyons, de plus, comment on pourra construire les deux retournements dont la composition reproduit un déplacement donné.

217. Ce théorème fondamental est analogue à celui que l'on connaît depuis longtemps dans la Géométrie Euclidienne, et il donnera lieu aux mêmes conséquences ([1]). On verra, par exemple, que tout déplacement peut être remplacé d'une infinité de manières par deux rotations; on saura composer deux déplacements hélicoïdaux, etc. Nous laisserons tous ces points à l'examen du lecteur.

([1]) *Voir*, par exemple, dans les *Leçons de Cinématique professées à la Sorbonne*, de M. Gabriel Kœnigs, une Note de l'Auteur *Sur les renversements et les inversions planes*, p. 346.

CHAPITRE III.

LA TRIGONOMÉTRIE CAYLEYENNE.

Les propositions relatives au déplacement montrent immédiatement que, dans la Géométrie Cayleyenne comme dans la Géométrie ordinaire, il y a trois relations nécessaires entre les six éléments d'un triangle. — Recherche de ces relations. Elles sont les mêmes que celles qui existent entre les éléments d'un triangle sur une sphère dont le rayon est réel ou est une imaginaire pure. — Au contraire, les relations entre les six éléments d'un trièdre sont les mêmes que dans la Géométrie Euclidienne. — Application de la théorie des déplacements à la définition du volume dans la nouvelle Géométrie. — Si l'*absolu* est imaginaire, le volume total de l'espace est fini. — Définition de l'aire. Aire d'un triangle rectiligne quelconque. Son expression en fonction des angles du triangle. — Propriété des sphères Cayleyennes. Sur une telle sphère, la trigonométrie est la même que sur une sphère Euclidienne de rayon convenablement choisi. — Système triple orthogonal analogue à celui qui sert à définir les coordonnées polaires. — La ligne droite, comme dans la Géométrie ordinaire, est le plus court chemin d'un point à un autre. — Des trois sortes de sphères qui se présentent dans la Géométrie non Euclidienne. — Étude particulière des *horisphères*, c'est-à-dire de celles qui ont leur centre sur l'*absolu*. — Application à la classification des déplacements réels que l'on peut utiliser dans l'espace non Euclidien. — Équations qui déterminent les trajectoires des différents points. — Système triple orthogonal comprenant deux familles de plans perpendiculaires et une famille de surfaces pseudocylindriques ayant toutes le même axe.

---

218. Les propositions relatives aux déplacements, que nous venons d'établir dans le Chapitre précédent, jouent un rôle fondamental dans la Géométrie Cayleyenne, et nous en déduirons de nombreuses conséquences. Elles nous montrent tout d'abord que, dans cette Géométrie comme dans la Géométrie ordinaire, *il y aura une Trigonométrie*, c'est-à-dire qu'il existera trois relations nécessaires entre les côtés et les angles d'un triangle plan. Ces six éléments dépendent bien de neuf quantités, les coordonnées des trois sommets. Mais, comme on pourra déplacer le triangle, on pourra réduire à zéro six de ces coordonnées; en sorte que les éléments ne dépendront plus que de trois paramètres et devront être liés, par suite, par trois relations. Si, par exemple, on prend pour tétraèdre de référence celui qui est formé par les som-

mets A, B, C du triangle considéré et le pôle D de son plan par rapport à l'*absolu*, l'équation de cette quadrique pourra être ramenée à la forme

$$x^2+y^2+z^2\pm t^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0,$$

et les six éléments s'exprimeront d'une manière très simple en fonction de B, B', B''.

Comme ces expressions contiennent des radicaux affectés de signes, elles présenteront quelque ambiguïté. On peut faire disparaître toute difficulté de la manière suivante.

219. Commençons par supposer que l'*absolu* soit une quadrique imaginaire, et considérons un triangle ABC dont nous désignerons, suivant l'usage, les côtés par a, b, c et les angles par A, B, C. Les formules données aux nos 182 et 183 nous permettront d'écrire les relations

$$\cos\frac{a}{R}=\frac{(BC)}{\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}}, \tag{1}$$

$$\sin\frac{a}{R}=\frac{\sqrt{(BB)(CC)-(BC)^2}}{\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}}, \tag{2}$$

$$\cos A=\frac{(AA)(BC)-(AB)(AC)}{\sqrt{(AA)(BB)-(AB)^2}\sqrt{(AA)(CC)-(AC)^2}}; \tag{3}$$

d'où l'on déduira

$$\sin A=\frac{\sqrt{(AA)}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AA)(BB)-(AB)^2}\sqrt{(AA)(CC)-(AC)^2}}, \tag{4}$$

Δ ayant pour valeur

$$\Delta=\begin{vmatrix}(AA) & (AB) & (AC)\\ (AB) & (BB) & (BC)\\ (AC) & (BC) & (CC)\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Si nous effectuons des permutations circulaires sur A, B, C, nous obtiendrons, par des formules toutes semblables, les lignes trigonométriques de $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, B et C. *Convenons que, dant toutes les formules, les radicaux* $\sqrt{(AA)}$, $\sqrt{(BB)}$, $\sqrt{(CC)}$, $\sqrt{(AA)(BB)-(AB)^2}$, $\sqrt{(AA)(CC)-(AC)^2}$, $\sqrt{(BB)(CC)-(BC)^2}$, $\sqrt{\Delta}$ *seront pris partout avec la même détermination.* Alors la formule (3) pourra

s'écrire

$$\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A = \cos\frac{a}{R} - \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R},$$

et de là on déduira, par des permutations circulaires, le système

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos\dfrac{a}{R} = \cos\dfrac{b}{R}\cos\dfrac{c}{R} + \sin\dfrac{b}{R}\sin\dfrac{c}{R}\cos A, \\ \cos\dfrac{b}{R} = \cos\dfrac{c}{R}\cos\dfrac{a}{R} + \sin\dfrac{c}{R}\sin\dfrac{a}{R}\cos B, \\ \cos\dfrac{c}{R} = \cos\dfrac{a}{R}\cos\dfrac{b}{R} + \sin\dfrac{a}{R}\sin\dfrac{b}{R}\cos C. \end{cases}$$

De même, l'équation (4) pourra s'écrire

$$(7)\qquad \sin A \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AA)}\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}}$$

et nous conduira à la proportion des sinus

$$(8)\qquad \frac{\sin A}{\sin\dfrac{a}{R}} = \frac{\sin B}{\sin\dfrac{b}{R}} = \frac{\sin C}{\sin\dfrac{c}{R}}.$$

Nous retrouvons les formules de la Trigonométrie sphérique sur une sphère de rayon R.

S'il s'agit d'un triangle réel, en prenant pour les radicaux tels que $\sqrt{(BB)(CC)-(BC)^2}$ des signes convenables, on pourra obtenir des valeurs positives de $\sin\frac{a}{R}$, $\sin\frac{b}{R}$, $\sin\frac{c}{R}$, et de même, en choisissant une détermination convenable de $\sqrt{\Delta}$, on obtiendra des valeurs positives de $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$. On pourra donc prendre pour les six éléments A, B, C, $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ des valeurs comprises entre o et π.

220. Si l'on suppose maintenant que l'*absolu* soit une quadrique réelle convexe, il suffira de changer quelques signes. On pourra prendre

$$(9)\qquad \cos\frac{a}{Ri} = \frac{(BC)}{\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}},$$

$$(10)\qquad i\sin\frac{a}{Ri} = \frac{\sqrt{(BC)^2-(BB)(CC)}}{\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}}$$

et

$$(11) \qquad \cos A = \frac{(AB)(AC) - (AA)(BC)}{\sqrt{(AB)^2 - (AA)(BB)}\sqrt{(AC)^2 - (AA)(CC)}},$$

$$(12) \qquad \sin A = \frac{\sqrt{(AA)}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AB)^2 - (AA)(BB)}\sqrt{(AC)^2 - (AA)(CC)}},$$

Δ ayant la valeur donnée par la formule (5); en sorte que, si l'on prend partout les radicaux avec la même détermination, on retrouvera les formules (6) et (8), où R aura été remplacé par Ri, c'est-à-dire

$$(13) \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\frac{a}{Ri} = \cos\frac{b}{Ri}\cos\frac{c}{Ri} + \sin\frac{b}{Ri}\sin\frac{c}{Ri}\cos A, \\ \cos\frac{b}{Ri} = \cos\frac{c}{Ri}\cos\frac{a}{Ri} + \sin\frac{c}{Ri}\sin\frac{a}{Ri}\cos B, \\ \cos\frac{c}{Ri} = \cos\frac{a}{Ri}\cos\frac{b}{Ri} + \sin\frac{a}{Ri}\sin\frac{b}{Ri}\cos C \end{array}\right.$$

et

$$(14) \qquad \frac{\sin A}{\sin\frac{a}{Ri}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{Ri}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{Ri}}.$$

Si le triangle ABC est réel et dans l'espace accessible, on pourra prendre l'équation de l'*absolu* de telle manière que (AA), (BB), (CC) soient positifs. On verra facilement que les expressions telles que (BC) le sont aussi. Car le signe de (BC), par exemple, ne saurait changer lorsque B et C se déplacent en restant à l'intérieur, puisqu'alors ces points ne deviennent jamais conjugués l'un de l'autre, et ce signe est positif lorsque B se confond avec C.

Un raisonnement analogue montre que les expressions telles que $(BC)^2 - (BB)(CC)$ demeureront positives. Si donc on prend tous les radicaux avec le signe +, on obtiendra pour $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ des valeurs positives, et l'on pourra prendre, pour les angles A, B, C, des valeurs comprises entre o et π.

221. Il y a une autre manière d'obtenir les résultats précédents. Soit

$$f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation de l'*absolu*. On peut toujours choisir la fonction f de

telle manière qu'elle soit positive, pour tout point de l'espace, si l'*absolu* est imaginaire; pour tout point situé dans l'espace accessible, si l'*absolu* est une quadrique réelle convexe. Alors, on pourra choisir les coordonnées homogènes de tout point *hors de l'absolu* de telle manière que l'on ait

$$f(x, y, z, t) = 1. \tag{15}$$

Chaque point hors de l'*absolu* sera en quelque sorte dédoublé et aura deux systèmes de coordonnées (x, y, z, t) et $(-x, -y, -z, -t)$. Ce dédoublement sera réalisé d'une manière effective par une substitution que nous étudierons plus loin (Livre V, Chap. VII). Mais, dès à présent, nous pouvons convenir de prendre partout

$$\sqrt{f(x, y, z, t)} = 1 \tag{16}$$

et la formule donnant le cosinus de l'angle de deux plans ne présentera plus aucune ambiguïté. Pour plus de netteté, bornons-nous au cas où l'*absolu* est imaginaire, et remarquons d'abord que la recherche des relations entre les éléments d'un triangle est une question de Géométrie plane; car si l'on prend la section (Γ) de l'*absolu* par le plan du triangle, on pourra évidemment substituer cette conique (Γ) à l'*absolu* dans la définition des éléments.

D'après cela, choisissons pour triangle de référence un triangle conjugué par rapport à la conique imaginaire (Γ). L'équation de cette conique pourra être mise sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{17}$$

et, si l'on a choisi les coordonnées des trois sommets A, B, C du triangle de telle manière qu'elles satisfassent à la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

la définition des éléments du triangle sera la même que si les points A, B, C étaient sur une sphère de rayon R. On voit donc *a priori* que les relations entre ces éléments doivent être celles de la Trigonométrie sphérique.

Des considérations analogues, mais un peu moins simples, s'appliqueraient dans le cas où l'*absolu* serait une quadrique réelle convexe.

222. Les méthodes précédentes conduisent à un résultat qu'il faut mettre en évidence.

Dans les deux Géométries que nous avons considérées, les relations entre les six éléments d'un trièdre sont les mêmes que dans la Géométrie Euclidienne, ce trièdre étant quelconque si l'absolu est imaginaire, et ayant son sommet dans l'espace accessible si l'absolu est une quadrique réelle et convexe.

Rapportons, en effet, l'*absolu* à un tétraèdre conjugué dont l'un des sommets sera le sommet S du trièdre. Dans l'un et l'autre cas, l'équation de l'*absolu* prendra l'une des deux formes

$$\pm t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Les arêtes du trièdre percent le plan polaire du sommet de ce trièdre en trois points A, B, C pour lesquels t sera nulle et dont on pourra choisir les autres coordonnées de telle manière qu'elles satisfassent à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Alors, on pourra faire correspondre aux trois points A, B, C trois points A′, B′, C′ d'une sphère de rayon 1 ayant pour coordonnées rectangulaires les coordonnées homogènes des points A, B, C; et l'on verra aisément que les éléments du trièdre se calculent par les mêmes formules que ceux du triangle sphérique A′B′C′. Notre proposition est ainsi démontrée. Nous l'obtiendrons plus loin par une autre méthode.

223. Nous n'insisterons pas davantage sur ces recherches trigonométriques; la Géométrie analytique a des méthodes qui lui sont propres et qui sont moins étroites que celles de la Trigonométrie. Nous indiquerons donc d'autres conséquences de notre théorie des déplacements.

Nous ferons remarquer tout d'abord que leur emploi permet d'étendre à la Géométrie Cayleyenne certaines notions, par exemple celle de volume d'un solide ou d'aire d'une surface. Dans la Géométrie ordinaire, l'élément de volume peut être caractérisé par cette propriété essentielle qu'il ne change pas lorsqu'on effectue le déplacement le plus général. Adoptons, ici encore, cette définition.

Prenons l'équation de l'*absolu* sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0. \tag{18}$$

Toute intégrale triple sera de la forme

$$V = \int\int\int \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{19}$$

et nous aurons à déterminer φ par la condition que cette intégrale demeure inaltérée si l'on effectue l'une quelconque des substitutions homographiques qui conservent l'*absolu*.

Considérons d'abord celles de ces substitutions qui sont entières et reproduisent $x^2 + y^2 + z^2$. Elles sont de la forme

$$x = ax' + by' + cz', \qquad y = a'x' + b'y' + c'z', \qquad z = a''x' + b''y' + c''z';$$

et comme leur déterminant est l'unité, elles transforment l'intégrale triple V dans la suivante :

$$\int\int\int \varphi\left(ax' + by' + cz',\ a'x' + b'y' + c'z',\ a''x' + b''y' + c''z'\right) dx'\, dy'\, dz'.$$

Pour que V se reproduise, il faudra donc que la fonction φ ne dépende que de $x^2 + y^2 + z^2$. Ainsi on pourra mettre V sous la forme

$$V = \int\int\int F(1 + x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Faisons maintenant la substitution

$$x = \frac{x'}{z'}, \qquad y = \frac{y'}{z'}, \qquad z = -\frac{1}{z'}, \tag{20}$$

qui, elle aussi, conserve l'*absolu*. L'intégrale V deviendra

$$V = \int\int\int F\left(\frac{1 + x'^2 + y'^2 + z'^2}{z'^2}\right) \frac{dx'\, dy'\, dz'}{z'^4}$$

et, d'après ce que nous avons vu, elle devra être indépendante de z'. Il faudra donc que l'on ait

$$F(u) = \frac{C}{u^2},$$

C désignant une constante. Le volume sera donc défini par une intégrale telle que la suivante :

$$V = C\int\int\int \frac{dx\, dy\, dz}{f^2(x, y, z, 1)}, \tag{21}$$

l'équation homogène de l'*absolu* étant

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{22}$$

Si l'*absolu* était une surface réelle, la substitution (20) ne le serait pas; mais il est aisé de la remplacer par une autre substitution fractionnaire qui conduirait au même résultat.

Pour déterminer la constante C, on a le choix entre diverses conventions. Par exemple, on peut demander que l'élément de l'intégrale V devienne celui de la Géométrie ordinaire quand la Géométrie Cayleyenne se réduit à la Géométrie ordinaire suivant les hypothèses du n° 185. Cette hypothèse conduit à la valeur

$$C = K^3$$

que nous allons obtenir par d'autres considérations.

224. Au n° **182**, nous avons vu que l'élément linéaire de l'espace peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = K^2 \frac{f(x, x) f(dx, dx) - f^2(x, dx)}{f^2(x, x)}. \tag{23}$$

Faisons-y $t = 1$; nous aurons une forme quadratique des différentielles dx, dy, dz

$$ds^2 = A\,dx^2 + A'\,dy^2 + A''\,dz^2 + 2B\,dy\,dz + 2B'\,dx\,dz + 2B''\,dx\,dy. \tag{24}$$

Or, on sait que, lorsqu'on fait un changement de variables *quelconque*, l'intégrale triple

$$V = \int\int\int \Delta\,dx\,dy\,dz, \tag{25}$$

où l'on a

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \tag{26}$$

demeure invariable. Il en sera de même, à plus forte raison, si l'on effectue seulement les substitutions linéaires qui conservent l'*absolu*.

On peut calculer Δ. En employant les déterminants, on trouve

$$\Delta = \frac{K^6}{f^4} H, \tag{27}$$

H étant le Hessien de $f(x, y, z, t)$. On aura donc

$$V = K^3\sqrt{H}\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{f^2(x, y, z, 1)}. \tag{28}$$

Si l'*absolu* est imaginaire, H sera positif et K réel. Si, au contraire, l'*absolu* est réel et non réglé, H sera négatif et K deviendra une imaginaire pure.

Nous retrouvons ainsi, avec un léger changement de notations, l'expression du volume donnée par la formule (21).

Appliquons la formule au premier cas, en prenant l'équation de l'*absolu* sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0. \tag{29}$$

Il viendra

$$V = R^3\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}. \tag{30}$$

Si l'on emploie la substitution classique

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = \rho \cos\theta, \tag{31}$$

la valeur de V prendra la forme

$$V = R^3\int\int\int\frac{\rho^2\,d\rho\,d\theta\,d\varphi}{(1 + \rho^2)^2}.$$

Étendons cette intégration à tout l'espace, il faudra faire varier θ de 0 à π, φ de 0 à 2π et ρ de 0 à ∞. Le volume total de l'espace sera

$$\frac{1}{2}\pi^3 R^3.$$

Il sera donc fini.

Si, au contraire, l'*absolu* est une surface réelle, dont on pourra mettre l'équation sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0, \tag{32}$$

il faudra remplacer K par Ri, et l'expression du volume deviendra

$$V = R^3\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}. \tag{33}$$

La substitution définie par les formules (31) nous donnera

$$V = R^3 \int\int\int \frac{\rho^2 d\rho\, d\theta\, d\varphi}{(1-\rho^2)^2}$$

et le volume deviendra infini quand ρ tendra vers 1, c'est-à-dire lorsqu'on s'approchera de l'*absolu*.

225. On peut employer des considérations analogues pour les aires, et en particulier pour les aires planes. Si l'on recourt, par exemple, à l'élément linéaire, on aura, dans le plan,

$$(34) \qquad ds^2 = K^2 \frac{f(x, y, 1)\, f(dx, dy) - f^2(x, dx)}{f^2(x, y, 1)},$$

en supposant toujours que

$$f(x, y, z) = 0$$

soit l'équation homogène de l'*absolu*. L'élément linéaire sera de la forme

$$ds^2 = A\, dx^2 + A'\, dy^2 + 2B\, dx\, dy$$

et l'intégrale double

$$\int\int \sqrt{B^2 - AA'}\, dx\, dy$$

sera un invariant. Son calcul est facile et nous conduit à prendre pour l'aire

$$(35) \qquad \mathcal{A} = K^2 \sqrt{H} \int\int\int \frac{dx\, dy}{f^{\frac{3}{2}}(x, y, 1)},$$

H étant encore le Hessien de l'*absolu*.

Pour en faire une application, supposons que l'on ait choisi dans le plan deux points réels quelconques A, B et qu'on leur adjoigne, pour former le triangle de référence, le pôle de AB. L'équation de l'*absolu* sera de la forme

$$(36) \qquad f(x, y, z) = ax^2 + 2b\, xy + cy^2 + z^2 = 0,$$

l'équation $z = 0$ représentant la droite AB. Le point A aura pour coordonnées $y = 0$, $z = 0$ et le point B $x = 0$, $z = 0$.

Soit C un point quelconque du plan, dont les coordonnées soient $x, y, 1$, et cherchons à évaluer l'angle ACB. Cet angle θ

peut, par exemple, être calculé par l'application de la formule déjà obtenue

$$\cos\theta = \frac{(CC)(AB)-(AC)(BC)}{\sqrt{[(AA)(CC)-(CA)^2][(BB)(CC)-(BC)^2]}},$$

qui nous donne ici

$$(37) \qquad \cos\theta = \frac{b-\delta xy}{\sqrt{(a+\delta y^2)(c+\delta x^2)}},$$

δ étant le Hessien de l'*absolu*, déterminé par la formule

$$(38) \qquad \delta = ac - b^2.$$

On déduit de la relation précédente la valeur de $\sin\theta$,

$$(39) \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{\delta}\sqrt{f(x,y,1)}}{\sqrt{a+\delta y^2}\sqrt{c+\delta x^2}}.$$

Les signes ont été choisis de telle manière que l'angle θ se réduise à π quand le point C vient se placer, entre A et B, sur AB.

L'angle θ défini par les formules précédentes satisfait à une équation aux dérivées partielles qu'il est aisé de vérifier,

$$(40) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = \frac{\sqrt{\delta}}{f^{\frac{3}{2}}};$$

en sorte que l'aire peut s'écrire

$$(41) \qquad A = K^2\int\int\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy.$$

Cette formule est fondamentale.

Pour l'appliquer, construisons le quadrilatère C'D'CD en menant deux rayons par A et deux rayons par B.

L'intégrale double, étendue à ce quadrilatère, sera évidemment la différence entre la somme des valeurs de θ pour C et C' et la somme des valeurs du même angle pour D et D', c'est-à-dire qu'elle sera égale à la somme des angles intérieurs du quadrilatère, diminuée de 2π. Si le point C' vient se placer entre A et B, l'angle C' deviendra égal à π et la somme précédente deviendra égale à

$$A + B + C - \pi,$$

A, B, C désignant les angles du triangle ABC. Nous avons donc le théorème suivant :

L'aire du triangle formé par trois lignes droites situées dans un même plan est égale à

$$K^2(A + B + C - \pi).$$

Donc, dans le cas où l'*absolu* sera imaginaire, $A + B + C - \pi$ sera positif, puisque K^2 l'est. Il y aura un excès de la somme des

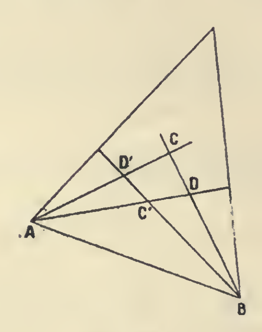


Fig. 24.

angles sur π. Au contraire, si l'*absolu* est une quadrique convexe à l'intérieur de laquelle on se trouve placé, l'*excès* se changera en *déficit*, parce qu'il faudra remplacer K^2 par $-R^2$.

226. Les surfaces que nous avons appelées des *sphères* ont leurs équations qui prennent une forme très simple lorsqu'on rapporte l'*absolu* à un tétraèdre de référence convenablement choisi. Soit A un point quelconque, non situé sur l'*absolu*. Il pourra toujours être considéré comme le sommet d'une infinité de tétraèdres conjugués et, si l'on prend l'un d'eux pour tétraèdre de référence, l'équation de l'*absolu* prendra la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + \varepsilon t^2 = 0,$$

ε étant l'unité, positive ou négative, suivant qu'il s'agira d'une surface imaginaire ou d'une surface convexe.

Soient x, y, z, t les coordonnées d'un point de l'espace. Nous supposerons qu'elles satisfassent à la condition

$$t^2 + \varepsilon x^2 + \varepsilon y^2 + \varepsilon z^2 = 1, \tag{42}$$

et alors la distance ρ de ce point au sommet A du tétraèdre pour lequel on a

$$x = y = z = 0, \qquad t = 1$$

sera donnée par l'équation

$$\cos\frac{\rho}{K} = t. \tag{43}$$

On pourra donc, en vertu de la relation (42), écrire

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\varepsilon}\sin\frac{\rho}{K}\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= \sqrt{\varepsilon}\sin\frac{\rho}{K}\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= \sqrt{\varepsilon}\sin\frac{\rho}{K}\cos\theta. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

L'élément linéaire de l'espace sera donné par la formule

$$\frac{1}{K^2}ds^2 = dt^2 + \varepsilon\, dx^2 + \varepsilon\, dy^2 + \varepsilon\, dz^2.$$

En remplaçant dx, dy, dz, dt par leurs valeurs, on trouvera

$$ds^2 = d\rho^2 + K^2\sin^2\frac{\rho}{K}\left\{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right\}. \tag{45}$$

Si l'*absolu* est imaginaire, K sera réel; sinon, K sera une imaginaire pure. Dans tous les cas, le complément de $d\rho^2$ dans le second membre sera essentiellement positif.

Cette formule appelle plusieurs conséquences.

D'abord elle met en évidence un résultat essentiel. *Dans la Géométrie Cayleyenne comme dans la Géométrie ordinaire, la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que l'arête du tétraèdre de référence définie par les équations

$$x = y = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = 0$$

est, en fait, une droite quelconque sur laquelle le sommet A du tétraèdre occupe une position quelconque. Il suffira donc de montrer que la proposition est exacte pour cette droite particulière.

Or, si l'on va du sommet A du tétraèdre, pour lequel $\rho = 0$, à un point M de la droite, ρ variera d'une manière continue, depuis la valeur zéro qu'on peut lui attribuer en A jusqu'à l'une des valeurs ρ' qu'il prend en M; et la longueur du chemin que l'on aura choisie pour joindre A à M, longueur qui a pour valeur l'inté-

grale

$$L = \int_A^M \sqrt{d\rho^2 + K^2 \sin^2\frac{\rho}{K}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}, \tag{46}$$

sera évidemment plus grande que l'intégrale

$$\int d\rho,$$

où ρ prendra la même suite continue de valeurs que sur le chemin considéré. Or, cette dernière intégrale est évidemment l'une des valeurs que l'on peut donner à $\overline{AM}$. Ainsi, la longueur de tout chemin réunissant A à M sera supérieure, en valeur absolue, à l'une des valeurs de la distance $\overline{AM}$. Elle sera donc supérieure à la plus petite d'entre elles et ne peut lui devenir égale que si, dans l'intégrale (46), on suppose

$$\sin\theta = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = y = 0.$$

Les variables ρ, θ, φ qui figurent dans les formules (44) constituent évidemment un système de coordonnées curvilignes propre à représenter tous les points de l'espace et analogue aux coordonnées polaires dans l'espace Euclidien. Les surfaces sur lesquelles ρ demeure constant contiennent tous les points à une même distance de A; et, comme ce dernier point peut être choisi arbitrairement en dehors de l'*absolu*, ce sont les sphères les plus générales de la Géométrie Cayleyenne.

Soit (S_C) l'une de ces sphères, de rayon ρ. D'après la formule (45), son élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = K^2 \sin^2\frac{\rho}{K}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{47}$$

Il ne diffère pas de celui qui conviendrait, *dans l'espace Euclidien*, à une sphère (S) de rayon

$$\rho' = K \sin\frac{\rho}{K};$$

et, comme dans les deux sphères, les grands cercles sont représentés par la même équation, on voit que les formules de la Trigonométrie sphérique s'appliqueront sans modification dans la

Géométrie Cayleyenne, pourvu que l'on modifie convenablement le rayon de la sphère considérée.

On peut même obtenir un résultat plus complet.

Soient M, M' deux points dont les coordonnées x, y, z, t; x', y', z', t' satisfont à l'équation (42), t et t' ayant tous deux les valeurs définies par l'équation (43). La distance $\overline{MM'}$ de ces deux points sera donnée par la formule

$$\cos \frac{\overline{MM'}}{K} = tt' + \varepsilon xx' + \varepsilon yy' + \varepsilon zz'.$$

De là on déduit

$$(48) \qquad 4\varepsilon \sin^2 \frac{\overline{MM'}}{2K} = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + \varepsilon(t-t')^2,$$

en sorte que, sur une sphère (S_C), pour laquelle $t = t'$, l'expression $2\sqrt{\varepsilon} \sin \frac{\overline{MM'}}{2K}$ est toujours égale à la distance Euclidienne de deux points dont les coordonnées rectangulaires seraient (x, y, z) et (x', y', z'), qui appartiendraient, par conséquent, à une sphère Euclidienne de rayon $\sqrt{\varepsilon} \sin \frac{\rho}{K}$.

Si l'on multiplie par $\frac{K}{\sqrt{\varepsilon}}$, on voit que l'on peut établir par les formules réelles

$$x_1 = K \sin \frac{\rho}{K} \sin \theta \cos \varphi, \qquad y_1 = K \sin \frac{\rho}{K} \sin \theta \sin \varphi, \qquad z_1 = K \sin \frac{\rho}{K} \cos \theta$$

une correspondance entre un point M de (S_C) et un point P d'une sphère Euclidienne (S') de rayon $K \sin \frac{\rho}{K}$ de telle manière que l'expression $2K \sin \frac{\overline{MM'}}{2K}$ soit toujours égale à la distance Euclidienne des deux points correspondants sur la sphère (S').

227. Dans les recherches qui précèdent, nous avons supposé que le centre de la sphère était réel, et même qu'il se trouvait dans l'espace accessible lorsque l'*absolu* est une quadrique réelle.

Pour compléter notre étude de la Géométrie non Euclidienne, il convient d'examiner toutes les positions que peut prendre le centre de la sphère.

Nous signalerons d'abord quelques propriétés générales des sphères Cayleyennes. Nous avons vu, au n° 187, que ce sont des quadriques inscrites à l'*absolu* suivant la conique située dans le plan polaire de leur centre. Comme la distance du centre à tout point de ce plan polaire est constante, on peut dire aussi *qu'elles sont le lieu des points qui sont à la même distance de ce plan polaire*. Si l'on transforme leur définition par la méthode des polaires réciproques, on verra également qu'*elles sont les enveloppes de tous les plans qui coupent sous un angle constant un plan donné*, à savoir le plan polaire de leur centre.

C'est ainsi que, dans la Géométrie sphérique ordinaire, un petit cercle est susceptible d'une triple définition : il est le lieu des points situés à une distance constante d'un point fixe, ou bien le lieu des points à une distance constante d'un grand cercle, ou enfin l'enveloppe des arcs de grand cercle coupant un grand cercle donné sous un angle constant.

De cette triple propriété des sphères Cayleyennes découlent plusieurs propositions, analogues à celles de la Géométrie ordinaire. Par exemple, la section de toute sphère Cayleyenne par un plan (P) est un cercle, c'est-à-dire une courbe plane lieu des points situés à une distance constante d'un point fixe du plan dans lequel elle est tracée. Soit A, en effet, le centre de la sphère; abaissons de A, sur le plan (P), une perpendiculaire dont le pied sera A_0. Toute rotation autour de la droite AA_0 laissera invariable la sphère, le point A_0, le plan (P) et, par conséquent, fera glisser sur elle-même la courbe de section de la sphère par le plan (P). Cette courbe aura donc tous ses points à la même distance de A_0.

Ces différentes propositions vont nous permettre de discuter les diverses formes des sphères Cayleyennes dans la Géométrie non Euclidienne. Rapportons l'*absolu* à un tétraèdre conjugué quelconque, de telle manière que son équation devienne

$$x^2+y^2+z^2-t^2=0.$$

Le seul sommet du tétraèdre qui soit dans l'espace accessible sera défini par les relations

$$x=y=z=0,$$

et ce sera, d'ailleurs, un point quelconque de cet espace. D'après

nos formules générales, l'équation de toute sphère ayant ce point pour centre et ρ pour rayon sera

$$x^2+y^2+z^2=k^2t^2,$$

en posant

$$k=i\,\text{tang}\,\frac{\rho}{Ri},$$

ce qui donne

$$k^2<1.$$

On obtient ainsi des surfaces qui sont tout entières situées dans l'espace accessible, convexes par conséquent; mais comme le plan polaire du centre est dans l'espace inaccessible, il n'y a plus lieu de parler de la distance à ce plan, ni de l'angle du plan tangent avec ce plan. Des trois définitions de la sphère Cayleyenne, deux doivent être laissées de côté.

228. Il est facile de voir que le centre d'une sphère Cayleyenne peut être rejeté à l'infini, c'est-à-dire peut venir se placer sur l'*absolu* sans que la sphère se réduise à un plan. Considérons le point de l'espace accessible défini par les relations

$$(49)\qquad x=y=0,\qquad z=ht,\qquad h<1.$$

L'équation de la sphère de rayon ρ ayant ce point pour son centre sera définie par l'équation

$$(50)\qquad (1-h^2)\cos^2\frac{\rho}{Ri}=\frac{(zh-t)^2}{t^2-x^2-y^2-z^2}.$$

Or, lorsque h tend vers l'unité, c'est-à-dire lorsque le centre vient se placer sur l'*absolu*, on peut disposer de ρ de telle manière que le produit

$$(1-h^2)\cos^2\frac{\rho}{Ri}$$

reste égal à une quantité finie quelconque $\frac{1}{r^2}$. Alors l'équation de la sphère prendra la forme

$$(51)\qquad t^2-x^2-y^2-z^2=r^2(z-t)^2.$$

Elle sera toujours inscrite à l'*absolu*, *mais cette fois suivant un de ses plans tangents.*

Ces sortes de surfaces ont été appelées des *horisphères*.

La démonstration que nous avons donnée précédemment montre, ici encore, que les sections d'une horisphère par des plans qui ne contiennent pas le centre sont des cercles identiques aux sections planes d'une sphère Cayleyenne. Mais si le plan sécant contient le centre de l'horisphère, il la coupe suivant un cercle particulier ayant même centre que l'horisphère. Les cercles de cette nature, dont le centre est à l'infini et dont le rayon est infini, s'appellent des *horicercles* ou des *horicycles*.

229. Nous avons examiné deux hypothèses : l'une où le centre de la sphère est dans l'espace accessible, l'autre où il vient se placer sur l'*absolu*. On peut encore supposer que le centre A soit dans l'espace inaccessible. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend la surface représentée par l'équation

$$t^2 - x^2 - y^2 = k^2 z^2, \tag{52}$$

l'*absolu* étant toujours défini par l'équation (32).

Alors, il n'y a plus lieu de parler de la distance au centre, qui est défini par les équations

$$x = y = t = 0$$

et se trouve dans l'espace inaccessible. Mais les deux autres propriétés subsistent, et la sphère est le lieu des points qui sont à une distance invariable du plan défini par l'équation

$$z = 0, \tag{53}$$

ou l'enveloppe des plans qui font avec ce plan fixe un angle constant.

L'une de ces deux propriétés, la première, peut être mise en évidence de la manière suivante :

Prenons, pour déterminer un point de l'espace accessible, les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x &= i \cos\frac{\rho}{Ri}\sin\theta i\cos\varphi, & y &= i\cos\frac{\rho}{Ri}\sin\theta i\sin\varphi,\\ z &= i\sin\frac{\rho}{Ri}, & t &= \cos\frac{\rho}{Ri}\cos\theta i, \end{aligned}\right. \tag{54}$$

analogues à celles (44) que nous avons données plus haut. On

aura encore

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1; \tag{55}$$

et l'élément linéaire de l'espace Cayleyen sera donné par la formule

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2 \cos^2 \frac{\rho}{Ri} (d\theta^2 - \sin^2 \theta i \, d\varphi^2), \tag{56}$$

qui est analogue à la relation (45) et met, comme elle, en évidence un système triple orthogonal. En se déplaçant sur les droites définies par les équations

$$\theta = \text{const.}, \qquad \varphi = \text{const.},$$

qui sont évidemment les perpendiculaires au plan défini par l'équation (53), on reconnaîtra immédiatement que, pour chaque point de l'espace, ρ représente la distance à ce plan.

En résumé, dans la Géométrie non Euclidienne, il y a trois espèces différentes de sphères réelles. Les unes, que l'on pourrait appeler des *endosphères*, ont leur centre dans l'espace accessible. Les autres, qui ont leur centre dans l'espace inaccessible, pourraient être nommées des *exosphères*. Enfin, nous aurions comme intermédiaires les *horisphères*, qui ont leur centre sur l'*absolu*.

230. Dans les développements qui précèdent, nous avons mis en évidence des systèmes triples orthogonaux dont une des familles est composée de sphères concentriques, ayant leur centre hors de l'*absolu*. Il ne sera pas inutile de montrer que ces systèmes subsistent avec toutes leurs propriétés quand les sphères concentriques qui composent une de leurs familles deviennent des horisphères et ont leur centre commun sur l'*absolu*.

Prenons l'équation de l'*absolu* sous la forme

$$2zt - x^2 - y^2 = 0, \tag{57}$$

qui met en évidence un de ses points, d'ailleurs quelconque, de coordonnées

$$x = y = t = 0.$$

Toute horisphère ayant ce point pour centre sera définie par une équation telle que la suivante :

$$2zt - x^2 - y^2 = \rho^2 t^2, \tag{58}$$

où ρ désignera une constante arbitraire.

Si l'on suppose que l'on ait choisi les coordonnées homogènes d'un point de manière à satisfaire à la condition

$$2zt - x^2 - y^2 = 1, \tag{59}$$

on pourra prendre

$$t = \frac{1}{\rho}. \tag{60}$$

D'ailleurs, l'élément linéaire de l'espace sera donné par la formule

$$\frac{ds^2}{R^2} = -2\,dz\,dt + dx^2 + dy^2. \tag{61}$$

Si l'on remplace t et z par leurs valeurs déduites des formules (59), (60) et si l'on pose

$$x = \frac{X}{\rho}, \qquad y = \frac{Y}{\rho}, \tag{62}$$

on aura

$$\rho^2 \frac{ds^2}{R^2} = dX^2 + dY^2 + d\rho^2. \tag{63}$$

Ainsi, nous obtenons, dans l'espace Cayleyen, un sytème triple réel, formé d'une famille d'horisphères concentriques et de deux familles de plans représentés par les équations

$$X = \frac{x}{t} = \text{const.}, \qquad Y = \frac{y}{t} = \text{const.},$$

ces plans passant tous par le centre commun des horisphères et se coupant mutuellement à angle droit.

Sur chacune des horisphères, il faut faire

$$\rho = \text{const.}, \qquad d\rho = 0.$$

L'élément linéaire est donc le même que celui du plan dans la Géométrie ordinaire, d'où l'on doit conclure que, sur une telle surface, les triangles formés par trois horicercles ont toutes les propriétés des triangles plans et qu'en particulier, la somme de leurs angles est égale à deux droits.

Ici encore, on peut obtenir un résultat analogue à celui que nous avons donné pour les sphères générales. Si l'on considère

deux points quelconques dont les coordonnées seront, par conséquent, définies par les formules

$$(64)\quad \begin{cases} 2z = (X^2+Y^2)t + \dfrac{1}{t}, & 2z' = (X'^2+Y'^2)t' + \dfrac{1}{t'}, \\ x = Xt,\ y = Yt, & x = X't',\ y = Y't', \\ t = \dfrac{1}{\rho}; & t' = \dfrac{1}{\rho'}, \end{cases}$$

on trouvera, pour leur distance Cayleyenne δ, la formule

$$(65)\qquad -4\rho\rho' \sin^2 \frac{\delta}{2Ri} = (X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (\rho-\rho')^2,$$

d'où l'on peut déduire la précédente (63), en supposant infiniment voisins les points considérés.

231. Nous mettrons à profit les résultats précédents pour bien définir les diverses espèces de déplacements dans la Géométrie non Euclidienne. Nous avons vu que tout déplacement réel se rattache à deux droites réelles qui sont polaires l'une de l'autre. Ici, une de ces droites, que nous désignerons par D, coupera l'*absolu* en deux points réels; l'autre, que nous désignerons par Δ, sera tout entière dans l'espace inaccessible.

Si le déplacement est hélicoïdal, on devra, pour avoir la position nouvelle d'un point M, opérer comme en Géométrie ordinaire. On abaissera de M la perpendiculaire MP sur D; on fera ensuite glisser cette perpendiculaire, en laissant invariable le point où elle coupe Δ, de telle manière que P se déplace sur D d'une quantité constante PP'; puis on fera tourner la nouvelle position de MP d'un angle constant, dans le plan qui est perpendiculaire en P' à D.

Quand le déplacement se réduira à une rotation, il y aura lieu de distinguer deux cas. Si l'axe de la rotation est la droite D, la construction précédente s'appliquera en se simplifiant. Il suffira de faire tourner MP d'un angle constant autour de P. Si l'axe de la rotation est la droite Δ, il suffira de déplacer MP dans le plan de MP et de D, sans la faire tourner ensuite autour de D, de telle manière qu'elle demeure perpendiculaire à D.

Enfin, si le déplacement est un retournement, il suffira de

prendre sur le prolongement de MP le point P′ tel que MP′ soit égal à MP.

Ainsi, dans ces différentes hypothèses, on pourra définir le déplacement, sans faire appel à la droite Δ située dans l'espace inaccessible.

Les surfaces pseudocylindriques définies au n° 213 seront, dans tous les cas, les lieux des points situés à la même distance de D. Si nous envisageons les mouvements continus déjà considérés au n° 213, elles contiendront, dans tous les cas, les trajectoires des points de l'espace. Quand le déplacement sera hélicoïdal, ces trajectoires seront des courbes transcendantes; mais si le déplacement se réduit à une rotation, elles deviendront des cercles, qui seront situés dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation et auront leur centre sur cet axe. Lorsque c'est la droite D qui est l'axe de rotation, cette définition n'offre aucune difficulté. Si, au contraire, l'axe de rotation est la droite Δ, les trajectoires ayant leur centre sur Δ seront des courbes planes, des coniques, *situées dans des plans passant par* D *et lieux des points situés à la même distance de* D. Elles seront donc entièrement définies au moyen des éléments situés dans l'espace accessible.

Quant aux surfaces pseudocylindriques, qui coupent l'*absolu* suivant les quatre génératrices rectilignes rencontrant à la fois D et Δ, elles sont convexes, tangentes à l'*absolu* aux deux points réels où cette surface est coupée par D, et elles sont situées tout entières dans l'espace accessible.

232. Ici encore, nous pouvons constituer un système de coordonnées curvilignes orthogonales qui met bien en évidence toutes ces propriétés. Les trois familles en seront formées : 1° des pseudocylindres ayant pour axes les droites D, Δ; 2° des plans passant par D; 3° des plans passant par Δ. Si l'on prend les formules

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \operatorname{tang}\rho\cos\varphi, & y &= \operatorname{tang}\rho\sin\varphi, \\ z &= \frac{i\sin i\psi}{\cos\rho}, & t &= \frac{\cos i\psi}{\cos\rho}, \end{aligned}\right.$$

qui conduisent au résultat suivant :

$$(67)\qquad t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1,$$

l'élément linéaire de l'espace sera déterminé par la formule

$$\frac{1}{R^2} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2, \tag{68}$$

qui donne ici

$$\frac{1}{R^2} ds^2 = \frac{d\rho^2}{\cos^2\rho} + \tang^2\rho \; d\varphi^2 + \frac{1}{\cos^2\rho} d\psi^2. \tag{69}$$

On voit que cet élément linéaire ne changera pas si, laissant ρ constant, on ajoute des constantes quelconques à φ et à ψ; cela correspond au déplacement le plus général ayant pour axes D, Δ.

Si l'on remplace φ par $\varphi_0 + av$ et ψ par $\psi_0 + bv$, les formules

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \tang\rho \cos(\varphi_0 + av), & y = \tang\rho \sin(\varphi_0 + av), \\ z = \dfrac{i \sin(i\psi_0 + ibv)}{\cos\rho}, & t = \dfrac{\cos(i\psi_0 + ibv)}{\cos\rho} \end{array} \right. \tag{70}$$

représenteront, lorsque v variera seule, la trajectoire d'un point quelconque, trajectoire qui correspond à l'hélice de la Géométrie ordinaire. Si l'une des constantes a ou b est nulle, on obtiendra les cercles dont les plans passent par D ou par Δ, les seconds seuls ayant leur centre dans l'espace *accessible* et les autres étant des courbes parallèles à D.

Nous aurons plus loin à étudier une transformation de l'espace qui se rattache étroitement à la Géométrie Cayleyenne. Dans le cas où l'*absolu* est réel, cette Géométrie, nous l'avons dit, est identique à celle qui a été créée par Lobatschefsky, par Bolyai, par Gauss et qui porte le nom de Géométrie non Euclidienne; mais la méthode que nous avons suivie avait surtout pour but de montrer combien l'étude de ce beau sujet est simplifiée par la considération de ce que nous avons appelé l'*espace inaccessible*.



LIVRE V.

DE L'INVERSION.

CHAPITRE I.

L'INVERSION. — SES PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES.

L'inversion a été introduite dans la science par Sir *William Thomson* (Lord *Kelvin*). — Comment on peut la rattacher à l'inversion quadrique de Hirst. — Relation entre les points homologues. — Les droites isotropes ont pour homologues des droites isotropes. — Cône isotrope correspondant à un plan isotrope. — Principe de la conservation des angles. — Relations entre deux courbes ou deux surfaces homologues. — Des développables isotropes; leurs principales propriétés. — Focales d'une surface ou d'une courbe. — Focales singulières. — L'inversion, qui ne conserve pas les focales singulières, conserve les focales ordinaires. — Transformations qui résultent de l'application successive de plusieurs inversions. Elles peuvent toujours se réduire à une inversion ou à une homothétie, précédées ou suivies d'un déplacement. — Élément linéaire de l'espace; comment il est transformé par une inversion.

---

233. Après avoir étudié, comme disait Chasles, deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie, il importe que nous abordions un sujet essentiellement nouveau, en examinant de nouvelles méthodes de transformation des figures, où se présentent des faits géométriques que nous n'avons rencontrés ni dans l'étude de l'homographie, ni dans celle de la corrélation. La plus simple de ces transformations est celle qui a été découverte par Sir *William Thomson* (Lord *Kelvin*) et à laquelle on donne aujourd'hui le nom d'*inversion*. Voici comment on peut la définir géométriquement.

Considérons une sphère (S), que nous appellerons la *sphère principale* de l'inversion. Tout point M de l'espace peut être considéré comme le centre d'une sphère de rayon nul (M). Par l'intersection de (S) et de (M) passe une seconde sphère de rayon

nul (M'). Le centre M' de cette sphère sera le point qui, dans l'inversion, correspondra à M.

Si l'on prend pour origine des coordonnées rectangulaires le centre de la sphère principale (S), appelé *pôle* de l'inversion, les formules qui la définissent seront les suivantes :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{R^2}{x^2+y^2+z^2}. \tag{1}$$

La sphère principale est donc le lieu des points qui coïncident avec leurs homologues. Le rayon R de cette sphère peut, d'ailleurs, être une imaginaire pure sans que la transformation cesse d'être réelle. On désigne le carré de ce rayon sous le nom de *module* de l'inversion.

Nous ne nous attarderons pas à établir les propriétés élémentaires, bien connues, de l'inversion; mais nous étudierons très complètement la correspondance qu'elle établit entre les points.

234. A cet effet, nous remarquerons qu'elle est comprise comme cas particulier dans une transformation proposée par *Hirst*.

Considérons une surface du second degré et le cône du second degré circonscrit à cette surface suivant une conique (C). Soit O le sommet de ce cône; la droite menée par le point O et par un point quelconque M coupera la surface en deux points P, P'. Si nous faisons correspondre au point M le point M' conjugué harmonique de M par rapport au segment PP', nous aurons réalisé ce que Hirst a appelé *l'inversion quadrique*. D'ailleurs, cette transformation sera *involutive*, c'est-à-dire que la relation entre deux points correspondants M, M' sera réciproque, de sorte que la transformation, appliquée deux fois, ramènera à la figure primitive.

Si l'on suppose que la surface considérée soit une sphère et que O soit son centre, on retrouvera l'inversion ordinaire. Alors, la courbe de contact (C) du cône de sommet O sera le cercle imaginaire de l'infini.

Étudions d'abord la correspondance entre les points.

1° Au pôle O correspondent tous les points du plan de contact, c'est-à-dire du plan de l'infini.

2° Les seuls points qui se correspondent à eux-mêmes sont situés sur la surface du second degré, c'est-à-dire sur la sphère.

3° A tout point a situé sur le cône circonscrit, c'est-à-dire sur la sphère de rayon nul ayant son centre en O, correspond un point a' situé sur le cercle de l'infini.

4° Mais à un point a' situé sur le cercle de l'infini correspondent tous les points de la droite isotrope Oa'; car la droite Oa' coupe la sphère en deux points qui se confondent avec a', et, par conséquent, le conjugué harmonique de a' est indéterminé sur la droite Oa'.

On voit donc qu'il existe des points pour lesquels le point homologue est indéterminé : le pôle d'abord, auquel correspondent tous les points d'un plan, le plan de l'infini; et ensuite les points du cercle de l'infini, pour lesquels l'indétermination est moindre; car à chacun d'eux correspondent seulement tous les points d'une droite, la droite isotrope qui joint le point au pôle de l'inversion.

Examinons maintenant comment se transforment les droites et les plans. Si la droite passe par le pôle, elle est évidemment conservée par l'inversion. Si la droite ne passe pas par le pôle, elle coupe le plan de l'infini en un point a qui a pour homologue le pôle O; elle coupe le cône isotrope de sommet O en deux points b et b' dont les homologues sont sur le cercle de l'infini; elle a donc pour homologue une conique passant par le pôle O et coupant en deux points le cercle de l'infini; c'est-à-dire un cercle passant par le pôle. Il y a lieu cependant de distinguer des cas particuliers.

Si la droite est isotrope, soit a le point où elle coupe le cercle de l'infini : le point a ayant pour homologues *tous* les points de la droite Oa, il en résulte que le cercle qui correspond à la droite se décompose en deux droites isotropes, l'une qui sera la droite Oa, l'autre que l'on construira de la manière suivante :

En général, la droite isotrope coupe la sphère principale en un point b, distinct de a, et le plan Oab coupe le cercle de l'infini en un point α distinct de a. C'est la droite isotrope $b\alpha$ qui sera l'homologue de ab.

Cette construction tombe en défaut si la droite isotrope est tangente en a à la sphère principale. Mais alors la définition même de l'inversion nous fournit le résultat. Le plan passant par la droite et par le point O est tangent en a à la sphère principale, qu'il coupe suivant deux génératrices rectilignes se croisant en a.

L'homologue de la droite considérée est sa conjuguée harmonique par rapport à l'angle formé par ces deux génératrices rectilignes.

Des résultats analogues s'obtiennent en ce qui concerne les plans. Généralement, à un plan qui ne passe pas par le pôle correspond une sphère qui passe au pôle O et y admet un plan tangent parallèle au plan donné. Cette sphère est donc déterminée par cette condition de passer en O et par celle de couper la sphère principale suivant le même cercle que le plan. Si ce plan n'est pas isotrope, la sphère correspondante ne saurait avoir son rayon nul. Car son plan tangent au centre O de la sphère principale, étant parallèle au plan proposé, n'est pas isotrope. Mais, si le plan considéré devient isotrope, la sphère correspondante admettra un plan tangent isotrope en un point à distance finie et se réduira nécessairement à un cône isotrope. Si a est alors le point de contact du plan considéré et du cercle de l'infini, ce cercle et la section du plan par la sphère principale sont tangents en a; on peut donc les placer sur un cône isotrope dont le sommet sera sur la droite Oa. C'est ce cône isotrope, cette sphère de rayon nul, qui correspond au plan isotrope considéré.

235. Les résultats précédents nous permettent de démontrer d'une manière intuitive la propriété fondamentale qu'a l'inversion, celle de conserver les angles des courbes et des surfaces.

Soient, en effet, (C), (D) deux courbes tracées sur une surface (S) et se coupant en un point M. Soient Mt, Mu les deux tangentes aux courbes en ce point. Menons les deux droites isotropes MI, MJ qui passent en M et sont situées dans le plan tangent en M. Si l'on applique l'inversion à la surface (S), le point M devient un point M'; les deux tangentes Mt, Mu ont pour perspectives, dans le plan tangent en M' à la transformée (S'), les tangentes $M't'$, $M'u'$ aux courbes transformées de (C) et de (D). Quant aux droites isotropes MI, MJ, elles se transforment dans les deux tangentes isotropes M'I', M'J' qui passent en M' et y sont tangentes à (S'). Comme le rapport anharmonique des quatre droites Mt, Mu, MI, MJ est égal à celui des droites qui en sont les perspectives, $M't'$, $M'u'$, M'I', M'J', on voit, d'après la relation que Laguerre a établie entre les angles et les rapports anharmoniques de cette nature, que les angles seront conservés par l'inversion.

236. Dans ce qui précède, nous n'avons étudié que les transformations des droites et des plans. Nous allons maintenant considérer des figures moins simples.

Envisageons d'abord une courbe quelconque, et supposons qu'elle rencontre le plan de l'infini en p points, non situés sur le cercle de l'infini, et en i points situés sur ce cercle. Son ordre n, c'est-à-dire le nombre des points dans lesquels elle est rencontrée par un plan, sera donc $p+i$. Supposons, en outre, qu'elle coupe le cône asymptote de la sphère principale de l'inversion en r points situés à distance finie et que le nombre de ses branches passant au pôle soit égal à q. Désignons par des lettres accentuées les mêmes nombres relatifs à la courbe transformée. On aura, en général,

$$(2) \quad q'=p, \quad p'=q, \quad i'=r, \quad r'=i, \quad n'=q+r, \quad n=p+i.$$

Considérons, par exemple, un cercle quelconque de l'espace. Ici l'on a

$$p=0, \quad q=0, \quad i=2, \quad r=2, \quad n=2,$$

et l'on trouvera les mêmes nombres pour la transformée, qui sera, par conséquent, un cercle.

237. Les formules analogues relatives aux surfaces se trouvent aussi sans difficulté. Si l'on désigne par n l'ordre de la surface, si sa section par le plan de l'infini se compose d'une courbe de degré p et du cercle de l'infini, qui sera ligne multiple d'ordre i, si le pôle O est un point multiple d'ordre q et enfin si la surface coupe le cône isotrope de sommet O suivant une courbe qui rencontre chaque génératrice du cône en r points distincts de ceux qui sont en O et sur le cercle de l'infini, on aura, pour l'ordre n de la surface, la valeur

$$n=p+2i.$$

Pour la surface transformée, les nombres précédemment définis seront donnés par les formules

$$(3) \quad q'=p, \quad p'=q, \quad r'=i, \quad i'=r, \quad n'=q+2r.$$

Par exemple, pour une surface du second degré ne passant pas au pôle, on a

$$p=2, \quad q=0, \quad i=0, \quad r=2.$$

Pour la transformée, on obtiendra les valeurs suivantes :

$$q' = 2, \quad p' = 0, \quad r' = 0, \quad i' = 2, \quad n' = 4.$$

Ce sera une surface du quatrième ordre, qui admettra le cercle de l'infini comme ligne double et aura un point double au pôle.

Si la surface du second degré passait au pôle, on obtiendrait une surface du troisième degré ayant toujours le pôle pour point double et contenant le cercle de l'infini.

238. Nous avons vu que, dans l'inversion, toutes les droites isotropes se transforment en droites isotropes. Ainsi, les surfaces réglées formées de ces droites se transforment en surfaces réglées.

On peut compléter ce résultat et démontrer que *les surfaces développables formées avec ces droites se transforment en surfaces développables.*

Considérons, en effet, une telle surface; le plan tangent tout le long d'une de ses génératrices d est tangent au cercle de l'infini, c'est-à-dire il est isotrope. Il se transforme donc en un cône isotrope qui est tangent à la surface transformée en tous les points de la génératrice homologue de d. La surface transformée admet le même plan tangent en tous les points de chaque génératrice; c'est donc une surface développable.

Nous appellerons de telles développables des *développables isotropes*. Elles interviennent, nous le verrons, dans l'étude de questions importantes et ont les propriétés les plus singulières.

Comme elles sont les enveloppes de plans isotropes, leur normale en un point quelconque est précisément la génératrice rectiligne de la surface qui passe en ce point. Si l'on définit *ligne de courbure* d'une surface toute ligne telle que les normales à la surface en tous ses points forment une surface développable, on peut dire que toute ligne tracée sur une développable isotrope est ligne de courbure de cette surface.

De là cette conséquence, que nous avons signalée dès 1864 :

La courbe de contact de toute surface avec la développable isotrope qui lui est circonscrite est une ligne de courbure imaginaire de la surface, que l'on peut déterminer sans aucune intégration.

Voici d'autres résultats.

Si l'on considère une courbe quelconque (K) de la développable isotrope, les génératrices rectilignes de cette surface lui seront normales, et, comme elles sont toutes tangentes à l'arête de rebroussement (R) de la surface, *cette arête de rebroussement sera une développée commune à toutes les courbes* (K).

Supposons que la courbe (K) soit une section plane; d'après les propriétés générales des courbes planes, la projection de (R) sur le plan de (K) sera la développée de cette courbe. Donc, *toutes les sections d'une développable isotrope par les plans parallèles se projetteront sur l'un de ces plans suivant des courbes parallèles.*

De même, si l'on coupe la développable par une sphère, la développée sphérique de la courbe de section sera la projection conique de l'arête de rebroussement, cette projection étant faite du centre de la sphère. On sait, en effet, que le lieu des développées d'une courbe sphérique est un cône dont le sommet est au centre de la sphère qui contient la courbe. Il résulte de là que *les sections de la développable par des sphères concentriques se projettent coniquement sur une de ces sphères suivant des courbes parallèles.*

Voici enfin une dernière propriété des développables isotropes. Leur arête de rebroussement ayant pour tangentes des droites isotropes, son élément linéaire est nul. On a

$$ds^2 = 0.$$

Et réciproquement, toute courbe dont l'arc est nul a ses tangentes isotropes et est l'arête de rebroussement d'une développable isotrope.

239. Nous renverrons, pour une étude plus complète des développables isotropes, à d'autres travaux; mais nous montrerons ici comment elles permettent d'étendre à l'espace une notion donnée par *Plücker* pour les courbes planes. Ce géomètre a montré comment on peut obtenir, pour les courbes planes de tous degrés, une définition des foyers, qui, avant lui, n'étaient considérés que dans les courbes du second degré. Le foyer d'une courbe de degré supérieur est le centre d'un cercle de rayon nul

dont les deux droites sont tangentes à la courbe; de sorte que, pour avoir tous les foyers d'une courbe, il faut mener, des deux points à l'infini sur le cercle, des tangentes à la courbe. Les points d'intersection de ces deux faisceaux de tangentes seront les foyers, réels ou imaginaires, de la courbe.

On peut donner de même, en généralisant la notion de *focale*, due à *Chasles* pour les surfaces du second degré, la définition suivante des focales d'une surface quelconque.

Circonscrivons à cette surface et au cercle de l'infini une surface développable. Cette développable isotrope aura des lignes doubles, dont une seule suffira évidemment à la déterminer, puisqu'alors ses plans tangents devront être tangents à la fois à la ligne double et au cercle de l'infini. Ces lignes doubles seront appelées les *focales* de la surface. Par chaque tangente de la focale, on peut mener deux plans tangents à la surface et au cercle de l'infini. Par conséquent, tout point de la focale sera le centre d'une sphère de rayon nul doublement tangente à la surface, et réciproquement.

Tout point de cette nature sera dit un *foyer* de la surface.

Ces définitions concordent avec celles de Chasles pour les surfaces du second degré; nous les appliquerons aux surfaces de degré supérieur.

L'inversion, conservant les développables isotropes, conservera, par cela même, les foyers et les focales ordinaires.

240. A la définition que nous venons de donner, *Laguerre* a ajouté un complément utile. Considérons d'abord le cas du plan. Nous avons vu que, pour avoir tous les foyers, il faut mener, des points I et J, des tangentes à la courbe considérée. Mais, si cette courbe passe aux points I et J, il est un groupe de tangentes que l'on peut séparer : celui qui est formé de celles dont les points de contact sont précisément en I et en J. Elles donnent naissance à des foyers particuliers, que Laguerre a nommés *foyers singuliers*.

Par exemple, une conique générale a quatre foyers, dont deux sont imaginaires.

Si elle devient un cercle, elle n'aura plus qu'un foyer singulier, son centre.

Cette distinction est d'autant plus utile que les foyers singuliers, à la différence des autres, ne sont pas conservés par l'inversion.

On opérera de même dans l'espace; si une surface passe par le cercle de l'infini, la développable qui lui sera circonscrite en tous les points de ce cercle pourra avoir des lignes doubles. On les appellera des *focales singulières;* elles ne sont pas conservées par l'inversion.

La définition des focales étant tangentielle, c'est-à-dire n'employant que les plans tangents, les focales d'une courbe quelconque se déterminent comme celles des surfaces; ce sont les lignes doubles de la développable circonscrite à la courbe et au cercle de l'infini. Cette développable aura pour lignes doubles la courbe proposée et d'autres courbes, qui seront les focales de la première.

On voit que les différentes lignes doubles d'une développable isotrope sont les focales, les unes des autres.

241. Nous terminerons ces généralités en examinant les transformations qui résultent de l'application successive de plusieurs inversions.

Nous ferons usage, dans cette étude, d'une remarque qui résulte immédiatement de la définition, donnée plus haut, de l'inversion. Quand la sphère principale se transforme en un plan, l'inversion se transforme en une symétrie relative à ce plan. Car, si l'on a un plan (P) et un point M, il n'y a que la symétrique M' de M par rapport à (P) qui soit le centre d'une sphère de rayon nul coupant ce plan suivant le même cercle que la sphère de rayon nul dont le centre est en M.

D'après cela, soient I et I_1 deux inversions, définies par les sphères principales (S) et (S_1). L'inversion I transforme toute figure (F) en une figure (F_1), que la seconde inversion I_1 transforme en une figure (F_2). J'applique à l'ensemble de ces figures une inversion, d'ailleurs quelconque, H. Les trois figures (F), (F_1), (F_2) sont transformées en de nouvelles figures (F'), (F'_1), (F'_2), les deux sphères (S), (S_1) en deux nouvelles sphères (S'), (S'_1); mais je dis que les relations primitives ne seront pas troublées : (F'_1) se déduira de (F') par l'inversion I' qui admet (S') pour sphère principale, et (F'_2) se déduira de (F'_1) par l'inversion I'_1 qui admetttra (S'_1) pour sphère principale.

Ces propositions sont, pour ainsi dire, évidentes, si l'on se reporte

à la définition de l'inversion telle que nous l'avons donnée. Si M et M_1 sont deux points correspondants dans une inversion dont la sphère principale est (S), c'est qu'ils sont les centres de deux sphères de rayon nul se coupant sur (S). Cette relation n'est nullement troublée par une inversion quelconque, à condition qu'on substitue à (S) la sphère (S') qui en dérive par cette inversion. Notre proposition est donc établie. Appliquons-la au cas actuel en prenant, pour l'inversion H, une inversion dont le pôle soit sur le cercle commun à (S) et à (S_1). Alors, les deux sphères correspondantes (S'), (S'_1) se réduiront à des plans, et les deux inversions I', I'_1 deviendront des inversions planes, c'est-à-dire des symétries par rapport aux deux plans (S'), (S'_1).

Or, deux symétries effectuées successivement par rapport à deux plans équivalent à une rotation autour de l'intersection des deux plans, rotation d'un angle double de l'angle des deux plans. Donc, les deux inversions planes déterminées par les plans (S'), (S'_1) peuvent être remplacées par deux autres inversions planes quelconques dont les plans principaux se coupent suivant la même droite que les précédents et font le même angle que les plans (S'), (S'_1).

En revenant à la figure primitive, on a donc le théorème suivant :

Deux inversions déterminées par les sphères (S), (S_1) *peuvent être remplacées par deux autres inversions dont les sphères principales passent par l'intersection de* (S) *et de* (S_1) *et font un angle égal à l'angle de* (S) *et de* (S_1), *et de même sens.*

On peut objecter à la démonstration précédente qu'elle suppose l'existence d'un cercle réel commun à (S) et à (S_1). Sans nous arrêter à cette difficulté, déduisons-en une règle qu'il sera aisé de vérifier dans tous les cas.

Par la ligne des centres de (S) et de (S_1), faisons passer un plan quelconque (P), qui coupera en A le cercle commun à (S) et à (S_1). Autour de A, et dans le plan (P), faisons tourner l'angle CAC_1, C et C_1 étant les centres des deux sphères, et soit DAD_1 une quelconque de ses nouvelles positions, D et D_1 étant les points où ses côtés coupent la ligne des centres. Les sphères (Σ), (Σ_1) qui

ont pour centres D, D_1 et passent par A seront les sphères principales des deux inversions qui peuvent remplacer les inversions considérées. Cela résulte des raisonnements précédents.

Or on sait, et il est évident, que lorsqu'un angle constant tourne, dans son plan, autour d'un point fixe A et coupe une droite fixe en deux points variables D, D_1, la relation entre ces deux points est homographique; et il résulte de la définition de l'angle que les points doubles de cette homographie sont ceux où la droite fixe est rencontrée par les droites isotropes qui passent en A. Ici, ces points doubles sont les centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de deux sphères (S) et (S_1). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, que nous laissons au lecteur le soin de démontrer directement :

Étant données deux inversions I *et* I_1 *dont les sphères principales sont* (S) *et* (S_1), *elles peuvent être remplacées d'une infinité de manières par deux inversions dont les sphères principales ont même plan radical que* (S) *et* (S_1). *Quant à leurs centres* D *et* D_1, *ils peuvent être choisis parmi les couples de points homologues d'une homographie qu'on peut définir de la manière suivante : Elle a pour points doubles les centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de* (S) *et de* (S_1) *et un de ses couples de points homologues est donné par les centres* C *et* C_1 *des sphères primitives* (S), (S_1).

Ce théorème n'aurait plus de sens dans le cas où les deux sphères (S), (S_1) seraient concentriques. Mais alors, il est évident que les deux inversions peuvent être remplacées par une homothétie dont le centre est le centre commun des deux sphères.

242. Les propositions précédentes nous permettent l'étude de la transformation qui résulte de l'application répétée de plusieurs inversions.

Soient I_1, I_2 les deux premières. Si leurs sphères principales ne sont pas concentriques, elles peuvent être remplacées, d'une infinité de manières, par deux inversions dont les pôles sont deux points D, D_1, le premier de ces points étant choisi arbitrairement sur la ligne des centres. Si nous le rejetons à l'infini, la première

inversion deviendra plane. Désignons-la par P_1; nous aurons remplacé I_1, I_2 par deux inversions P_1, I'_2.

Opérant de même avec I'_2, I_3 et continuant de la sorte, on voit que nous aurons remplacé nos inversions par une série d'inversions planes P_1, P_2, ..., P_{k-1}, suivies généralement d'une inversion sphérique I_k.

On peut toujours supposer que k soit impair. Car toute inversion sphérique I_k, dont la sphère principale est (S_k), peut être remplacée par trois inversions planes relatives à trois plans rectangulaires passant par le centre de (S_k) et par une inversion relative à la sphère (S'_k) qui est concentrique à (S_k) et a son rayon égal à celui de (S_k) multiplié par $\sqrt{-1}$.

Puisqu'on peut supposer k impair, les inversions planes P_1, P_2, ..., P_{k-1} sont en nombre pair et équivalent à un déplacement.

Ainsi, dans le cas général, *une suite d'inversions peut être remplacée par un déplacement, suivi d'une seule inversion.*

En renversant les opérations, on peut dire qu'*une suite d'inversions peut aussi être remplacée par une seule inversion, suivie d'un déplacement.*

Nous avons laissé de côté le cas singulier où, au cours des opérations, on aurait rencontré des inversions ayant pour sphères principales des sphères concentriques. Cette difficulté peut se lever de la manière suivante.

Supposons qu'il reste à effectuer les inversions

$$I_h, \quad I_{h+1}, \quad \ldots, \quad I_n.$$

Si leurs sphères principales sont toutes concentriques, on verra facilement qu'elles se ramènent soit à une homothétie, soit à une seule inversion.

Si les sphères principales ne sont pas toutes concentriques, supposons que les premières

$$I_h, \quad I_{h+1}, \quad \ldots \quad I_{h'}$$

le soient, mais que la sphère principale de la suivante $I_{h'+1}$ n'ait pas même centre que les précédentes. Alors, d'après la théorie précédente, on pourra remplacer $I_{h'}$, $I_{h'+1}$, d'une infinité de manières, par deux inversions dont les pôles seront changés. Il faudra donc

retirer $I_{h'}$ de la série précédente. En continuant de même, on finira par avoir des inversions dont les sphères principales ne seront pas concentriques.

Ainsi, le cas singulier que nous venons d'examiner n'a d'intérêt que si toutes les inversions ont leurs sphères principales concentriques. Et alors nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Une suite quelconque d'inversions peut se ramener à une homothétie, précédée ou suivie d'un déplacement, ou bien à une inversion, précédée ou suivie d'un déplacement.

243. Si nous sommes entrés dans les développements qui précèdent, c'est surtout pour indiquer la manière dont on réduira les diverses transformations successives. Quant au théorème lui-même, on aurait pu l'établir directement de la manière suivante.

Considérons une suite quelconque d'inversions, appliquées successivement. Elles réalisent une transformation ponctuelle qui jouit évidemment de la propriété suivante : A tout plan ou à toute sphère de la figure primitive correspond un plan ou une sphère de la figure transformée.

Cherchons donc d'une manière générale toutes les transformations dans lesquelles, à un plan ou à une sphère, correspond un plan ou une sphère.

Soient A un point de la première figure (F) et A' le point correspondant de la seconde (F'). A toute sphère passant par A correspondra une sphère passant par A'. Si donc on soumet (F) à une inversion de pôle A qui donnera (F_1) et (F') à une inversion de pôle A' qui donnera (F'_1), la correspondance entre (F_1), (F'_1) sera telle qu'à un plan de (F_1) correspondra un plan de (F'_1). Donc, d'après les résultats que nous avons établis, ce sera une correspondance homographique.

D'autre part, elle doit encore transformer une sphère en une sphère. Donc elle doit conserver le cercle et le plan de l'infini, et, par suite, se ramener (n° 59) à un déplacement ou à une symétrie, précédés ou suivis, s'il y a lieu, d'une homothétie.

Revenons aux figures (F) et (F'). D'après les résultats obtenus, on peut dire qu'aux plans de la première correspondent des sphères de la seconde passant par un point fixe B.

Il suffira donc d'appliquer à la seconde figure une inversion ayant B pour pôle pour en déduire une figure (F'_1) qui sera, avec (F), dans la relation précédemment définie. Ainsi, toute transformation ponctuelle dans laquelle à une sphère correspond une sphère se réduit à des déplacements et des homothéties, ou à un déplacement, précédé ou suivi d'une inversion.

244. Nous bornerons là notre étude de l'inversion; mais nous ferons remarquer en terminant que la propriété fondamentale relative à la conservation des angles peut s'établir analytiquement de la manière suivante.

Reprenons les formules (1) et supposons que le point $m(x, y, z)$ subisse un déplacement infiniment petit, ses coordonnées devenant $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Le point M (X, Y, Z) subira lui aussi un déplacement infiniment petit et ses coordonnées deviendront $(X+dX, Y+dY, Z+dZ)$. Un calcul facile nous donnera la relation

$$dX^2+dY^2+dZ^2=\frac{R^4}{(x^2+y^2+z^2)^2}(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{4}$$

Cette formule, à laquelle on pourrait joindre la suivante, relative à deux déplacements,

$$dX\,\delta X+dY\,\delta Y+dZ\,\delta Z=\frac{R^4}{(x^2+y^2+z^2)^2}(dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z), \tag{5}$$

nous montre que l'inversion assure la similitude des infiniment petits et, par conséquent, la conservation des angles. Cette propriété *caractérise* les transformations composées de déplacements, d'homothéties ou d'inversions. On pourra lire la démonstration de ce résultat dans les Traités de Géométrie infinitésimale [1].

---

[1] *Voir* par exemple DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, Livre II, Chapitre I.

CHAPITRE II.

LES COORDONNÉES PENTASPHÉRIQUES.

Relation quadratique homogène entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères distinctes. — Définition du système de coordonnées pentasphériques le plus général; on se bornera, dans la suite, au cas où les sphères coordonnées sont orthogonales. — La théorie de cinq sphères deux à deux orthogonales se rattache directement à celle des substitutions linéaires orthogonales. — Conséquences, relations identiques entre les puissances d'un point relatives à cinq sphères orthogonales. — Chacune des cinq sphères admet pour tétraèdre conjugué celui qui est formé par les centres des quatre autres. — Groupe de 16 points, dont les coordonnées ne diffèrent que par le signe —. Élément linéaire de l'espace. — Angle de deux directions. — Sphères et plans. — Comment on détermine le centre et le rayon d'une sphère dont l'équation est donnée. — Les six coordonnées d'une sphère; formules qui s'y rapportent. — Changement de coordonnées. — Problèmes élémentaires relatifs aux sphères. — Formules de Géométrie infinitésimale en coordonnées pentasphériques.

---

245. Nous avons reconnu, au cours de nos études précédentes, qu'à chaque transformation est lié un système particulier de coordonnées. A l'homographie se rattachent les coordonnées tétraédriques, qui permettent de comprendre dans une même étude, en même temps qu'une figure, toutes celles qui lui sont homographiques. A la corrélation correspondent de même, et dans les mêmes conditions, les coordonnées tangentielles. Nous allons voir qu'à l'inversion on peut rattacher aussi un système de coordonnées particulier : les coordonnées *pentasphériques*.

Nous commencerons par établir une relation fondamentale entre les puissances d'un point, prises par rapport à cinq sphères distinctes.

Soient

$$(1)\qquad S_i=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2-R_i^2=0 \quad (i=1,2,3,4,5,6),$$

les équations de six sphères distinctes (S_1), ..., (S_6). La quantité

$$(2)\qquad K_{ij}=(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2-R_i^2-R_j^2$$

s'appellera la *puissance commune des deux sphères* (S_i), (S_j); il est clair qu'elle est nulle quand les deux sphères sont orthogonales et que, si l'une des sphères se réduit à un point, elle devient la *puissance* de ce point par rapport à l'autre sphère.

Cela posé, considérons les deux systèmes linéaires

$$| \ x_i^2+y_i^2+z_i^2-R_i^2 \quad x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1 \ |$$

et

$$| \ 1 \quad -2x_i \quad -2y_i \quad -2z_i \quad x_i^2+y_i^2+z_i^2-R_i^2 \ |$$

formés, l'un et l'autre, de six lignes correspondant aux valeurs 1, 2, ..., 6 de i.

D'après le théorème de Binet et Cauchy, le nombre des colonnes étant inférieur à celui des lignes, le déterminant des éléments K_{ij} obtenus en multipliant les lignes des deux systèmes sera nul. Ainsi l'on aura

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{61} & K_{62} & \dots & \dots & \dots & K_{66} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons maintenant que la sixième sphère ait son rayon nul et désignons les coordonnées de son centre par x, y, z (au lieu de x_6, y_6, z_6). On aura

$$K_{6h} = K_{h6} = (x-x_h)^2 + (y-y_h)^2 + (z-z_h)^2 - R_h^2 = S_h,$$

h étant différent de 6, et S_h désignant la puissance du point (x, y, z) par rapport à la sphère (S_h). On a, d'ailleurs,

$$K_{66} = 0.$$

La relation (3) prendra donc la forme

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & .. & S_1 \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \dots & \dots & .. & S_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. & .. \\ K_{51} & K_{52} & \dots & \dots & \dots & .. & S_5 \\ S_1 & S_2 & \dots & \dots & \dots & S_5 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et il est ainsi établi *qu'il y a une relation homogène du second degré entre les puissances d'un point quelconque de l'espace par rapport à cinq sphères distinctes.*

Cela conduit à déterminer un point par les rapports mutuels de ses puissances relativement à cinq sphères quelconques. On aura ainsi, pour la première fois, un système de *coordonnées surabondantes* qui devront satisfaire à la relation (4).

246. Après avoir indiqué la forme la plus générale de ce système de coordonnées, nous allons nous borner, pour plus de simplicité, au cas où les sphères qui lui servent de base sont orthogonales.

Écrivons l'équation d'une sphère sous la forme

$$H(x^2+y^2+z^2)+2Ax+2By+2Cz+K=0; \tag{5}$$

son rayon ρ sera donné par la formule

$$\rho^2=\frac{A^2+B^2+C^2-HK}{H^2}, \tag{6}$$

où le numérateur est une forme quadratique des coefficients. Cette forme quadratique joue un rôle important dans la théorie de la sphère. Il y a intérêt à la ramener à une somme de carrés et à écrire l'équation (5) sous la forme

$$2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}+i\varepsilon\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R}=0, \tag{7}$$

R désignant une constante quelconque, que nous supposerons réelle.

Alors les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre de la sphère et son rayon ρ seront données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} &x_0=\frac{-\alpha R}{\delta+i\varepsilon}, \qquad y_0=\frac{-\beta R}{\delta+i\varepsilon}, \qquad z_0=\frac{-\gamma R}{\delta+i\varepsilon};\\ &\rho=\frac{R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2}}{\delta+i\varepsilon}, \qquad x_0^2+y_0^2+z_0^2-\rho^2=-R^2\frac{\delta-i\varepsilon}{\delta+i\varepsilon}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Si la sphère n'est pas de rayon nul, on pourra poser

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2=1, \tag{9}$$

et le rayon sera déterminé, *en grandeur et en signe*, par la formule

$$\rho=\frac{R}{\delta+i\varepsilon}. \tag{10}$$

Avec l'hypothèse (9), le premier membre de l'équation (7) aura une signification géométrique déterminée. On aura

$$(11)\qquad 2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}$$
$$+i\varepsilon\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R}=\frac{S}{\rho}\quad\text{ou}\quad 2P,$$

S étant la puissance du point relativement à la sphère et P désignant, quand la sphère se réduit à un plan, la distance à ce plan, affectée de signe.

Associons à la sphère précédente une autre sphère, définie par l'équation

$$2\alpha' x+2\beta' y+2\gamma' z+\delta'\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}+i\varepsilon'\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R}=0,$$

obtenue en accentuant toutes les lettres, et pour laquelle on aura encore

$$(12)\qquad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\varepsilon'^2=1;$$

il viendra, x'_0, y'_0, z'_0, ρ' se rapportant à cette nouvelle sphère,

$$(13)\qquad (x_0-x'_0)^2+(y_0-y'_0)^2+(z_0-z'_0)^2-\rho^2-\rho'^2$$
$$=-2\rho\rho'(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\varepsilon\varepsilon').$$

Si donc on définit l'angle V de deux sphères par la relation

$$(14)\qquad d^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos V,$$

où d désigne la distance des centres, on obtiendra la formule fondamentale

$$(15)\qquad \cos V=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\varepsilon\varepsilon',$$

qui subsiste encore si l'une ou l'autre des sphères se réduit à un plan.

Si l'on ne supposait pas satisfaites les relations (9) et (12), on aurait

$$(16)\qquad \cos V=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\varepsilon\varepsilon'}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2}\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\varepsilon'^2}},$$

et l'angle serait moins bien défini.

La formule (15) permet de rattacher la théorie des sphères

orthogonales à celle des substitutions orthogonales. On voit, en effet, que si l'on considère un groupe de cinq sphères (S_k) définies par les équations

$$(17)\quad \frac{S_k}{R_k} = 2\alpha_k x + 2\beta_k y + 2\gamma_k z + \delta_k \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\varepsilon_k \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = 0,$$

où R_k désigne le rayon de (S_k) et où l'on a

$$(18)\quad \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 + \delta_k^2 + \varepsilon_k^2 = 1,$$

elles seront deux à deux orthogonales si l'on a

$$(19)\quad \alpha_k\alpha_{k'} + \beta_k\beta_{k'} + \gamma_k\gamma_{k'} + \delta_k\delta_{k'} + \varepsilon_k\varepsilon_{k'} = 0 \qquad (k \neq k'),$$

c'est-à-dire si les coefficients α_k, β_k, ... sont les éléments d'une substitution orthogonale de 25 éléments.

Ces substitutions dépendent de dix arbitraires, ce qui est bien d'accord avec les considérations géométriques. Leurs propriétés bien connues vont nous fournir les résultats essentiels. On sait que les équations (18) et (19) sont équivalentes aux suivantes :

$$(20)\quad \Sigma\alpha_i^2 = 1, \qquad \Sigma\beta_i^2 = 1, \qquad \Sigma\gamma_i^2 = 1, \qquad \Sigma\delta_i^2 = 1, \qquad \Sigma\varepsilon_i^2 = 1$$

et

$$(21)\quad \begin{cases} \Sigma\alpha_i\beta_i = 0, & \Sigma\alpha_i\gamma_i = 0, & \Sigma\alpha_i\delta_i = 0, & \Sigma\alpha_i\varepsilon_i = 0, \\ \Sigma\beta_i\gamma_i = 0, & \Sigma\beta_i\delta_i = 0, & \Sigma\beta_i\varepsilon_i = 0, & \\ \Sigma\gamma_i\delta_i = 0, & \Sigma\gamma_i\varepsilon_i = 0, & \Sigma\delta_i\varepsilon_i = 0, & \end{cases}$$

où les sommes sont étendues aux valeurs 1, 2, ..., 5 de l'indice i. Si l'on se rappelle que les rayons R_k sont déterminés par la formule

$$(22)\quad R_k = \frac{R}{\delta_k + i\varepsilon_k},$$

les formules précédentes conduisent immédiatement aux trois identités

$$(23)\quad \sum\left(\frac{S_k}{R_k}\right)^2 = 0, \qquad (24)\quad \sum\frac{S_k}{R_k^2} = -2, \qquad (25)\quad \sum\frac{1}{R_k^2} = 0,$$

dont nous aurons à faire usage plus particulièrement. Remarquons, une fois pour toutes, que, si l'une des sphères S_k se réduit à un

plan, $\frac{S_k}{R_k}$ doit être remplacée par le double $2P_k$ de la distance à ce plan. Le terme correspondant disparaîtra donc dans les identités (24) et (25).

L'identité (23) est celle qui remplace la relation (4) quand les sphères deviennent orthogonales. On peut en déduire toute la théorie de ce groupe de sphères. Par exemple, si l'on considère la sphère (S_h), il résulte de l'identité (23) que son équation peut aussi être écrite

$$\sum_{k=1}^{k=5} \frac{(S_k - S_h)^2}{R_k^2} = 0, \tag{26}$$

et, sous cette forme, elle s'interprète aisément. Car elle exprime que les quatre plans radicaux de la sphère (S_h) et des quatre autres sphères forment un tétraèdre conjugué de (S_h). Comme le plan radical de (S_k) et de (S_h) est le plan polaire par rapport à (S_h) du centre de (S_k), le tétraèdre conjugué dont il vient d'être question a pour sommets les centres des quatre sphères autres que (S_h). Ainsi, *chacune des sphères est conjuguée par rapport au tétraèdre formé par les centres des quatre autres.*

Si l'on désigne par x_k, y_k, z_k les coordonnées du centre de (S_k), l'identité (23) fournit les relations

$$\left\{ \begin{array}{lll} \sum_1^5 \frac{x_k}{R_k^2} = 0, & \sum_1^5 \frac{y_k}{R_k^2} = 0, & \sum_1^5 \frac{z_k}{R_k^2} = 0, \\ \sum_1^5 \frac{y_k z_k}{R_k^2} = 0, & \sum_1^5 \frac{z_k x_k}{R_k^2} = 0, & \sum_1^5 \frac{x_k y_k}{R_k^2} = 0, \end{array} \right. \tag{27}$$

où x_k, y_k, z_k désignent les coordonnées du centre de (S_k) et dont l'interprétation n'offre aucune difficulté.

247. Ces préliminaires une fois admis, nous donnerons la définition précise des coordonnées pentasphériques. Elles auront pour expressions

$$x_k = \lambda \frac{S_k}{R_k} \quad \text{ou} \quad x_k = 2\lambda P_k, \tag{28}$$

λ désignant un facteur de proportionnalité. Ce sont des *coordon-*

nées homogènes surabondantes, qui, d'après l'identité (23), doivent satisfaire à la relation

$$\Sigma x_k^2 = 0. \tag{29}$$

Le facteur de proportionnalité se détermine si l'on fait usage de l'identité (24), qui nous donne

$$\sum \frac{x_i}{R_i} = -2\lambda. \tag{30}$$

Au reste, on peut le retrouver et obtenir les coordonnées rectangulaires x, y, z en résolvant les équations

$$2\alpha_k x + 2\beta_k y + 2\gamma_k z + \delta_k \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\varepsilon_k \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = \frac{x_k}{\lambda} \tag{31}$$

qui donnent

$$\left\{\begin{array}{lll} 2\lambda x = \Sigma\, \alpha_k x_k, & 2\lambda y = \Sigma\, \beta_k x_k, & 2\lambda z = \Sigma\, \gamma_k x_k, \\ \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2) = & R\,\Sigma\, \delta_k x_k, & \\ \lambda(x^2+y^2+z^2+R^2) = - iR\,\Sigma\, \varepsilon_k x_k, & & \end{array}\right. \tag{32}$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{array}{l} 2\lambda = -\frac{1}{R}\Sigma\, x_k(\delta_k + i\varepsilon_k) = -\sum \frac{x_k}{R_k}, \\ 2\lambda(x^2+y^2+z^2) = R\,\Sigma\, x_k(\delta_k - i\varepsilon_k). \end{array}\right. \tag{33}$$

248. Au début, nous avons fait remarquer que le nouveau système de coordonnées permet d'étudier, en même temps qu'une figure, toutes ses inverses. C'est un point que nous pouvons établir dès maintenant.

Employons l'analyse et soit, en coordonnées rectangles,

$$S = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 - R^2 = 0 \tag{34}$$

l'équation d'une sphère quelconque (S). Si on la soumet à l'inversion définie par les formules

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{k^2}{X'^2+Y'^2+Z'^2}, \tag{35}$$

on aura identiquement

$$S = \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{X'^2+Y'^2+Z'^2} S', \tag{36}$$

S' ayant l'expression suivante :

$$S' = \left(X' - \frac{k^2 x}{x^2+y^2+z^2-R^2}\right)^2 + \left(Y' - \frac{k^2 y}{x^2+y^2+z^2-R^2}\right)^2 + \left(Z' - \frac{k^2 z}{x^2+y^2+z^2-R^2}\right)^2 - \frac{k^4 R^2}{(x^2+y^2+z^2-R^2)^2}.$$

A la sphère (S) correspondra la sphère (S') obtenue en égalant S' à zéro. Les coordonnées x', y', z' du centre de cette sphère et son rayon, *auquel on attribuera un signe convenable*, seront déterminés par les formules

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{R'}{R} = \frac{k^2}{x^2+y^2+z^2-R^2} \tag{37}$$

qui seraient celles de l'inversion, appliquées dans un espace à quatre dimensions, à un point de coordonnées rectangulaires x, y, z et Ri.

En tenant compte des formules précédentes, l'équation (36) prend la forme

$$\frac{S}{R} = \frac{k^2}{X'^2+Y'^2+Z'^2}\frac{S'}{R'} \tag{38}$$

ou, mieux encore,

$$\frac{S}{\rho R} = \frac{S'}{\rho' R'}, \tag{39}$$

ρ et ρ' désignant les distances au pôle de l'inversion des points qui se correspondent dans les deux figures.

La formule précédente montre que les rapports mutuels des quantités $\frac{S}{R}$ ne sont pas altérés par une inversion quelconque. En particulier, nous voyons qu'appliquée à une figure quelconque, l'inversion ne change pas les coordonnées pentasphériques de ses points, pourvu que les coordonnées des nouveaux points soient prises par rapport aux cinq sphères orthogonales que l'inversion fait dériver des cinq sphères coordonnées primitives, et dont le rayon est défini en grandeur et en signe.

249. On peut déduire des formules (37) quelques conséquences intéressantes. Appliquons-les d'abord à une sphère orthogonale à la sphère principale et pour laquelle on a, par conséquent,

$$x^2+y^2+z^2-R^2 = k^2.$$

Elles nous donnent

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad R = R'.$$

Ainsi, toute sphère orthogonale à la sphère principale conserve à la fois son centre, ce qui était évident *a priori*, et son rayon *avec le signe qui lui a été attribué.*

Au contraire, pour la sphère principale, on a

$$x = y = z = 0, \qquad R = \pm k, \qquad R' = -R.$$

Le rayon R est donc changé de signe par l'inversion.

On voit donc que, si l'on change le signe d'une seule des cinq coordonnées pentasphériques x_k, cela revient à remplacer le point par son inverse relativement à (S_k). Et de là on peut déduire que *cinq inversions successives par rapport aux cinq sphères coordonnées se détruisent*, puisqu'elles ont pour effet de changer le signe de toutes les coordonnées.

Si l'on envisage le groupe des seize points dont les coordonnées sont

$$\pm x_1, \quad \pm x_2, \quad \pm x_3, \quad \pm x_4, \quad \pm x_5,$$

on reconnaît qu'ils se déduisent de l'un quelconque d'entre eux par les inversions qui admettent comme sphères principales les sphères coordonnées.

250. Nous devons insister maintenant sur une propriété particulièrement intéressante de notre système de coordonnées. C'est une espèce d'axiome qu'un point devrait toujours être bien défini par ses coordonnées, et que deux systèmes de valeurs différentes des coordonnées devraient donner deux points différents. *Ni l'une ni l'autre de ces propriétés n'est ici pleinement vérifiée.* Elles sont vraies seulement pour les points à distance finie, et tombent en défaut pour les points à l'infini.

Si l'on rend, en effet, homogènes les formules (31) en y remplaçant x par $\frac{x}{t}$ et λ par $\frac{\lambda}{t^2}$, elles deviennent

$$(40) \qquad \frac{1}{\lambda} x_k = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R_k} + 2\alpha_k x t + 2\beta_k y t + 2\gamma_k z t + \frac{i\varepsilon_k - \delta_k}{2} R t^2.$$

On voit déjà que, pour tous les points du plan de l'infini non

situés sur le cercle de l'infini, les coordonnées sont les mêmes. On peut prendre, pour tout point de ce plan,

$$x_k = \frac{1}{R_k}, \tag{41}$$

et ces coordonnées conviennent à tout point du plan de l'infini, en sorte que leur valeur ne permet pas de distinguer l'un de l'autre les différents points de ce plan.

Au contraire, pour tout point du cercle de l'infini, les coordonnées sont indéterminées, et, si l'on désigne par θ la limite du rapport

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2t},$$

lorsqu'on s'approche d'un point P du cercle de l'infini, on peut prendre pour ces coordonnées les valeurs

$$x_k = \alpha_k x + \beta_k y + \gamma_k z + \frac{\theta}{R_k}, \tag{42}$$

θ étant une variable arbitraire.

Ainsi, un point du cercle de l'infini a une infinité de coordonnées de la forme

$$x_k = x'_k + \frac{\theta}{R_k}.$$

Elles satisfont évidemment, quel que soit θ, aux deux équations

$$\sum x'^2_k = 0, \qquad \sum \frac{x'_k}{R_k} = 0, \tag{43}$$

qui définissent le cercle de l'infini.

Les résultats que nous venons d'obtenir sont en corrélation avec la propriété qu'a le système de coordonnées d'être indifférent à l'inversion. Cette transformation a, en effet, la double propriété : 1° de faire correspondre un seul point à tous les points du plan de l'infini qui sont hors du cercle de l'infini; 2° de faire correspondre à un point du cercle de l'infini tout point de la droite isotrope qui le joint au pôle de l'inversion. Il faut donc que tous les points du plan de l'infini hors du cercle de l'infini aient mêmes coordonnées qu'un point unique, et que tous les points du cercle de l'infini aient une infinité de coordonnées, toutes celles des points en lesquels les transforme l'inversion considérée.

251. Les relations que nous avons établies nous conduisent sans difficulté aux résultats suivants.

Soient x_k, x'_k les coordonnées de deux points M, M'. On trouve, en appliquant les formules (32),

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = \frac{-2\Sigma x_k x'_k}{\sum \frac{x_k}{\mathrm{R}_k} \sum \frac{x'_k}{\mathrm{R}_k}}, \tag{44}$$

ce que l'on peut écrire, en tenant compte de l'identité (23),

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = \frac{\Sigma(x_k - x'_k)^2}{\sum \frac{x_k}{\mathrm{R}_k} \sum \frac{x'_k}{\mathrm{R}_k}}; \tag{45}$$

et l'on déduit de là, quand les deux points sont infiniment voisins, la formule fondamentale

$$ds^2 = \frac{\Sigma\, dx_k^2}{\left(\sum \frac{x_k}{\mathrm{R}_k}\right)^2}, \tag{46}$$

qui donne l'élément linéaire de l'espace. En changeant dx_k en $dx_k + \mu\, dx_k$, et égalant les coefficients de μ dans les deux membres, on obtient la formule plus générale

$$ds\, \delta s \cos(ds, \delta s) = \frac{\Sigma\, dx_k\, \delta x_k}{\left(\sum \frac{x_k}{\mathrm{R}_k}\right)^2}, \tag{47}$$

qui, jointe à la précédente, donne l'angle de deux directions.

252. Passons maintenant aux sphères et aux plans. D'après les formules (32), l'équation d'un plan ou d'une sphère quelconque sera de la forme

$$\sum_1^5 m_k x_k = 0. \tag{48}$$

Ici encore, on voit que les points du cercle de l'infini ne sauraient avoir des coordonnées fixes. Sans cela, les constantes m_k devraient vérifier des équations de condition.

La formule (44) nous permet aussi d'écrire l'équation d'une sphère dont le rayon est ρ et dont le centre a pour coordon-

nées $x_k = a_k$. On a ainsi

$$2\Sigma a_k x_k + \rho^2 \sum \frac{a_k}{R_k} \sum \frac{x_k}{R_k} = 0. \tag{49}$$

En identifiant cette équation et la précédente, on aura le centre et le rayon de la sphère définie par l'équation (48). Un calcul facile nous donne le résultat suivant :

$$a_k = m_k - \frac{1}{2R_k} \frac{\Sigma m_k^2}{\sum \frac{m_k}{R_k}}, \qquad \rho = \pm \frac{\sqrt{\Sigma m_k^2}}{\sum \frac{m_k}{R_k}}. \tag{50}$$

La sphère se réduira à un plan si l'on a

$$\sum_1^5 \frac{m_k}{R_k} = 0. \tag{51}$$

La présence du radical dans les formules (50) nous conduit à introduire une sixième quantité m_6, définie par la condition

$$im_6 = \pm \sqrt{\sum_1^5 m_k^2}, \tag{52}$$

ou

$$\sum_1^6 m_k^2 = 0, \tag{53}$$

qui permettra, une fois connue, de définir le rayon, en grandeur et en signe, par la formule

$$\rho = \frac{im_6}{\sum_1^5 \frac{m_k}{R_k}}, \tag{54}$$

et d'introduire ce dédoublement de la sphère qui est si précieux et apporte tant de netteté dans une foule de recherches. La première formule (50) pourra s'écrire alors

$$a_k = m_k - \frac{i\rho m_6}{2R_k}, \tag{55}$$

et l'on aura, pour tout point de l'espace, l'identité

$$\sum_1^5 m_k x_k = im_6 \frac{S}{\rho}. \tag{56}$$

Lorsque la sphère se réduira à un plan, il faudra remplacer $\frac{S}{\rho}$ par le double de la distance, affectée de signe, à ce plan.

253. Dans ces derniers temps, plusieurs géomètres, et *Plücker* au premier rang, ont eu l'idée d'étendre aux êtres géométriques les plus complexes la notion de coordonnées qui, introduite par *Descartes* pour les points, avait été déjà employée pour les plans, en vertu du principe de dualité. Les six quantités m_k, liées par l'équation identique (53), déterminent complètement une sphère. Nous dirons qu'elles sont *ses coordonnées*. Ces coordonnées sont à la fois *homogènes et surabondantes*. Si l'on éliminait m_6, la sphère ne cesserait pas d'être bien déterminée, le signe seul de son rayon demeurerait indécis.

Les formules que nous avons données permettent de traiter toutes les questions relatives à la Géométrie des sphères. Soient, par exemple, (S), (S′) deux sphères ayant les coordonnées m_k, m'_k. Si ρ et ρ' sont leurs rayons, a_k et a'_k les coordonnées de leurs centres, la distance d de ces centres sera donnée par la formule

$$(57) \qquad d^2 = -\frac{2\sum a_k a'_k}{\sum \frac{a_k}{R_k} \sum \frac{a'_k}{R_k}} = -2\frac{\sum_1^5 m_k m'_k}{\sum \frac{m_k}{R_k} \sum \frac{m'_k}{R_k}} + \rho^2 + \rho'^2.$$

Si donc nous voulons calculer l'angle V des deux sphères, en le définissant d'une manière précise par la relation (24), nous aurons, en appliquant les formules (54), (57),

$$(58) \qquad m_6 m'_6 \cos V = -\sum_1^5 m'_k m_k.$$

Ces formules vont nous conduire à la définition géométrique des coordonnées de la sphère. Supposons que la sphère (S′) se réduise à l'une des sphères coordonnées. Pour (S_k), par exemple, toutes les coordonnées sont nulles, sauf m_k, que l'on peut prendre égale à 1, et m_6 qui doit alors être égale à $-i$, d'après la formule (54). Si V_k désigne l'angle de (S) et de (S_k), on aura donc

$$(59) \qquad m_k = i m_6 \cos V_k,$$

d'où il suit que la formule (58) se mettra sous la forme

$$(60) \qquad \cos V = \sum_1^5 \cos V_k \cos V'_k,$$

et que l'on aura l'identité

$$(61) \qquad \Sigma \cos^2 V_k = 1.$$

Il est inutile de souligner l'analogie de ces relations avec celles qui se rapportent aux coordonnées cartésiennes.

Revenons à la formule (58). Nous en déduisons la suivante :

$$(62) \qquad 2 m_6 m'_6 \sin^2 \frac{V}{2} = \sum_1^6 m_k m'_k,$$

qui, en tenant compte de l'identité fondamentale (53), peut s'écrire

$$(63) \qquad 4 m_6 m'_6 \sin^2 \frac{V}{2} = -\sum_1^6 (m_k - m'_k)^2.$$

Appliquée à deux sphères infiniment voisines, cette équation nous donne, pour leur angle dv, l'expression

$$(64) \qquad dv^2 = -\frac{1}{m_6^2} \sum_1^6 dm_k^2.$$

Notons enfin qu'appliquée à une sphère et à un point, l'équation (57) nous conduira à la relation

$$(65) \qquad \frac{d^2 - \rho^2}{\rho} = \frac{S}{\rho} = \frac{2i}{m_6} \frac{\Sigma m_k x_k}{\sum \frac{x_k}{R_k}},$$

S étant la puissance du point par rapport à la sphère.

254. Ces différentes formules vont nous permettre d'élucider la question suivante :

Effectuons sur les coordonnées une substitution linéaire orthogonale, qui sera définie par les équations

$$(66) \qquad x_k = \sum_1^5 a_{kk'} y_{k'} \qquad (k, k' = 1, 2, 3, 4, 5)$$

et entraînera l'identité

$$\Sigma x_k^2 = \Sigma y_k^2. \tag{67}$$

Les coefficients $a_{kk'}$ seront liés par les relations bien connues

$$\sum_k a_{kk'}^2 = 1, \quad \sum_k a_{kk'} a_{kk''} = 0, \quad \sum_{k'} a_{kk'}^2 = 1, \quad \sum_{k''} a_{kk''} a_{k'k''} = 0, \tag{68}$$

qui laissent subsister dix arbitraires. On pourra envisager la substitution sous deux points de vue différents :

1° On pourra résoudre les équations par rapport aux y_k, ce qui donnera

$$y_k = \sum_{k'} a_{k'k} x_{k'}, \tag{69}$$

et envisager les cinq sphères (σ_k) définies par les équations

$$\sum_{k'} a_{k'k} x_k = 0,$$

et pour lesquelles nous prendrons $-i$ comme sixième coordonnée. En vertu des relations (68), ces sphères sont évidemment orthogonales. Alors, si nous désignons par ρ_k le rayon de la sphère (σ_k) et par σ_k la puissance du point $(x_1, \ldots, x_5)$ par rapport à cette sphère, la formule (65) nous conduira aux suivantes :

$$\frac{\sigma_k}{\rho_k} = \frac{-2\sum\limits_{k'} a_{k'k} x_{k'}}{\sum\limits_{k'} \frac{x_{k'}}{R_{k'}}} = \frac{y_k}{\lambda}, \tag{70}$$

λ étant le facteur de proportionnalité qui entre dans la définition (30) des x_k et nous donne

$$x_k = \lambda \frac{S_k}{R_k}.$$

Ainsi, on peut dire que les quantités y_k sont cinq nouvelles coordonnées du point considéré, rapportées aux cinq nouvelles sphères (σ_k) avec le même coefficient de proportionnalité. Remarquons que les rayons de ces sphères orthogonales sont bien définis, en grandeur et en signe.

Il y a là une analogie évidente avec le changement d'axes rectangulaires.

2° Considérons maintenant les formules (66) comme réalisant une transformation ponctuelle, les x_i et les y_i étant les coordonnées de deux points, *rapportés aux sphères coordonnées primitives*. Comme cette transformation fait correspondre une relation linéaire entre les y_i à toute relation linéaire entre les x_i, elle fera correspondre une sphère à une sphère; elle sera donc de la nature de celles que nous avons étudiées plus haut et qui résultent de la composition d'inversions, de déplacements et d'homothéties (n° 242).

Soient M, M' deux points, de coordonnées x_k et x'_k respectivement, auxquels correspondent deux points P, P' de coordonnées y_k et y'_k. On a, d'après la formule,

$$\overline{MM'}^2 = \frac{-2\Sigma x_k x'_k}{\sum \frac{x_k}{R_k} \sum \frac{x'_k}{R_k}}, \qquad \overline{PP'}^2 = -\frac{2\Sigma y_k y'_k}{\sum \frac{y_k}{R_k} \sum \frac{y'_k}{R_k}}.$$

Comme, d'après les formules de la substitution orthogonale, on a

$$\Sigma x_k x'_k = \Sigma y_k y'_k,$$

il viendra

$$\frac{\overline{MM'}^2}{\overline{PP'}^2} = \frac{\sum \frac{y_k}{R_k} \sum \frac{y'_k}{R_k}}{\sum \frac{x_k}{R_k} \sum \frac{x'_k}{R_k}}.$$

Pour que la transformation considérée résulte d'une simple combinaison d'homothéties, de déplacements et de symétries, il faudra que le rapport $\frac{MM'}{PP'}$ soit constant, c'est-à-dire que l'on ait, comme conséquence des formules de substitution,

$$\sum \frac{y_k}{R_k} = h \sum \frac{x_k}{R_k}, \tag{71}$$

h étant une constante qui sera nécessairement différente de l'unité quand la transformation comprendra une homothétie. On obtiendrait des relations équivalentes en exprimant que le plan de l'infini se correspond à lui-même.

255. Nous terminerons cette partie élémentaire de notre étude en montrant comment les formules précédentes permettent de résoudre les problèmes les plus difficiles de la géométrie de la sphère. Envisageons, par exemple, le problème suivant :

Trouver une sphère coupant quatre sphères données sous des angles donnés.

Soient a_k, b_k, c_k, d_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ les coordonnées respectives des quatre sphères données; soient, de même, $m_1, \ldots, m_6$ les coordonnées de la sphère cherchée, qui doit couper les sphères données sous des angles donnés V_1, V_2, V_3, V_4. La formule (58) nous donne immédiatement les conditions suivantes :

$$(72) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_5 m_5 &= - a_6 m_6 \cos V_1, \\ b_1 m_1 + b_2 m_2 + \ldots + b_5 m_5 &= - b_6 m_6 \cos V_2, \\ c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_5 m_5 &= - c_6 m_6 \cos V_3, \\ d_1 m_1 + d_2 m_2 + \ldots + d_5 m_5 &= - d_6 m_6 \cos V_4, \end{aligned} \right.$$

auxquelles il faut joindre la relation identique

$$(73) \qquad m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_5^2 + m_6^2 = 0,$$

entre les coordonnées m_i. Nous avons cinq relations pour déterminer les rapports mutuels des quantités m_i. Quatre de ces relations sont linéaires, la dernière est quadratique; le problème aura donc deux solutions que l'on obtiendra sans difficulté. Si l'on prend, par exemple, comme inconnue auxiliaire, le déterminant

$$(74) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_5 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_5 \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_5 \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_5 \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_5 \end{vmatrix},$$

on trouve, en élevant ce déterminant au carré et en multipliant ligne par ligne,

$$(75) \qquad \Delta^2 = - a_6^2 b_6^2 c_6^2 d_6^2 m_6^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos V_{12} & \cos V_{13} & \cos V_{14} & \cos V_1 \\ \cos V_{21} & 1 & \cos V_{23} & \cos V_{24} & \cos V_2 \\ \cos V_{31} & . & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \cos V_3 \\ \cos V_{41} & . & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \cos V_4 \\ \cos V_1 & . & \ldots\ldots & \cos V_4 & 1 \end{vmatrix},$$

V_{ik} désignant l'angle des deux sphères données de rangs i et k. On tirera de là une équation de la forme

$$\Delta = \pm D m_6, \tag{76}$$

qui sera du premier degré et qui, jointe aux relations (72), déterminera les rapports mutuels des six inconnues m_i.

256. Pour obtenir les constructions géométriques, nous nous appuierons sur les remarques suivantes :

Toute relation linéaire

$$\sum_1^6 A_k m_k = 0 \tag{77}$$

entre les six coordonnées m_k d'une sphère exprime que cette sphère coupe une sphère fixe sous un angle constant.

Il suffit de comparer la relation précédente à la formule (58). Si l'on considère la sphère définie par l'équation

$$\sum_1^5 A_k x_k = 0. \tag{78}$$

et dont la sixième coordonnée est, par conséquent,

$$\alpha_6 = i\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2}, \tag{79}$$

la relation (77) exprime que la sphère variable coupe la sphère précédente sous un angle V défini par la formule

$$A_6 = \alpha_6 \cos V. \tag{80}$$

On voit que l'angle V est droit lorsque A_6 est nul, c'est-à-dire lorsque m_6 ne figure pas dans la relation linéaire.

D'après cela, considérons d'abord une sphère variable (S) assujettie à couper sous des angles donnés deux sphères fixes (A) et (B).

Si les équations de ces sphères sont

$$\sum_1^5 a_k x_k = 0, \qquad \sum_1^5 b_k x_k = 0, \tag{81}$$

les coordonnées m_k de (S) satisferont à deux équations

$$(82) \qquad \sum_1^5 a_k m_k + \alpha m_6 = 0, \qquad \sum_1^5 b_k m_k + \beta m_6 = 0,$$

où α et β seront des constantes. Ces constantes sont d'ailleurs liées aux sixièmes coordonnées des sphères (A) et (B) par les relations

$$(83) \qquad \alpha = a_6 \cos V_1, \qquad \beta = b_6 \cos V_2,$$

V_1 et V_2 étant les angles sous lesquels les sphères (A) et (B) sont coupées par la sphère variable.

Combinons linéairement les deux relations (82). Nous aurons une nouvelle relation linéaire

$$(84) \qquad \sum_1^5 (a_k + \lambda b_k) m_k + m_6(\alpha + \lambda\beta) = 0,$$

dont l'interprétation est évidente. Elle exprime que la sphère variable coupe, sous un angle constant, toute sphère définie par l'équation

$$(85) \qquad \Sigma(a_k + \lambda b_k) x_k = 0,$$

c'est-à-dire toute sphère passant par l'intersection de (A) et de (B). Ainsi, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'une sphère variable est assujettie à couper deux sphères fixes sous un angle constant, elle coupe aussi sous un angle constant toute sphère passant par l'intersection de ces sphères fixes.

Et comme l'on peut disposer de λ de manière à faire disparaître le terme en m_6 dans l'équation (84), nous pouvons ajouter le résultat suivant :

Parmi les sphères passant par l'intersection des sphères fixes, il y en a toujours une qui est coupée à angle droit par la sphère variable.

On peut remarquer encore que la sphère variable est assujettie à demeurer tangente aux deux sphères qui passent par l'intersection

des sphères fixes pour lesquelles λ est déterminé par l'équation

$$(86)\qquad \sum_1^5 (a_k + \lambda b_k)^2 + (\alpha + \lambda\beta)^2 = 0.$$

La proposition précédente s'étend immédiatement au cas où une sphère variable est assujettie à couper trois sphères fixes (A), (B), (C), sous des angles donnés et doit satisfaire, par conséquent, à trois relations telles que

$$(87)\qquad \sum_1^5 a_k m_k + \alpha m_6 = 0, \quad \sum_1^5 b_k m_k + \beta m_6 = 0, \quad \sum_1^5 c_k m_k + \gamma m_6 = 0.$$

En répétant le raisonnement précédent, on voit que la sphère variable doit couper sous un angle constant toute sphère définie par l'équation

$$(88)\qquad \sum_1^5 (a_k + \lambda b_k + \mu c_k) x_k = 0,$$

c'est-à-dire toute sphère passant par l'intersection des trois sphères fixes. Cet angle sera droit pour toutes les sphères, déterminées par l'équation (88), pour lesquelles λ et μ seront liés par la relation

$$(89)\qquad \alpha + \lambda\beta + \mu\gamma = 0,$$

et qui auront, par conséquent, même plan radical. La sphère variable sera, de même, tangente à toutes les sphères pour lesquelles λ et μ satisferont à l'équation

$$(90)\qquad \sum_1^5 (a_k + \lambda b_k + \mu c_k)^2 + (\alpha + \lambda\beta + \mu\gamma)^2 = 0.$$

Les propositions précédentes vont nous permettre, comme nous l'avons annoncé, de donner la solution géométrique du problème proposé. Nous nous appuierons, pour les appliquer, sur la considération des cas particuliers où les sphères variables se réduisent à des plans.

257. Étant donnée une sphère (A) de rayon R, les plans qui la

coupent sous un angle donné V enveloppent évidemment une sphère concentrique dont le rayon r est donné par la formule

$$r = R \cos V. \tag{91}$$

D'après cela, étant données deux sphères (A_1) et (A_2), les plans qui les coupent respectivement sous des angles V_1 et V_2 sont tangents à deux sphères (A'_1) et (A'_2) concentriques à (A_1) et à (A_2). Ils vont donc passer par le centre de similitude C_{12} de (A'_1) et (A'_2). Réciproquement, tout plan passant par C_{12} et tangent à (A'_1) coupera les sphères (A_1) et (A_2) sous les angles prescrits. Il résulte d'ailleurs de l'expression (91) de r donnée plus haut que *tout plan passant par* C_{12} *et non tangent à* (A'_1) *coupera les sphères* (A_1), (A_2) *sous des angles dont les cosinus seront proportionnels à* $\cos V_1$, $\cos V_2$. Car le centre de similitude C_{12} demeure le même lorsque $\cos V_1$, $\cos V_2$ sont augmentés dans le même rapport. Nous ferons usage de cette remarque.

Le point C_{12} est toujours réel, mais le cône ayant ce point pour sommet et tangent à (A'_1), (A'_2) ne l'est pas nécessairement.

258. Revenons maintenant au problème que nous avons en vue, et cherchons les sphères qui coupent sous des angles V_1, V_2, V_3 et V_4 les sphères données (A_1), (A_2), (A_3), (A_4). Si nous nous reportons aux équations (72), nous verrons que toutes les sphères (S) définies par l'équation

$$\sum_1^5 (\lambda a_k + \mu b_k + \nu c_k + \rho\, d_k) x_k = 0, \tag{92}$$

où λ, μ, ν, ρ sont des arbitraires liées par la relation

$$\lambda a_6 \cos V_1 + \mu b_6 \cos V_2 + \nu c_6 \cos V_3 + \rho d_6 \cos V_4 = 0, \tag{93}$$

seront coupées orthogonalement par les sphères cherchées. Réciproquement, en vertu de la relation précédente, toute sphère coupant orthogonalement les différentes sphères (S) coupera les sphères (A_i) sous des angles V'_i dont les cosinus seront proportionnels à ceux des angles prescrits V_i. Examinons la suite des sphères (S).

En vertu de la relation (93) entre les paramètres λ, μ, ν, ρ, ces sphères passent par deux points, réels ou imaginaires ; et comme,

d'après leur équation, elles coupent à angle droit la sphère (B) qui est orthogonale aux quatre sphères (A_i), leur axe radical ira passer par le centre O de (B), et leurs deux points communs, réels ou imaginaires, seront conjugués par rapport à (B). Ainsi, la suite des sphères (S) peut être définie comme formée de toutes celles dont les centres sont dans un plan (P) nécessairement réel et qui sont orthogonales à (B).

Parmi toutes ces sphères (S), une infinité se réduiront à des points; ce sont celles dont les centres sont sur le cercle (C) d'intersection de la sphère (B) et du plan (P).

Par conséquent, toutes les sphères (S′) orthogonales aux sphères (S) passeront par le cercle (C); elles couperont les quatre sphères (A_i) sous des angles dont les cosinus seront proportionnels à ceux des angles prescrits; et c'est parmi ces sphères (S′) qu'il faudra chercher la solution, qui sera ainsi ramenée à celle du problème suivant : *Mener par le cercle* (C) *une sphère coupant sous l'angle prescrit une des sphères* (A_i), *choisie arbitrairement*. Examinons comment on effectuera toutes ces constructions.

D'abord, pour déterminer le plan (P), on choisira deux quelconques des sphères (A_i) et, pour chacune d'elles, on déterminera la sphère concentrique (A'_i) enveloppe des plans qui coupent (A_i) sous l'angle V_i. Le centre de similitude de C_{ij} de deux quelconques de ces sphères (A'_i), (A'_j) sera le centre d'une des sphères (S′), celle qui passe par l'intersection de (A_i) et de (A_j). Donc il appartiendra au plan (P). Ce plan sera donc bien déterminé par la condition de contenir les points C_{ij}, et il sera toujours réel.

Ayant le plan (P), nous aurons le cercle (C), qui est l'intersection par ce plan de la sphère orthogonale aux quatre sphères (A_i), et il restera à mener, par ce cercle (C), une sphère coupant l'une des sphères (A_i) sous l'angle qui aura été prescrit pour cette sphère. Il y a lieu de distinguer deux cas.

Si le cercle (C) est réel, faisons une inversion dont le pôle sera sur (C); ce cercle sera transformé en une ligne droite par laquelle devront passer les transformées des sphères (S′), qui deviendront des plans. Nous aurons à faire passer par cette droite un plan coupant sous l'angle prescrit la transformée d'une des sphères (A_i). Cela ne présentera aucune difficulté, le plan devant être tangent à une sphère concentriqué à cette transformée.

Supposons, au contraire, que le cercle (C) soit imaginaire. Alors,

les sphères de rayon nul passant par ce cercle auront des centres réels c, c'. Et si l'on fait une inversion dont le pôle soit un de ces points, les sphères (S') qui devaient passer par (C) se transformeront en sphères concentriques ayant pour centre commun le transformé de l'autre point. On sera ramené au problème suivant :

Déterminer, parmi des sphères concentriques, celles qui coupent sous un angle donné une sphère donnée.

La solution ne présente aucune difficulté; car, si l'on considère le triangle formé par les centres connus de la sphère donnée et de la sphère cherchée et par un de leurs points communs, on connaît dans ce triangle deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

259. On pourrait imaginer beaucoup d'autres constructions du problème final que nous venons de résoudre. Nous préférons insister sur le cas particulier où l'un au moins des angles V_i serait nul et où les sphères cherchées devraient, par conséquent, être tangentes à une des sphères (A_i), à (A_1) par exemple.

Dans ce cas il faut chercher parmi les sphères (S') passant par (C) celles qui sont tangentes à (A_1). Les sphères (S') coupent (A_1) suivant un cercle dont le plan est assujetti à passer par une droite d du plan (P), celle qui est l'axe radical commun aux sphères (S') et à la sphère (A_1). Cette droite se construit sans difficulté; elle est dans le plan radical de (A_1) et de l'une quelconque des sphères (S'). Lorsqu'on l'aura obtenue, il suffira de mener par elle des plans tangents à (A_1); les points de contact seront ceux des deux sphères qui donnent la solution du problème.

La droite d' qui joint ces points de contact est la polaire de d par rapport à (A_1); elle contient donc le pôle p du plan (P) par rapport à (A_1). Il est facile de voir qu'elle passe aussi par le centre radical O des quatre sphères données (A_i). En effet, la sphère (A_1) étant orthogonale à la sphère (B), le plan polaire du centre O de (B) par rapport à (A_1) est le plan radical de (B) et de (A_1). Or ce plan radical va passer par la droite d, puisque (B) est une des sphères qui contiennent le cercle (C).

On aura donc les points de contact des deux sphères cherchées

avec la sphère (A_1) en joignant le centre radical O au pôle de (P) par rapport à (A_1).

Dans le cas où les sphères cherchées doivent être tangentes aux quatre sphères (A_i), (P) devient un plan de similitude des quatre sphères, et l'on retrouve la solution de *Gergonne*. Mais celle que nous avons donnée en premier lieu est moins souvent en défaut que celle de Gergonne et peut la remplacer avec avantage dans beaucoup de cas.

260. Il ne sera pas inutile, en terminant, de remarquer que les constructions précédentes donnent implicitement la solution du problème suivant :

Déterminer une sphère coupant cinq sphères données sous des angles égaux ou, plus généralement, sous des angles dont les cosinus soient proportionnels à des nombres donnés.

Soient, en effet, (A_1), (A_2), ..., (A_5) les cinq sphères données. Nous avons vu que, pour deux quelconques d'entre elles, (A_1) et (A_2) par exemple, on saura construire la sphère (S), passant par l'intersection de (A_1) et de (A_2), que devra couper à angle droit la sphère cherchée. En combinant (A_1) successivement avec les quatre autres sphères (A_i), on obtiendra quatre sphères (S) que la sphère cherchée devra couper à angle droit. Cette condition la détermine, en général, et permet de la construire. Mais il pourra arriver que le problème soit indéterminé [1].

261. Après avoir montré comment l'emploi des coordonnées pentasphériques permet d'aborder et de résoudre ces problèmes relatifs aux sphères qui ont fait, depuis l'Antiquité, l'objet de tant de recherches, nous terminerons en donnant quelques formules qui s'appliquent à des surfaces quelconques.

Si nous considérons deux déplacements à partir d'un même point, définis par les caractéristiques d, δ, les dx_k, δx_k devront

[1] Pour plus de détails sur ces questions, le lecteur pourra consulter le Mémoire de l'Auteur *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace*, inséré dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. I, 1872.

satisfaire uniquement aux équations

$$\Sigma x_k\, dx_k = 0, \qquad \Sigma x_k\, \delta x_k = 0, \tag{94}$$

et la formule (47), qui nous donne l'angle des deux directions dans lesquelles on s'est déplacé, nous montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient rectangulaires est exprimée par l'équation

$$\Sigma\, dx_k\, \delta x_k = 0. \tag{95}$$

D'après cela, considérons une équation quelconque

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0, \tag{96}$$

définissant une surface. Nous aurons, pour tout déplacement sur cette surface,

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k = 0.$$

Si l'on pose

$$\delta x_k = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \tag{97}$$

les δx_k définiront un déplacement pourvu qu'ils vérifient l'identité

$$\Sigma x_k\, \delta x_k = \lambda\, \Sigma x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0,$$

ce qui arrivera toujours si l'équation de la surface est homogène, comme nous le supposerons. Le déplacement correspondant à la caractéristique δ satisfera donc toujours à la condition d'orthogonalité

$$\Sigma\, dx_k\, \delta x_k = 0. \tag{98}$$

Il se fera par conséquent suivant la normale à la surface.

Supposons maintenant que la caractéristique d s'applique à un déplacement s'effectuant, non plus sur la surface, mais dans une direction quelconque. Si l'on porte les valeurs de δx_k définies par les formules (97) dans les équations (46), (47), on aura

$$\delta s = \frac{\lambda}{\sum \frac{x_k}{R_k}} \sqrt{\Delta \varphi}, \tag{99}$$

$$ds \sqrt{\Delta \varphi} \cos(ds, N) = \frac{d\varphi}{\sum \frac{x_k}{R_k}}; \tag{100}$$

$\Delta\varphi$ désignant l'expression

$$\Delta\varphi = \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2 \tag{101}$$

et (ds, N) l'angle que fait la direction du déplacement avec la normale à la surface. Si cet angle devient nul, on a

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\Delta\varphi} \sum \frac{x_k}{\mathrm{R}_k}. \tag{102}$$

Telle est l'expression de ce que *Lamé* appelait le premier paramètre différentiel.

La formule (47) montre également que l'angle de deux surfaces représentées par les équations homogènes

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0, \qquad \psi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0, \tag{103}$$

c'est-à-dire l'angle de leurs normales au point commun, est défini par la formule

$$\cos(\varphi, \psi) = \frac{\Delta(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta\varphi}\sqrt{\Delta\psi}}; \tag{104}$$

où $\Delta(\varphi, \psi)$ désigne l'expression

$$\Delta(\varphi, \psi) = \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \frac{\partial\psi}{\partial x_k}. \tag{105}$$

Il est inutile de faire remarquer l'analogie de cette relation avec celle qui se rapporte aux coordonnées rectangulaires.

Il suit de là que la condition pour que les deux surfaces représentées par les équations (103) se coupent à angle droit en un de leurs points est que la condition

$$\sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \frac{\partial\psi}{\partial x_k} = 0 \tag{106}$$

soit vérifiée en ce point.

CHAPITRE III.

LES CYCLIDES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES.

La cyclide de Dupin. — Définition des cyclides les plus générales; celles du quatrième ordre ont le cercle de l'infini comme ligne double; celles du troisième ordre passent simplement par ce cercle. — Rapports avec la théorie des surfaces générales du troisième ordre et des surfaces du quatrième ordre à conique double. Toute cyclide ayant un point double à distance finie est l'inverse ou la podaire d'une quadrique. — Sections planes et sphériques d'une cyclide. — Recherche des sections circulaires et des sphères doublement tangentes. — Cyclides du quatrième ordre, équation réduite; cyclides du troisième ordre, deux méthodes. — Résultats généraux; il y a cinq séries de sections circulaires; leur génération. — Plans tangents doubles. — Surfaces anallagmatiques de Moutard. — Étude d'une famille de quadriques inscrites dans une cyclide du quatrième ordre. — Des quadriques qui coupent la cyclide suivant deux biquadratiques sphériques. — Ce que deviennent ces quadriques lorsque la cyclide se réduit au troisième degré. — Propriétés diverses relatives aux *inversions quadriques* qui conservent la surface cubique la plus générale.

---

262. Après avoir défini les coordonnées pentasphériques et indiqué comment on peut les employer dans la Géométrie de la sphère, nous nous proposons de les appliquer à l'étude d'une classe remarquable de surfaces du troisième et du quatrième ordre.

Si l'on considère les deux coniques définies respectivement par les équations

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{1}$$

et

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1, \tag{2}$$

où nous supposerons $c^2 < a^2$, la première de ces courbes sera une ellipse, la seconde une hyperbole, et l'on vérifiera aisément qu'elles sont des lignes doubles d'une développable isotrope. Par conséquent, suivant notre définition des focales (n° 239), *chacune de ces courbes sera la focale de l'autre.*

Si x, y, o sont les coordonnées d'un point M pris sur la première et x', o, z', celles d'un point M' pris sur la seconde, on aura

$$(3)\qquad \overline{\text{MM}'}^2 = (x-x')^2+y^2+z'^2 = \left(\frac{c}{a}x - \frac{a}{c}x'\right)^2.$$

Si donc on prend une sphère (S) dont le centre sera en M sur l'ellipse et dont le rayon sera $\frac{c}{a}x+k$, k désignant une constante quelconque, puis une sphère (S') ayant son centre en M' sur l'hyperbole et dont le rayon sera $\frac{a}{c}x'+k$, les deux sphères (S) et (S') seront constamment tangentes, puisque la distance MM' de leurs centres est égale à la différence de leurs rayons. Ainsi, *l'on aura constitué deux familles de sphères telles que toute sphère de l'une des familles sera tangente à toute sphère de l'autre famille.* Il suit de là que les sphères des deux familles auront la même enveloppe. C'est ce que l'on peut vérifier aisément. L'équation d'une sphère de la première famille peut se mettre sous la forme

$$(4)\qquad X^2+Y^2+Z^2-2x\left(X+\frac{ck}{a}\right)-2Yy+a^2-c^2-k^2=0,$$

et un calcul facile conduit à l'équation de son enveloppe, qui est

$$(5)\quad (X^2+Y^2+Z^2+a^2-c^2-k^2)^2-4a^2\left(X+\frac{ck}{a}\right)^2-4(a^2-c^2)Y^2=0.$$

Si l'on avait pris la seconde famille, on aurait obtenu la même équation sous la forme équivalente

$$(6)\quad (X^2+Y^2+Z^2+c^2-a^2-k^2)^2-4c^2\left(X+\frac{ak}{c}\right)^2-4(c^2-a^2)Z^2=0.$$

La surface représentée par l'une ou l'autre des équations précédentes avait été rencontrée par *Dupin* dans l'étude d'une belle question de Géométrie infinitésimale : la détermination de la surface dont toutes les lignes de courbure sont circulaires. L'illustre géomètre lui avait donné le nom de *cyclide*. Pour la distinguer des surfaces plus générales que nous allons étudier et pour rendre hommage à celui qui, le premier, l'a fait connaître, nous l'appellerons la *cyclide de Dupin*.

263. Les surfaces plus générales que nous voulons étudier, et auxquelles nous donnerons le nom de *cyclides*, ou de *cyclides générales* quand il y aura lieu de distinguer, sont celles qui sont définies en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(7) \qquad \varphi_0(x^2+y^2+z^2)^2+2\varphi_1(x^2+y^2+z^2)+\varphi_2=0,$$

où φ_0, φ_1, φ_2 désignent des fonctions de x, y, z, d'un degré égal à leur indice. On peut même supposer, sans diminuer la généralité, que φ_1 ne contient pas le terme indépendant de x, y, z; et, par suite, l'équation ne renferme que 13 constantes arbitraires. Elle comprend l'équation (5) comme cas très particulier.

Si φ_0 n'est pas nul, elle est du quatrième ordre et elle définit *des surfaces du quatrième ordre, ayant le cercle de l'infini comme ligne double*. On le reconnaît immédiatement en la rendant homogène, ce qui lui donne la forme

$$\varphi_0(x^2+y^2+z^2)^2+2t\varphi_1(x, y, z)(x^2+y^2+z^2)+t^2\varphi_2(x, y, z, t)=0.$$

On peut même affirmer que l'on obtient ainsi la surface la plus générale de cette définition.

Si φ_0 est nul, le facteur t est en évidence. En le supprimant, on obtient la surface la plus générale du troisième ordre contenant le cercle de l'infini. Comme une conique indécomposable peut toujours, par une homographie, être transformée dans le cercle de l'infini, toutes les propriétés que nous établirons dans cette étude des cyclides du quatrième et du troisième ordre pourront, par une transformation homographique, être appliquées, *soit à toute surface du quatrième ordre admettant une ligne double formée par une conique indécomposable, soit à la surface générale du troisième ordre*. On peut même dire que, dans ce dernier cas, il y aura une certaine indétermination, puisqu'il suffira de transformer le cercle de l'infini en une quelconque des coniques qui appartiennent à la cubique. On sait que ces coniques forment, dans le cas général, 27 séries distinctes.

Les cyclides du quatrième ordre n'ont, en général, aucun point double en dehors de ceux qui sont sur le cercle de l'infini; celles du troisième ordre n'ont, en général, aucun point double. Mais, s'il arrive que l'une de ces surfaces ait un point double à distance finie, son étude se rattachera directement à celle d'une quadrique. On peut, en effet, établir la proposition suivante :

Toute cyclide admettant un point double à distance finie est l'inverse d'une quadrique ou la podaire d'une autre quadrique.

Pour le démontrer, transportons l'origine des coordonnées au point double. L'équation de la cyclide conservera la forme

$$\varphi_0(x^2+y^2+z^2)^2+2\varphi_1(x^2+y^2+z^2)+\varphi_2=0.$$

Mais ici φ_2 sera une fonction homogène du second degré des coordonnées x, y, z. Si donc on fait l'inversion définie par les formules

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=\frac{k^2}{x^2+y^2+z^2},$$

l'équation précédente se réduira à la suivante :

$$k^4\varphi_0+2k^2\varphi_1+\varphi_2=0,$$

qui représente évidemment une quadrique (Q). Comme le plan perpendiculaire à l'extrémité de chaque rayon de la cyclide enveloppe la polaire réciproque (Q′) de la quadrique (Q) par rapport à la sphère principale de l'inversion employée, on peut dire aussi que la cyclide est la podaire de (Q′), et ainsi notre proposition se trouve complètement établie.

Au reste, cette proposition résulterait aussi des formules générales établies au nº 237.

Ces formules, il est bon de le remarquer, nous conduisent à cette conclusion intéressante que l'inverse d'une cyclide, dans une inversion quelconque, est encore une cyclide, qui se réduit au troisième degré si le pôle de l'inversion a été pris sur la surface primitive. Cette remarque expliquera la concordance que nous constaterons plus tard entre certains résultats relatifs aux cyclides du troisième et du quatrième ordre, notamment en ce qui concerne les sections circulaires.

264. On ne saurait séparer l'étude des cyclides de celle de leurs sections planes, qui sont, ou bien des courbes du quatrième ordre ayant pour points doubles les points à l'infini sur le cercle, des *quartiques bicirculaires* comme les appellent les géomètres anglais, ou bien des courbes du troisième ordre passant par les

mêmes points à l'infini, c'est-à-dire des *cubiques circulaires*. Les méthodes que nous emploierons pour traiter les cyclides s'appliquent d'elles-mêmes à ces courbes planes. En particulier, celles qui ont un point double à distance finie sont des réciproques ou des podaires de coniques. C'est ce qui a lieu pour les sections des cyclides par leurs plans tangents, qui ont un point double au point de contact. Celles qui ont deux points doubles sont des réciproques de coniques ayant un point double, c'est-à-dire les réciproques d'un couple de droites. Elles se réduisent donc à un couple de cercles.

On peut énoncer des propositions analogues relatives aux sections sphériques des cyclides. Si nous coupons la surface par la sphère dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2=\mathrm{P}, \tag{8}$$

P désignant un polynome du premier degré, on pourra remplacer l'équation (7) de la surface par la suivante :

$$\varphi_0\,\mathrm{P}^2+2\,\varphi_1\,\mathrm{P}+\varphi_2=0, \tag{8$'$}$$

qui représente une quadrique. Ainsi,

La section de toute cyclide par une sphère se trouve sur une quadrique.

Dans la suite nous appellerons, avec Laguerre, *biquadratiques sphériques* les courbes qui forment l'intersection d'une sphère et d'une quadrique. *Toute section de la cyclide par une sphère est donc une biquadratique.*

Quand la sphère est tangente à la cyclide, la section acquiert un point double au point de contact; et, d'après sa propriété fondamentale, elle est l'intersection de la sphère par un cône du second degré qui a son sommet au point de contact. Toute inversion ayant son pôle en ce point la transformera donc en une conique. Il suit de là, comme pour les sections planes, que, si une sphère touche la cyclide en deux points, la section de la cyclide par cette sphère sera l'inverse d'une conique ayant un point double, c'est-à-dire d'un couple de droites. Cette section se composera donc de deux cercles.

Réciproquement, si un cercle se trouve sur la surface, le plan

de ce cercle et toute sphère passant par ce cercle doivent couper la cyclide suivant un autre cercle, et, par conséquent, être tangents à cette surface en deux points.

265. Il suit de là que l'on obtiendra tous les cercles de la surface en cherchant les sphères qui sont tangentes à la cyclide en deux points à distance finie [1]. Toutes ces sphères couperont la cyclide suivant deux cercles, et les plans tangents doubles pourront être obtenus comme limites de ces sphères. Tout se réduira donc à exprimer qu'il passe, par l'intersection d'une sphère sécante, définie par l'équation (8), et de la quadrique définie par l'équation (8)', une autre quadrique se réduisant à un système de deux plans.

Pour faire le calcul de la manière la plus simple, nous remarquerons que l'on peut, en choisissant des axes convenables, diminuer beaucoup le nombre des coefficients arbitraires qui entrent dans l'équation de la cyclide.

Supposons d'abord qu'elle soit du quatrième ordre et soit

$$(x^2+y^2+z^2)^2+2\varphi_1(x^2+y^2+z^2)+\varphi_2=0 \tag{9}$$

son équation, où φ_1 a pour expression

$$\varphi_1=\alpha x+\beta y+\gamma z.$$

L'équation pourra s'écrire

$$[(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2+(z+\gamma)^2]^2+\varphi'_2=0$$

et, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, on pourra évidemment lui donner la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2+\psi_2=0, \tag{10}$$

ψ_2 étant un polynome quelconque du second degré. Si, sans changer l'origine, on prend maintenant des axes coordonnés parallèles aux axes de symétrie de la quadrique représentée par l'équation

$$\psi_2=0,$$

[1] On examinera plus loin le cas où ces deux points seraient sur une même génératrice rectiligne de la sphère.

les rectangles disparaîtront de l'expression de ψ_2 et l'équation de la cyclide prendra la forme suivante :

$$(x^2+y^2+z^2)^2+4Ax^2+4A'y^2+4A''z^2 \\ +8Cx+8C'y+8C''z+4D=0, \tag{11}$$

qui nous servira de point de départ.

Coupons la surface par la sphère (S), dont l'équation est

$$S=x^2+y^2+z^2-2P=0, \tag{12}$$

P ayant l'expression suivante :

$$P=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta; \tag{13}$$

α, β, γ seront les coordonnées du centre de la sphère, et la courbe d'intersection pourra être représentée par les deux équations

$$\begin{cases} P^2+Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0, \\ x^2+y^2+z^2-2P=0. \end{cases} \tag{14}$$

Si l'on veut que la sphère (S) coupe la cyclide suivant deux cercles, il faudra exprimer que l'une des quadriques représentées par l'équation

$$P^2+Ax^2+A'y^2+A''z^2 \\ +2Cx+2C'y+2C''z+D-\lambda(x^2+y^2+z^2-2P)=0, \tag{15}$$

où λ désigne un paramètre arbitraire, se réduit à deux plans.

Par un calcul très simple, qu'il est inutile de reproduire, on obtient les trois équations de condition suivantes :

$$\frac{C^2}{\lambda-A}+\frac{C'^2}{\lambda-A'}+\frac{C''^2}{\lambda-A''}+D-\lambda^2=f(\lambda)=0, \tag{16}$$

$$\frac{\alpha^2}{\lambda-A}+\frac{\beta^2}{\lambda-A'}+\frac{\gamma^2}{\lambda-A''}=1, \tag{17}$$

$$\delta=-\lambda-\frac{C\alpha}{\lambda-A}-\frac{C'\beta}{\lambda-A'}-\frac{C''\gamma}{\lambda-A''}. \tag{18}$$

La première, dont nous avons désigné, pour abréger, le premier membre par $f(\lambda)$, ne contient que l'inconnue λ, et elle détermine cinq valeurs pour cette inconnue. Il suit de là que *les sphères doublement tangentes à la surface se partagent en cinq séries distinctes.*

Quand λ a été choisi, la deuxième équation devient une relation entre α, β, γ. C'est donc, si l'on y regarde α, β, γ comme variables, l'équation du lieu des centres des sphères doublement tangentes. Nous voyons que *les sphères de chaque série ont leurs centres sur une quadrique*, et la forme de l'équation (17) nous montre que *les cinq quadriques correspondantes aux cinq valeurs de λ sont homofocales.*

Enfin, la troisième équation (18) fera connaître δ, c'est-à-dire le rayon de chacune des sphères doublement tangentes, quand le centre aura été choisi. L'équation de cette sphère se présentera sous la forme

$$(19)\qquad x^2+y^2+z^2-2\alpha\left(x-\frac{C}{\lambda-A}\right) -2\beta\left(y-\frac{C'}{\lambda-A'}\right)-2\gamma\left(z-\frac{C''}{\lambda-A''}\right)+2\lambda=0,$$

où λ et α, β, γ vérifieront les relations (16) et (17). Comme cette équation de la sphère doublement tangente contient α, β, γ au premier degré, on reconnaît immédiatement que *toutes les sphères doublement tangentes d'une même série auront même centre radical.*

Les coordonnées de ce centre sont

$$(20)\qquad x=\frac{C}{\lambda-A},\qquad y=\frac{C'}{\lambda-A'},\qquad z=\frac{C''}{\lambda-A''},$$

et sa puissance par rapport à l'une quelconque des sphères a pour expression

$$(21)\qquad \frac{C^2}{(\lambda-A)^2}+\frac{C'^2}{(\lambda-A')^2}+\frac{C''^2}{(\lambda-A'')^2}+2\lambda=-f'(\lambda).$$

La sphère décrite du centre radical comme centre avec le rayon $\sqrt{-f'(\lambda)}$ coupe donc à angle droit toutes les sphères doublement tangentes à la cyclide qui font partie de la série considérée. L'équation de cette sphère est

$$(22)\qquad x^2+y^2+z^2+\frac{2Cx}{A-\lambda}+\frac{2C'y}{A'-\lambda}+\frac{2C''z}{A''-\lambda}-2\lambda=0.$$

Remarquons de plus que le rayon $\sqrt{-f'(\lambda)}$ de cette sphère n'est nul que si λ est une racine multiple de l'équation (16). Dans

ce cas particulier, toutes les sphères doublement tangentes à la cyclide qui font partie de la série considérée passent par un point fixe, le centre radical déterminé par les équations (20).

De même que les quadriques lieux des centres des sphères bitangentes sont homofocales, de même les cinq sphères représentées par l'équation (22), où l'on remplace λ par les cinq racines de l'équation (16), sont orthogonales.

Il résulte de ce qui précède la belle proposition suivante, qui est due à *Moutard* :

Une cyclide du quatrième ordre peut, en général, être considérée, de cinq manières différentes, comme l'enveloppe d'une série de sphères qui coupent à angle droit une sphère fixe et dont les centres décrivent une quadrique fixe.

Comme il n'y a aucune relation particulière entre la quadrique et la sphère qui figurent dans la génération précédente, on peut dire que, réciproquement, l'enveloppe des sphères qui ont leurs centres sur une quadrique à centre unique et coupent à angle droit une sphère fixe quelconque est une cyclide du quatrième ordre. C'est ce que permettrait, d'ailleurs, de vérifier un calcul direct.

266. Examinons maintenant le cas où la cyclide est du troisième degré.

On verra aisément que, par un choix convenable des axes coordonnées, son équation peut être ramenée à la forme suivante :

$$(23)\quad -z(x^2+y^2+z^2)+Ax^2+A'y^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$

que nous emploierons dans la suite.

Si l'on coupe la surface par la sphère dont l'équation est

$$(24)\qquad x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z-2\delta=0,$$

on voit que la courbe d'intersection se trouve aussi sur la quadrique

$$(25)\qquad \begin{aligned} &-2z(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\\ &+Ax^2+A'y^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0. \end{aligned}$$

C'est donc une biquadrique sphérique. Il suit de là que, si la

cyclide contient un cercle, toute sphère passant par ce cercle coupera la surface suivant un autre cercle. On sera donc assuré d'obtenir toutes les sections circulaires de la cyclide en exprimant que la courbe définie par les équations (24), (25) se décompose en deux cercles, c'est-à-dire qu'il passe un système de deux plans par l'intersection des quadriques que définissent ces deux équations.

L'équation générale des quadriques qui passent par cette intersection est, comme on sait,

$$(26)\quad \begin{aligned}&(A-\lambda)x^2+(A'-\lambda)y^2-(2\gamma+\lambda)z^2-2\beta yz-2\alpha xz\\ &\quad+2(C+\lambda\alpha)x+2(C'+\lambda\beta)y+2(C''+\lambda\gamma-\delta)z+D+2\lambda\delta=0,\end{aligned}$$

λ désignant un paramètre variable. Il faut exprimer que l'on pourra disposer de ce paramètre de telle manière que l'équation précédente représente deux plans. Pour cela, on devra exprimer que les quatre équations

$$(A-\lambda)x-\alpha z+C+\lambda\alpha=0,\qquad (A'-\lambda)y-\beta z+C'+\lambda\beta=0,$$
$$-(\lambda+2\gamma)z-\beta y-\alpha x+C''+\lambda\gamma-\delta=0,$$
$$(C+\lambda\alpha)x+(C'+\lambda\beta)y+(C''+\lambda\gamma-\delta)z+D+2\lambda\delta=0$$

représentent une ligne droite et se réduisent à deux. Il faudra donc qu'en tirant des deux premières les valeurs de x, y et portant ces deux valeurs dans les deux autres, celles-ci soient vérifiées identiquement.

On est ainsi conduit aux trois équations suivantes :

$$(27)\qquad \lambda^3-2C''\lambda-D-\frac{C^2}{\lambda-A}-\frac{C'^2}{\lambda-A'}=f(\lambda)=0,$$

$$(28)\qquad \lambda+2\gamma=\frac{\alpha^2}{\lambda-A}+\frac{\beta^2}{\lambda-A'},$$

$$(29)\qquad \delta=C''-\lambda\gamma-\lambda^2-\frac{C\alpha}{\lambda-A}-\frac{C'\beta}{\lambda-A'},$$

qui sont à la fois nécessaires et suffisantes.

La première détermine λ, qui doit ainsi être racine d'une équation du cinquième degré. *Ici encore, il y aura donc cinq séries de sections circulaires.*

La seconde (28) nous montre que, *dans chacune des cinq séries, le centre de la sphère décrira un paraboloïde* et que *les*

paraboloïdes correspondants aux cinq séries différentes sont homofocaux.

La troisième (29) nous fait connaître δ. Si l'on porte cette valeur de δ dans l'équation de la sphère bitangente, on trouve qu'elle devient

$$(30)\qquad x^2+y^2+z^2-2\alpha\left(x-\frac{C}{\lambda-A}\right)$$
$$-2\beta\left(y-\frac{C'}{\lambda-A'}\right)-2\gamma(z-\lambda)+2\lambda^2-2C''=0.$$

La forme linéaire de cette équation nous montre que le point de coordonnées

$$(31)\qquad x=\frac{C}{\lambda-A},\qquad y=\frac{C'}{\lambda-A'},\qquad z=\lambda$$

aura même puissance par rapport à toutes les sphères d'une même série, cette puissance étant

$$\frac{C^2}{(\lambda-A)^2}+\frac{C'^2}{(\lambda-A')^2}+3\lambda^2-2C''=f'(\lambda).$$

Et, par conséquent, *toutes ces sphères bitangentes seront orthogonales à la sphère fixe dont l'équation est*

$$(32)\qquad x^2+y^2+z^2-2\frac{Cx}{\lambda-A}-2\frac{C'y}{\lambda-A'}-2\lambda z+2C''-2\lambda^2=0.$$

On verra aisément que les cinq sphères qui correspondent aux cinq racines λ sont, deux à deux, orthogonales.

En résumé, *dans chaque mode de génération, le centre de la sphère bitangente doit décrire le paraboloïde défini par l'équation* (28) *où λ est une des racines de l'équation* (27), *et son rayon doit être tel qu'elle soit orthogonale à la sphère fixe définie par l'équation* (32).

Les cinq sphères fixes qui correspondent aux cinq racines de l'équation (27) *sont, deux à deux, orthogonales.*

On vérifiera aisément qu'ici *leurs centres sont sur la cyclide.*

267. On peut se placer à un autre point de vue pour déterminer les sections circulaires de la cyclide du troisième degré.

Il est évident que, s'il existe un cercle sur la surface, le plan de ce cercle la coupera aussi suivant une droite qui ne devra pas

rencontrer le cercle de l'infini. Nous sommes donc conduits à rechercher les droites de la cyclide qui ne rencontrent pas le cercle de l'infini; elles devront couper, par conséquent, la droite (Δ) qui, avec ce cercle, complète l'intersection de la surface par le plan de l'infini.

On voit tout de suite, sur l'équation (23) de la cyclide, que cette droite (Δ) est l'intersection commune de tous les plans parallèles au plan des xy. Nous aurons donc à rechercher les droites (D) de la surface qui sont parallèles à ce plan.

Les plans parallèles au plan des xy coupent la cubique à distance finie, suivant la conique représentée par l'équation

$$(A - z)x^2 + (A' - z)y^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D - z^2 = 0;$$

il faudra donc exprimer que cette conique se décompose en deux droites. Comme l'équation précédente peut s'écrire

$$(A - z)\left[x - \frac{C}{z - A}\right]^2 + (A' - z)\left[y - \frac{C'}{z - A'}\right]^2 - f(z) = 0,$$

$f(z)$ ayant la signification définie par l'équation (27), il faudra que l'on ait

$$f(z) = 0. \tag{33}$$

Ainsi, dans la nouvelle méthode, on retrouve la même équation du cinquième degré que dans la première.

Toutes les fois que z satisfera à l'équation précédente, le plan qui lui correspond contiendra les deux droites (D'), (D'') qui sont définies par les équations

$$\sqrt{A - z}\left(x - \frac{C}{z - A}\right) \pm \sqrt{A' - z}\left(x - \frac{C'}{z - A'}\right) = 0. \tag{34}$$

Leur point d'intersection M a pour coordonnées

$$x = \frac{C}{\lambda - A}, \qquad y = \frac{C'}{\lambda - A'}, \qquad z = \lambda,$$

où λ est une des racines de l'équation

$$f(\lambda) = 0.$$

On voit donc qu'il est identique à celui que nous avons obtenu

dans notre première méthode et dont les coordonnées sont données par les équations (31).

Le point M nous apparaît ici comme le point de contact avec la cyclide de l'un des cinq plans qui passent par la droite (Δ) et coupent la surface suivant deux autres droites. Ces plans sont *tritangents*, et M est celui de leurs points de contact qui est à distance finie.

Cela posé, envisageons deux plans quelconques (ϖ'), (ϖ'') passant respectivement par les deux droites (D'), (D''). Nous savons qu'en laissant de côté ces deux droites, ils couperont la cyclide suivant deux cercles (C'), (C''). Il est aisé de montrer que ces deux cercles seront toujours sur une même sphère et que le point M aura même puissance par rapport à toutes les sphères ainsi obtenues.

En effet, les deux plans (ϖ'), (ϖ'') se coupent suivant une droite d qui, en dehors du point M, contient deux points μ, μ' de la cyclide. Or, ces deux points appartiennent à la fois aux deux cercles (C'), (C'') et, par conséquent, les deux cercles appartiennent à une même sphère (Σ). D'autre part, la puissance $M\mu . M\mu'$ du point M sera la même, soit qu'on la prenne par rapport à (Σ), soit qu'on la prenne par rapport aux cercles (C'), (C''). Comme ces deux cercles ont été choisis arbitrairement parmi ceux dont les plans passent par (D') et (D''), on voit que cette puissance sera constante, et l'on retrouve le mode de génération précédent. Toutes les tangentes menées de M aux cercles (C'), (C'') seront égales, et leurs points de contact engendreront la sphère fixe (S) qui est orthogonale aux cercles (C'), (C'') et aux sphères (Σ) qui les contiennent. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on considère l'un quelconque des cinq plans tritangents qui passent par la droite (Δ), *il existe une sphère qui a pour centre le point* M *de contact de ce plan tritangent situé à distance finie et qui contient la courbe de contact du cône de sommet* M *circonscrit à la cyclide. Les cercles des deux séries qui se rattachent à ce plan tritangent sont orthogonaux à cette sphère.*

Nous reviendrons sur ce théorème à la fin de ce Chapitre.

En résumé, on retrouve les mêmes modes de génération que pour

les cyclides du quatrième degré. Seulement les quadriques à centre sont remplacées par des paraboloïdes, et les plans des sections circulaires de chaque série passent par une même droite de la surface, une de celles que nous venons de déterminer.

268. Dans le cas des cyclides du quatrième degré, les plans des sections circulaires suivent une loi moins simple. Remarquons d'abord qu'on les obtiendra aisément, et sans exception, en exprimant que les sphères doublement tangentes se réduisent à des plans. En effet, si un cercle est sur la cyclide, toutes les sphères passant par ce cercle couperont la cyclide suivant un autre cercle; elles lui seront donc toutes doublement tangentes, et quand leur rayon deviendra infini, elles se réduiront aux plans des sections circulaires. Si nous supposons que, dans les équations (17) et (19), α, β, γ deviennent infinis, leurs rapports mutuels restant finis, il nous restera les deux équations

$$\frac{\alpha^2}{\lambda - A} + \frac{\beta^2}{\lambda - A'} + \frac{\gamma^2}{\lambda - A''} = 0,$$

$$\alpha\left(x - \frac{C}{\lambda - A}\right) + \beta\left(y - \frac{C'}{\lambda - A'}\right) + \gamma\left(z - \frac{C''}{\lambda - A''}\right) = 0$$

dont la seconde déterminera le plan de la section circulaire, et la première donnera la relation à laquelle doivent satisfaire les rapports mutuels de α, β, γ. Un calcul facile montre que le plan de la section circulaire enveloppera le cône défini par l'équation

$$(35)\quad (\lambda - A)\left[x - \frac{C}{\lambda - A}\right]^2 + (\lambda - A')\left[y - \frac{C'}{\lambda - A'}\right]^2 + (\lambda - A'')\left[z - \frac{C''}{\lambda - A''}\right]^2 = 0.$$

Il y aura cinq cônes, correspondants aux cinq séries ou aux cinq valeurs différentes de λ et, si l'on tient compte de la relation (16), leur équation pourra être écrite comme il suit :

$$(36)\quad (\lambda - A)x^2 + (\lambda - A')y^2 + (\lambda - A'')z^2 - 2Cx - 2C'y - 2C''z + \lambda^2 - D = 0.$$

269. Si l'on remplace, dans cette équation, λ par les cinq racines de l'équation (16), on obtient les cinq cônes enveloppes des plans

tangents doubles ou des plans des sections circulaires; mais, si l'on y attribue à λ des valeurs tout à fait arbitraires, l'équation (36) représente une famille de quadriques dont l'étude a les rapports les plus étroits avec la théorie des cyclides. Si l'on veut, en effet, prendre l'enveloppe de ces quadriques, il n'y aura qu'à exprimer que l'équation (36), du second degré en λ, a ses racines égales, ce qui donnera les deux équations

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda=0, \tag{37}$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2+4Ax^2+4A'y^2+4A''z^2+8Cx+8C'y+8C''z+4D=0 \tag{38}$$

dont la seconde représente la cyclide elle-même. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les quadriques représentées par l'équation (36), *où* λ *peut prendre toutes les valeurs possibles, sont inscrites dans la cyclide proposée, suivant des courbes sphériques appartenant respectivement aux sphères concentriques définies par l'équation* (37). *Cinq d'entre elles se réduisent à des cônes, qui sont les enveloppes des plans coupant la cyclide suivant des cercles.*

Nous désignerons ces quadriques sous le nom de *quadriques* (V). Elles font partie d'un réseau; mais ce réseau est très particulier. Il est déterminé par les trois surfaces dont les équations, où l'on a rétabli l'homogénéité, sont

$$t^2=0, \quad x^2+y^2+z^2=0,$$
$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cxt+2C'yt+2C''zt=0.$$

Au lieu de passer par huit points distincts, elles passent par quatre points seulement, mais, en chacun d'eux, elles sont tangentes à une droite fixe. Ces quatre points sont situés sur le cercle de l'infini et définis par les équations

$$t=0, \quad x^2+y^2+z^2=0, \quad Ax^2+A'y^2+A''z^2=0.$$

Ce sont ceux où se raccordent les deux nappes de la cyclide qui passent par ce cercle; et les tangentes communes aux quadriques (V) en ces points sont celles qui coupent la cyclide en quatre points confondus.

270. Avant de poursuivre cette étude, il est bon que nous fas-

sions remarquer que les méthodes précédentes s'appliqueraient sans modification aux courbes planes du quatrième ordre qui ont pour points doubles les deux points I et J de leur plan ou, si l'on veut, qui sont les sections planes des cyclides du quatrième ordre. Nous avons vu que les cyclides du troisième et du quatrième ordre peuvent, de cinq manières différentes, être obtenues comme les enveloppes d'une famille de sphères dont les centres décrivent une quadrique pendant qu'elles coupent à angle droit une sphère fixe. On peut énoncer cette proposition sous une autre forme en utilisant une propriété très simple des surfaces enveloppes de sphères.

Si l'on considère une famille de sphères qui dépendent de deux paramètres, chaque sphère touche l'enveloppe en deux points et la corde de contact peut être considérée comme l'axe radical de cette sphère et des sphères infiniment voisines. Quand les sphères de la famille sont assujetties à couper une sphère fixe (S) sous un angle droit, la puissance du centre de (S) par rapport à toutes les sphères de la famille est constante et égale au carré du rayon R de (S). La corde de contact de toute sphère de la famille va donc passer par le centre O de (S); les deux points de contact m, m' de cette sphère avec son enveloppe sont inverses l'un de l'autre par rapport à (S) et donnent lieu à la relation

$$\overline{Om} \cdot \overline{Om'} = R^2. \tag{39}$$

La surface enveloppe est donc, comme disait Moutard, *anallagmatique;* c'est-à-dire qu'elle se reproduit par une inversion dont (S) est la sphère principale, de sorte que l'on peut énoncer la proposition suivante :

L'enveloppe d'une famille de sphères toutes orthogonales à une sphère fixe (S) *est une surface anallagmatique dans une inversion dont* (S) *est la sphère principale.*

Et il serait aisé d'établir la proposition réciproque. Toute surface anallagmatique peut être obtenue par le mode de génération précédent. La sphère (S) sera appelée la sphère *directrice;* la surface lieu des centres sera, suivant une expression proposée par *de la Gournerie, la surface déférente* de l'anallagmatique. Le centre de (S) sera appelé *pôle principal.*

D'après cela, les propositions que nous avons établies relativement aux cyclides du troisième et du quatrième degré recevront la forme suivante :

Toute cyclide est anallagmatique de cinq manières différentes. Dans chacun de ses modes de génération, la déférente est une quadrique, à centre si la cyclide est du quatrième ordre, dépourvue de centre si la cyclide est seulement du troisième ordre.

Si l'on mène par un des pôles principaux une droite quelconque, elle coupera donc la cyclide en quatre points qui se partageront en deux couples de points, inverses l'un de l'autre par rapport à une sphère ayant son centre au pôle principal.

Quand la cyclide est du quatrième degré, il y a une famille de quadriques (V) *qui lui sont inscrites suivant des courbes situées sur des sphères concentriques. Cinq de ces quadriques se réduisent à des cônes dont les sommets sont les cinq pôles principaux.*

Les méthodes précédentes s'appliquent sans modification aux courbes planes du quatrième ordre qui ont pour points doubles les points à l'infini sur le cercle, ou aux courbes du troisième ordre qui passent par ces deux points. Si nous considérons plus particulièrement les courbes du quatrième ordre qui sont les sections planes des cyclides du quatrième ordre, nous verrons qu'elles admettent quatre pôles principaux, c'est-à-dire qu'elles sont anallagmatiques par rapport à quatre inversions dont les sphères principales ont leurs centres en ces quatre pôles, qu'elles sont les enveloppes d'une famille de coniques, parmi lesquelles quatre se réduisent à des couples de droites ayant leurs points de concours en un des pôles principaux. Ces propriétés nous suffiront pour ce qui va suivre.

271. Il y aurait lieu d'étudier ici les relations entre les cinq modes de génération de la cyclide. Cette étude sera reprise plus loin par d'autres méthodes. Nous poursuivrons, au contraire, l'examen des propriétés des quadriques inscrites (V), qui se présente mieux avec les coordonnées cartésiennes.

Mais remarquons d'abord qu'il y a quatre de ces quadriques qui sont tangentes à un plan quelconque.

Si l'on exprime, en effet, que le plan (Π) défini par l'équation

$$ux + vy + wz + p = 0$$

est tangent à la quadrique (V) telle qu'elle est définie par l'équation (36), on trouvera aisément la relation

$$(40)\quad \left(\frac{u^2}{\lambda - A} + \frac{v^2}{\lambda - A'} + \frac{w^2}{\lambda - A''}\right) \times \left(\frac{C^2}{\lambda - A} + \frac{C'^2}{\lambda - A'} + \frac{C''^2}{\lambda - A''} + D - \lambda^2\right) - \left(\frac{Cu}{\lambda - A} + \frac{C'v}{\lambda - A'} + \frac{C''w}{\lambda - A''} + p\right)^2 = 0,$$

qui est de quatrième degré en λ.

Considérons la section (Σ) de la cyclide par le plan (Π). Les quadriques (V) coupent ce plan suivant des coniques inscrites dans (Σ). Quatre de ces coniques se réduisent à des couples de droites; ce sont celles qui résultent de l'intersection des quadriques (V) tangentes au plan (Π). D'après les propriétés des quartiques bicirculaires que nous avons signalées plus haut, nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les quatre pôles principaux de la section (Σ) *par le plan* (P) *sont les points de contact des quadriques* (V) *qui sont tangentes au plan* (P).

Considérons maintenant, parmi les quadriques (V), celles qui sont tangentes à une droite (D). On reconnaîtra aisément qu'elles sont au nombre de trois. Soit O le point de contact de l'une d'elles et soient a, a', a'', a''' les points d'intersection de la droite (D) et de la cyclide. Le plan tangent en O à la quadrique (V) contient la droite (D) et il coupe la cyclide suivant une courbe (Σ) dont O est un des pôles principaux. Comme a, a', a'', a''' sont des points de cette section situés sur une droite passant par O, ils doivent se partager en deux couples, par exemple a, a' et a'', a''' tels que l'on ait

$$\overline{Oa}\cdot\overline{Oa'} = \overline{Oa''}\cdot\overline{Oa'''}.$$

Cette égalité nécessaire définit les trois positions que peut

prendre le point O, lorsque a, a', a'', a''' sont donnés; et l'on voit que, comme on peut partager les points de trois manières différentes en deux couples, il y aura bien trois quadriques (V) tangentes à (D). *L'équation qui les fait connaître est la résolvante de l'équation du quatrième degré qui détermine les points d'intersection de* (D) *et de la cyclide.*

272. On peut donner plus de précision aux relations précédentes en raisonnant de la manière suivante :

Soit

$$(41)\quad \begin{aligned} V = {} & \lambda^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) \\ & - A x^2 - A' y^2 - A'' z^2 - 2Cx - 2C'y - 2C''z - D = 0 \end{aligned}$$

l'équation déjà donnée (n° 268) de l'une quelconque des quadriques inscrites et soit

$$(42)\quad \begin{aligned} \Phi = {} & (x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ & + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 + 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0 \end{aligned}$$

l'équation de la cyclide. On aura *l'identité*

$$(43)\quad \Phi = (x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda)^2 - 4V.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point quelconque M de la quadrique (V) et α, β, γ les cosinus directeurs d'une tangente quelconque de (V) en ce point. Cherchons l'intersection de cette tangente et de la cyclide.

Les coordonnées de l'un quelconque de ses points seront données par les formules

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho, \qquad z = z_0 + \gamma\rho,$$

où ρ sera la distance à M du point considéré. En les portant dans l'identité (43), on aura le résultat suivant.

Puisque la sécante considérée est tangente à (V), on aura, d'après l'équation (41),

$$V = (\lambda - A\alpha^2 - A'\beta^2 - A''\gamma^2)\rho^2;$$

et l'identité (43) nous donnera alors

$$(44)\quad \begin{aligned} \Phi = {} & [\rho^2 + 2(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)\rho + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2\lambda]^2 \\ & - 4(\lambda - A\alpha^2 - A'\beta^2 - A''\gamma^2)\rho^2. \end{aligned}$$

On voit que l'équation du quatrième degré en ρ, qui définit les points d'intersection de la tangente à (V) et de la cyclide, se décompose immédiatement en deux équations du second degré. De plus, si m, m' sont les points donnés par une de ces deux équations et m'', m''' les points donnés par l'autre, on a

$$(45) \qquad \overline{Om}.\overline{Om'} = \overline{Om''}.\overline{Om'''} = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2\lambda,$$

O étant le point de contact avec la quadrique (V).

Ce résultat est bien d'accord avec les précédents. De plus, lorsque la quadrique (V) se réduit à un cône, il donne le mode de génération de Moutard; car alors les tangentes de (V) comprennent *toutes* les droites passant par le sommet du cône, et x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de ce sommet.

273. On peut rattacher, à la considération de la famille des quadriques inscrites (V), celle d'autres quadriques plus générales (W), qui coupent la cyclide suivant deux biquadratiques sphériques.

Envisageons, en effet, une quadrique (W) inscrite dans (V). Son équation sera de la forme

$$V = Q^2,$$

Q étant une fonction linéaire, et l'identité (43) nous donnera, pour tous les points de W,

$$(46) \qquad \Phi = (x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda + 2Q)(x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda - 2Q).$$

Ainsi, le polynome Φ se décomposera en deux facteurs, qui donneront deux biquadratiques sphériques de la cyclide.

Réciproquement, toute biquadratique de la cyclide est définie par deux équations telles que les suivantes :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda + 2Q = 0,$$
$$\Phi = 0,$$

qui, en vertu de l'identité (43), donnent la relation

$$V = Q^2.$$

Ainsi, *toutes les quadriques* (W) *qui passent par une des biquadratiques sphériques de la surface sont bien inscrites à l'une des quadriques* (V).

274. Puisque les surfaces (V) sont inscrites dans la cyclide suivant une courbe sphérique, leurs génératrices rectilignes sont des tangentes doubles de la surface. Il est aisé de reconnaître que l'on obtient ainsi toutes les tangentes doubles de la cyclide.

En effet, la section de la cyclide par l'un quelconque de ses plans tangents est, nous l'avons vu, la réciproque d'une conique dans une inversion dont le pôle est le point de contact. On ne peut donc lui mener de ce point de contact, qui est un point double de la section, que deux tangentes touchant la cyclide en un point différent de ce point de contact. Il n'y a donc que deux tangentes doubles passant par un point déterminé de la surface et, comme il y a une quadrique (V) tangente à la surface en ce point, ces tangentes doubles sont les deux génératrices rectilignes de cette quadrique qui passent en ce point.

Ces génératrices rectilignes, qui dépendent de deux paramètres, forment un de ces ensembles que *Plücker* désignait sous le nom de *congruences*. Il résulte des propositions que nous avons obtenues qu'il passe quatre de ces droites par un point quelconque de l'espace et qu'il y en a huit dans un plan quelconque.

275. A côté des génératrices rectilignes des surfaces (V), il convient de considérer celles des surfaces (W). Elles sont évidemment tangentes aux surfaces (V), et leur ensemble n'est assujetti à aucune condition puisque, étant donnée une droite quelconque, il y a trois surfaces (V) qui lui sont tangentes. Elles donnent lieu néanmoins à une proposition très intéressante.

Considérons un cercle quelconque de l'espace (C). Il coupe la cyclide en quatre points a, a', b, b' situés à distance finie. Par ces quatre points passent une infinité de biquadratiques sphériques de la cyclide : toutes celles qui se trouvent sur une sphère *quelconque* contenant le cercle (C). Donc, par ces mêmes points passent une infinité de surfaces (W), distribuées en une infinité de faisceaux, comprenant chacun l'une des sphères qui contiennent le cercle (C). Dans chacun de ces faisceaux, choisissons la quadrique (W) qui contient la droite aa' ; elle contiendra aussi évidemment la droite bb'. Les deux droites aa', bb', étant deux génératrices rectilignes d'une même surface (W), seront, l'une et l'autre, tangentes à la même surface (V). Or, cette surface (V) est déterminée par la

condition d'être tangente à la droite aa'. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Considérons tous les cercles (C), *en nombre doublement infini, qui passent par deux points fixes a, a' de la surface. Ils vont couper la cyclide en deux nouveaux points m, m' tels que la droite mm' demeure toujours tangente à l'une des quadriques* (V) *inscrites à la cyclide, choisie parmi les trois qui sont tangentes à la droite aa'.*

Voici comment on déterminera d'une manière tout à fait précise la quadrique (V). Soient a'', a''' les deux nouveaux points où la droite aa' rencontre la cyclide. Lorsque le rayon des cercles (C) grandira indéfiniment, les deux points m, m' se rapprocheront de a'', a''', et la droite mm' coupera aa' en un point très voisin de celui O où celle-ci est touchée par la quadrique (V). A la limite, on voit que ce point O sera tel que l'on ait

$$\overline{Oa}.\overline{Oa'} = \overline{Oa''}.\overline{Oa'''}$$

et, par conséquent, on saura le déterminer et choisir entre les trois quadriques (V) qui sont tangentes à la droite.

276. Les théorèmes relatifs aux quadriques (V) et (W) ne concernent que les cyclides du quatrième degré. Il ne sera pas inutile de voir ce qu'ils deviennent quand la cyclide se réduit au troisième degré.

Alors, elle coupe le plan de l'infini suivant le cercle de l'infini et suivant une droite (Δ), qui va jouer un rôle important dans nos déductions.

Soit

$$\varphi_0(x^2+y^2+z^2)^2+2\varphi_1(x^2+y^2+z^2)+\varphi_2=0 \tag{17}$$

l'équation générale de la cyclide du quatrième ordre. Si l'on y suppose $\varphi_0=0$, la cyclide devient du troisième degré, ou plutôt elle se réduit à l'ensemble formé par le plan de l'infini et cette cyclide du troisième degré. La section de cette cyclide par le plan de l'infini contient, non seulement le cercle de l'infini, mais la droite (Δ) intersection commune des plans ayant pour équation

$$\varphi_1 = \text{const.}$$

Voyons d'abord ce que deviennent les surfaces V. Avec l'équation (47), elles seraient définies par la relation

$$\lambda^2 - 2\lambda[\varphi_0(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1] + \varphi_1^2 - \varphi_0\varphi_2 = 0, \tag{48}$$

où λ désigne un paramètre variable. Si φ_0 s'annule, cette équation devient

$$(\lambda - \varphi_1)^2 = 0.$$

Ainsi, *les quadriques* (V) *s'aplatissent et se réduisent aux coniques de la surface dont les plans passent par la droite de l'infini* (Δ).

On pourrait le voir encore en remarquant que les génératrices rectilignes des surfaces (V) sont les tangentes doubles de la cyclide. Or, quand la cyclide se réduit au troisième degré, elle peut être considérée comme acquérant la droite double (Δ); et ses tangentes doubles deviennent celles des tangentes simples de la cyclide du troisième degré qui rencontrent la droite (Δ).

Quand aux surfaces (W), qui sont inscrites aux surfaces (V), elles se réduisent à des quadriques qui passent par une des coniques de la cyclide dont les plans passent par (Δ) et qui coupent, en outre, la cyclide suivant une biquadratique sphérique. Réciproquement, toute quadrique passant par une quelconque des biquadratiques sphériques de la cyclide sera une surface (W); c'est-à-dire qu'elle coupera en outre la cyclide suivant une des coniques dont les plans passent par (Δ).

Si l'on cherche ce que devient le théorème démontré au numéro précédent, on verra aisément qu'il prend la forme suivante :

Étant donnée une cyclide du troisième degré contenant la droite à l'infini (Δ), *les cercles en nombre doublement infini qui passent par deux points fixes de la surface vont la couper en deux nouveaux points m, m' tels que la droite mm' rencontre toujours une des coniques de la surface parmi celles dont les plans passent par* (Δ). *Cette conique est celle qui va passer par le troisième point où la droite aa' coupe la cyclide.*

Nous laissons au lecteur le soin de chercher une démonstration directe de cette proposition dont on peut faire diverses applications.

277. Au n° 263, nous avons fait remarquer que toute cyclide du troisième ordre peut être regardée d'une infinité de manières comme la transformée par l'homographie de la surface générale du troisième ordre. Comme, par une homographie, l'inversion ordinaire se transforme dans l'inversion quadrique de Hirst (n° 234), il suit des propriétés que nous avons établies que la cubique la plus générale se correspondra à elle-même, au moins dans cinq inversions quadriques distinctes.

Proposons-nous, d'une manière générale, *de trouver toutes les inversions quadriques par rapport auxquelles la cubique est anallagmatique.*

Il faudra évidemment que le pôle A de l'inversion cherchée soit sur la cubique. Sans cela, les droites passant par A couperaient la surface en trois points qui ne sauraient être échangés entre eux. Si l'on prend le point A pour sommet du tétraèdre de référence ou, si l'on veut pour origine des coordonnées, l'équation de la cubique sera donc

$$\varphi_1 t^2 + 2\varphi_2 t + \varphi_3 = 0, \tag{49}$$

φ_1, φ_2, φ_3 désignant des polynomes homogènes en x, y, z d'un degré marqué par leur indice. De même, l'équation d'une quadrique (Q) sera

$$\psi_0 t^2 + 2\psi_1 t + \psi_2 = 0, \tag{50}$$

ψ_0, ψ_1, ψ_2 étant encore homogènes et de degrés 0, 1, 2 respectivement. Une droite passant par l'origine est caractérisée par des valeurs de x, y, z, qui peuvent être considérées comme données. Les équations (49) et (50) déterminent les valeurs de t qui correspondent respectivement à la cubique et à la quadrique.

Pour que la cubique soit anallagmatique dans l'inversion définie par le point A et la quadrique (Q), il faut évidemment que les deux segments $\mu\mu'$ et $\mu_1\mu'_1$ déterminés dans la cubique et dans la quadrique par une sécante se divisent harmoniquement, c'est-à-dire que les racines t des équations (49), (50) soient en relation harmonique. On devra donc avoir identiquement

$$\varphi_1\psi_2 + \varphi_3\psi_0 - 2\varphi_2\psi_1 = 0.$$

D'après cette condition, les six solutions communes aux

équations

$$\varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0$$

doivent vérifier l'équation

$$\varphi_1 \psi_2 = 0.$$

Quatre au plus de ces solutions peuvent annuler ψ_2; sans cela, ψ_2 serait proportionnel à φ_2. Il faut donc que deux des solutions annulent φ_1.

Puisque $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ s'annulent simultanément pour deux systèmes de valeurs de x, y, z, il passe deux droites de la surface par le point A. En d'autres termes, A *est l'un des points de contact d'un plan tritangent.*

Admettons ce premier résultat, et voyons comment on pourra poursuivre la recherche. Nous allons choisir les axes de la manière la plus simple. Admettons que l'on a rejeté le plan tritangent à l'infini et que les axes des x, des y, des z ont été choisis de telle manière que les points de contact du plan tritangent soient, tous les trois, dans la direction des axes coordonnés. On reconnaîtra aisément qu'en choisissant convenablement l'origine, on peut ramener l'équation de la surface à la forme simple

$$(51) \qquad 2xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Prenons pour le point A celui qui se trouve dans la direction de l'axe des z et voyons si l'on peut lui adjoindre une quadrique (Q), telle que la cubique soit anallagmatique dans l'inversion quadrique définie par A et par (Q).

Menons de A des tangentes à la cubique. Leur point de contact doit se correspondre à lui-même dans l'inversion cherchée. Il faudra donc que la quadrique (Q) cherchée passe par la courbe de contact du cône de sommet A circonscrit à la cubique.

Or cette courbe de contact est définie par l'équation

$$z + xy + C'' = 0$$

qu'il faut joindre à l'équation de la surface, ce qui donne les deux relations

$$(52) \qquad \begin{cases} z + C'' + xy = 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 + 2Cx + 2C'y + D = 0. \end{cases}$$

On voit donc que cette courbe de contact est une biquadratique.

L'équation générale des quadriques qui la contiennent est

$$(53) \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xy + 2Cx + 2C'y + 2\lambda z + D + 2C''\lambda = 0$$

et il est maintenant aisé de vérifier que, *quel que soit* λ, toutes ces quadriques donnent une solution de la question.

Si l'on ordonne, en effet, par rapport à z les équations (51) et (53), on reconnaît que leurs racines sont en involution.

Les quadriques (Q) représentées par l'équation (53) contiennent toutes la courbe de contact définie par les équations (52); elles doivent donc couper, en outre, la cubique suivant une conique. Et, en effet, si l'on retranche, l'une de l'autre, les équations (51), (53), on fait apparaître le facteur $z - \lambda$ qui fournit la conique cherchée.

Elle sera donc définie par les équations

$$(54) \quad \begin{cases} z = \lambda, \\ x^2 + y^2 + 2xy\lambda + 2Cx + 2C'y + \lambda^2 + 2C''\lambda + D = 0. \end{cases}$$

Comme elle appartient à la fois à la cubique et à la quadrique (Q), les propriétés de l'inversion quadrique exigent que *le cône de sommet* A *ayant pour base cette conique soit circonscrit suivant elle à* (Q). C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

En résumé, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Considérons l'un des 135 *points* A *où se croisent deux droites de la cubique. Le cône de sommet* A *circonscrit à la cubique la touche suivant une biquadratique* (K). *Toute quadrique* (Q) *passant par* (K) *définit, conjointement avec* A, *une inversion quadrique par rapport à laquelle la cubique est anallagmatique. Le cône de sommet* A *circonscrit à* (Q) *la touche suivant une conique qui appartient également à la cubique. Le plan de cette conique va passer par celle des droites de la cubique qui se trouve dans le plan tangent en* A, *mais qui ne passe pas par* A.

Ce théorème est bien plus général que celui d'où nous l'avons déduite et qui concerne les cyclides. Non seulement, il nous donne des propriétés de la surface, mais il nous fournit aussi des méthodes

de construction. Par exemple, *si l'on envisage toutes les quadriques* (Q) *relatives à un même point* A, *on voit qu'on engendrera la cubique en construisant les courbes de contact des cônes de sommet* A *circonscrits à toutes ces quadriques. Si l'on en prend deux seulement*, (Q) *et* (Q'), *le segment de la cubique situé sur toute droite passant par* A *sera déterminé, puisqu'il doit diviser harmoniquement les deux segments analogues que la droite détache dans* (Q) *et dans* (Q').

Parmi les quadriques (Q), on peut signaler celle qui passe par A et contient les deux droites de la cubique qui se croisent en A. *Elle donne lieu à une inversion spéciale dans laquelle le pôle* A *est sur la quadrique.*

On peut aussi signaler, parmi les quadriques (Q), les quatre cônes qui passent par la biquadratique. Ils coupent la cubique suivant deux droites passant par leur sommet et qui tiennent lieu de la courbe de contact des plans tangents menés au cône par le point A. Ils donnent lieu au théorème suivant :

Étant donnée une droite (Δ) *de la cubique, on mène les cinq plans tritangents qui passent par cette droite. Soient* M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 *les cinq points de contact de ces plans qui se trouvent hors de* (Δ). *Si* (K_i) *est la biquadratique courbe de contact du cône de sommet* M_i *circonscrit à la cubique, les quatre cônes du second degré passant par* (K_i) *auront pour sommets les quatre points* M_h *autres que* M_i. *Le cône qui a pour sommet un de ces points* M_k *contient les deux droites de la cubique qui passent en* M_k, *et les plans tangents au cône suivant ces deux droites vont passer par* M_i.

278. On peut obtenir les mêmes résultats par une méthode beaucoup plus intuitive quoique moins rigoureuse. Elle repose sur quelques propriétés élémentaires des faisceaux de quadriques.

Soient (Q), (Q') deux quadriques représentées en coordonnées ponctuelles par les équations

$$Q = 0, \qquad Q' = 0. \tag{55}$$

Les quadriques définies par l'équation

$$Q + \lambda Q' = 0, \tag{56}$$

où λ désigne un paramètre variable, forment ce que nous avons appelé un *faisceau ponctuel.* D'après le théorème de Sturm, qui leur est évidemment applicable (nº 77), les quadriques du faisceau déterminent, sur une droite quelconque de l'espace, des segments qui forment une involution et *les points doubles de cette involution sont ceux où la droite est touchée par les deux quadriques du faisceau qui lui sont tangentes.*

D'autre part, si les équations

$$P = 0, \qquad P' = 0 \tag{57}$$

définissent les plans polaires d'un point A de l'espace par rapport aux deux quadriques (Q), (Q'), l'équation

$$P + \lambda P' = 0 \tag{58}$$

représentera le plan polaire du même point A par rapport à la quadrique définie par l'équation (56). Si donc on élimine λ entre les équations (56) et (58), on obtiendra une équation du troisième degré

$$PQ' - QP' = 0, \tag{59}$$

qui représentera le lieu des points de contact des tangentes menées de A à toutes les quadriques du faisceau. Or cette équation, qui est du troisième degré, contient autant de constantes arbitraires qu'il y en a dans celle de la cubique la plus générale. En choisissant convenablement (Q), (Q'), on ne trouve que 16 constantes dans l'équation générale du faisceau. Si l'on adjoint à ces 16 constantes les trois coordonnées du point A, on voit que l'équation (59) dépendra de 19 constantes, autant qu'il y en a dans l'équation de la surface cubique la plus générale. Admettons donc, et c'est là le point faible de la démonstration, que l'équation de toute cubique générale pourra être écrite sous la forme (59).

Alors, on aura mis en évidence toute une série de coniques de la surface dont les plans sont représentés par l'équation (58) et passent, par conséquent, par la droite (Δ), intersection des plans définis par les équations

$$P = 0, \qquad P' = 0.$$

Toute droite passant par A coupera la cubique en deux points M

et M' qui, d'après le théorème de Sturm, diviseront harmoniquement le segment déterminé sur cette droite par *toute* quadrique du faisceau.

La cubique sera donc anallagmatique, par rapport à l'inversion quadrique déterminée par le point A *et une quadrique quelconque du faisceau.*

Ces résultats sont bien d'accord avec ceux que nous avons obtenus par la première méthode. Et d'ailleurs, si l'on considère la quadrique du faisceau qui passe en A, le plan polaire de ce point par rapport à cette quadrique sera le plan tangent en A, et les deux génératrices rectilignes de la quadrique qui passent en A appartiendront également à la cubique. A sera donc le point de rencontre de deux droites de la cubique ou, si l'on veut, le point de contact d'un plan tritangent.

Nous signalerons, en terminant, la conséquence suivante des résultats précédents.

Si l'une des quadriques du faisceau est une sphère ayant pour centre le point A, la cubique contiendra le cercle de l'infini et deviendra, par suite, une cyclide. On a donc le théorème suivant :

Toute cyclide du troisième degré est le lieu des points de contact des plans tangents menés par le centre d'une de ses sphères directrices à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de cette sphère et de la cyclide. La déférente sera la polaire réciproque par rapport à la sphère de celle de ces quadriques qui passe par le centre de la sphère.

CHAPITRE IV.

LES CYCLIDES EN COORDONNÉES PENTASPHÉRIQUES.

Notions préliminaires sur les formes quadratiques homogènes. — Rappel de la loi d'inertie. — Définition de la forme adjointe. Quand le déterminant de la forme devient nul, sans que tout ses mineurs le soient, la forme adjointe est un carré parfait. — Réduction de deux formes quadratiques à des sommes composées des mêmes carrés. — Discussion du problème dans le cas où l'équation dont il dépend a toutes ses racines inégales — L'une ou l'autre des deux formes contient au moins autant de carrés positifs, ou de carrés négatifs, que cette équation a de couples de racines imaginaires conjuguées.

Application à l'étude des cyclides. Elles peuvent être représentées par une équation homogène du second degré si l'on emploie les coordonnées pentasphériques. — Tant qu'elles ne sont pas des inverses de quadriques, leur équation peut être débarrassée de tous les rectangles. Il suffit, pour cela, de résoudre une équation du cinquième degré qui a, au plus, deux racines imaginaires.

---

279. Nous pouvons maintenant procéder à l'étude des cyclides en employant les coordonnées pentasphériques.

Mais auparavant, nous démontrerons quelques propriétés des formes quadratiques, qui nous seront utiles dans la suite.

Soit

$$f = \Sigma\Sigma\, a_{ik} x_i x_k, \qquad a_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

l'équation qui définit une forme quadratique. Si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |\, a_{ik} \,|, \tag{2}$$

formé avec ses coefficients, est différent de zéro, nous savons que la forme sera réductible, et d'une infinité de manières, à une somme algébrique de n carrés. Nous savons aussi que, dans toutes

ces réductions, si les coefficients a_{ik} sont réels, il y aura le même nombre de carrés positifs ou de carrés négatifs. C'est ce que *Sylvester* appelait *la loi d'inertie des formes quadratiques*. Nous allons rappeler également la notion de la *forme adjointe*.

Posons

$$u_i = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

En vertu de l'hypothèse faite sur Δ, les u_i sont des fonctions indépendantes que nous allons substituer aux x_i. Comme on a, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$f = \Sigma u_i x_i, \tag{4}$$

on pourra éliminer les x_i entre les équations (3) et (4) et l'on aura l'équation

$$\Delta f = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix} \tag{5}$$

qui fournira l'expression cherchée.

Si l'on désigne par A_{ik} le mineur de Δ obtenu en supprimant la ligne et la colonne à laquelle appartient a_{ik} et en multipliant par $(-1)^{i+k}$, le second membre de l'équation (5) pourra s'écrire

$$\Delta f = \Sigma\Sigma A_{ik} u_i u_k. \tag{6}$$

On aura

$$A_{ik} = A_{ki} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} \quad \text{pour} \quad i \neq k, \qquad A_{ii} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ii}}. \tag{7}$$

Adoptant une définition donnée par Gauss, nous dirons que le déterminant

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix} = -\Sigma\Sigma A_{ik} u_i u_k \tag{8}$$

qui figure dans le second membre de l'équation (5) est la *forme adjointe* de f. Dans le cas où n est égal à 3 ou à 4, nous avons

déjà rencontré la forme adjointe lorsque nous avons étudié le principe de dualité.

D'après la définition de u_i, on a évidemment

$$df = 2\Sigma u_i\, dx_i. \tag{9}$$

Si l'on différentie l'équation (4), on aura aussi, en tenant compte de l'équation précédente,

$$df = 2\Sigma x_i\, du_i. \tag{10}$$

Le rapprochement de cette équation et de la précédente nous montrerait aisément que la forme adjointe de φ reproduit f à un facteur près, qui est la puissance $(n-1)^{\text{ième}}$ de Δ, mais nous n'aurons pas à faire usage de ce résultat.

280. Voici, au contraire, une proposition qui joue un rôle fondamental dans notre analyse :

Quand le déterminant de la forme devient nul, sans que tous ses mineurs du premier ordre le soient, la forme adjointe devient un carré parfait.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que la relation (8) montre qu'alors la forme φ ne sera pas nulle.

D'après la relation bien connue

$$A_{ii}A_{kk} - A_{ik}^2 = \Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ii}\, \partial a_{kk}},$$

on voit même que quelques-uns des mineurs A_{ii} ne seront pas nuls et que la forme φ contiendra au moins les carrés de certaines variables.

Supposons, par exemple, que A_{nn} ne soit pas nul. Alors, si nous désignons, pour un instant, par $\alpha_{n,n}$, $\alpha_{n,n+1}$, $\alpha_{n+1,n}$, $\alpha_{n+1,n+1}$ les quatre éléments du déterminant φ appartenant aux deux dernières lignes et aux deux dernières colonnes, l'identité bien connue

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{n,n}} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{n+1,n+1}} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{n,n+1}}\right)^2 = \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_{n,n}\, \partial \alpha_{n+1,n+1}}$$

nous donnera ici

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{n,n}} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{n,n+1}}\right)^2 = \varphi A_{nn},$$

c'est-à-dire

$$(11)\qquad \Lambda_{nn}\varphi = -\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}\right)^2.$$

La proposition est donc établie. Nous allons l'appliquer à la démonstration d'un résultat essentiel, relatif à deux formes quadratiques.

Soient

$$f = \Sigma\Sigma a_{ik}x_i x_k, \qquad g = \Sigma\Sigma b_{ik}x_i x_k$$

ces deux formes. Considérons le faisceau des formes $f + \lambda g$, où λ désigne un paramètre variable. Pour obtenir la forme adjointe de $f + \lambda g$, il faudra poser

$$(12)\qquad u_i = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

et l'identité (5) nous donnera la relation

$$(13)\quad f + \lambda g = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & \dots & a_{1n}+\lambda b_{1n} & u_1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & \dots\dots & \dots & a_{nn}+\lambda b_{nn} & u_n \\ u_1 & \dots\dots & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix},$$

où l'on aura

$$(14)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \dots & a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & \dots & a_{nn}+\lambda b_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}+\lambda b_{ik}|.$$

Dans le cas général, l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ aura ses racines inégales. Ce cas est le seul que nous étudierons, en renvoyant le lecteur, pour une étude complète, à un *Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques*, inséré en 1874 au Tome 19 du *Journal de Liouville*, 2ᵉ série.

Il est facile de voir que, pour chaque racine simple de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, les mineurs de Δ ne sauraient être tous nuls. Car on a

$$(15)\qquad \Delta'(\lambda) = \Sigma\Sigma\,\Delta_{ik}(\lambda)\,b_{ik},$$

Δ_{ik} étant le coefficient de $a_{ik} + \lambda b_{ik}$ dans le déterminant Δ. Comme, par hypothèse, λ n'est pas une racine multiple, $\Delta'(\lambda)$ ne sera pas nul et, par conséquent, quelques-uns des mineurs Δ_{ik} ne le seront pas.

Donc, pour chaque racine de $\Delta(\lambda)$, la forme adjointe sera un carré parfait.

D'après cela, décomposons le second membre de l'équation (13) en fractions simples, nous aurons

$$f + \lambda g = \sum \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \Phi_k, \tag{16}$$

λ_k étant une des racines de $\Delta(\lambda)$ et Φ_k désignant ce que devient la forme adjointe quand on y remplace λ par λ_k. Φ_k sera donc un carré parfait et l'on aura, par exemple,

$$\Phi_k = (\alpha_{k1} u_1 + \alpha_{k2} u_2 + \ldots + \alpha_{kn} u_n)^2. \tag{17}$$

D'autre part, reportons-nous à l'expression de Φ_k sous forme de déterminant

$$\Phi_k = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda_k b_{11} & \ldots & a_{1n} + \lambda_k b_{1n} & u_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} + \lambda_k b_{n1} & \ldots & a_{nn} + \lambda_k b_{nn} & u_n \\ u_1 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Remplaçons-y les u_k par leurs valeurs (12), retranchons de la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne les précédentes multipliées respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne les précédentes multipliées aussi respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il viendra *la même expression de* Φ_k, dans laquelle les u_k seront remplacés par

$$\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_k) \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

Effectuant donc cette substitution dans la formule (17), nous trouverons

$$\varphi_k = (\lambda - \lambda_k)^2 \left[\frac{1}{2} \alpha_{k1} \frac{\partial g}{\partial x_1} + \ldots + \frac{1}{2} \alpha_{kn} \frac{\partial g}{\partial x_n} \right]^2 = (\lambda - \lambda_k)^2 P_k^2, \tag{18}$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (16), nous trouverons

$$f + \lambda g = \sum \frac{\lambda_k - \lambda}{\Delta'(\lambda_k)} P_k^2. \tag{19}$$

Cette équation se décompose dans les deux suivantes :

$$f = \sum \frac{\lambda_k}{\Delta'(\lambda_k)} P_k^2, \qquad g = -\sum \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)} P_k^2 \tag{20}$$

et nous donne les deux formes f et g, *décomposées en deux sommes composées des mêmes carrés.*

Il résulte évidemment de la démonstration que les fonctions linéaires P_k de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont nécessairement *indépendantes.*

281. Nous pouvons compléter cette théorie par les remarques suivantes :

A chaque racine de l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{21}$$

correspond un système de solutions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Il est connu, et d'ailleurs facile à démontrer, que si l'on appelle Δ_{ik} le mineur coefficient de $a_{ik} + \lambda b_{ik}$, dans le déterminant Δ, ce système de solutions satisfait aux relations

$$\frac{x_i^2}{\Delta_{ii}} = \ldots = \frac{x_i x_k}{\Delta_{ik}} = \ldots = \frac{1}{\rho}, \tag{23}$$

ρ étant une inconnue auxiliaire. D'après cela, on aura

$$\Delta'(\lambda) = \Sigma\Sigma\Delta_{ik} b_{ik} = \rho\Sigma\Sigma b_{ik} x_i x_k = \rho\, g(x_1, \ldots, x_n)$$

et, par conséquent, la condition nécessaire pour que λ soit une racine multiple sera que le système de solutions des équations (22) satisfasse aussi à la relation

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{24}$$

qui entraîne évidemment la suivante :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Le raisonnement serait en défaut si tous les mineurs de Δ étaient nuls ; mais la conclusion subsisterait. Car alors il y aurait au moins deux systèmes de valeurs linéairement indépendants qui satisferaient aux équations (22), et, en les combinant linéairement, on en aurait au moins un pour lequel l'équation (24) serait vérifiée.

282. Supposons maintenant que f et g soient deux formes à coefficients réels; il en sera de même de $\Delta(\lambda)$ et, si l'équation (21) a une racine réelle, le *carré* de la fonction P_k correspondante sera aussi réel. Donc, à toute racine réelle de $\Delta(\lambda)$ correspondent, dans les deux formes, deux carrés $a_k Q_k^2$, $b_k Q_k^2$ dans lesquels Q_k sera une fonction linéaire réelle; mais les coefficients réels a_k, b_k pourront être soit positifs, soit négatifs.

Si l'équation (21) a une racine imaginaire, elle admettra aussi la racine imaginaire conjuguée. Les carrés correspondants à ces deux racines dans f et dans g seront donc de la forme

$$(\alpha+\beta i)(P+Qi)^2+(\alpha-\beta i)(P-Qi)^2,$$
$$(P+Qi)^2+(P-Qi)^2.$$

On aura donc, dans g,

$$2P^2-2Q^2,$$

c'est-à-dire, chaque racine imaginaire fera apparaître deux carrés de signes contraires.

Si, dans f, on posait

$$\sqrt{\alpha+\beta i}(P+Qi)=P'+Q'i.$$

P' et Q' étants réels, on ferait apparaître de même, dans f, une décomposition en carrés contenant deux carrés de signes contraires.

Ce que nous disons de f et g, nous pouvons le dire de toute forme réelle $af+bg$ comprise dans le *faisceau*. Car il suffit de remplacer, dans le faisceau $f+\lambda g$, λ par $\frac{\lambda+b}{a}$, puis de multiplier par a, pour obtenir $af+bg+\lambda g$, ce qui nous donne, pour $\lambda=0$, la forme que nous voulons considérer. Ainsi, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

L'une ou l'autre des formes f, g, ou toute combinaison linéaire $af+bg$ de ces formes, à coefficients réels a, b, aura au moins autant de carrés positifs, ou de carrés négatifs, qu'il y aura de couples de racines imaginaires conjuguées.

Ainsi, si p est le nombre des carrés positifs de $af+bg$ et, par suite, $n-p$ celui des carrés négatifs, on aura, k étant le nombre

des couples de racines imaginaires,

$$k \leqq p, \qquad k \leqq n - p.$$

D'après la loi d'inertie, rappelons que p est un invariant et peut s'obtenir avec une décomposition en carrés choisie arbitrairement.

D'après cela, on voit que, si le faisceau des formes $af + bg$ comprend *une seule* forme définie, c'est-à-dire une forme dont tout les carrés soient de même signe, l'équation en λ aura toutes ses racines réelles. Nous n'avons pas besoin de signaler les applications de ce résultat à la Géométrie analytique : réalité des racines de l'équation en S, réalité du tétraèdre conjugué commun à deux quadriques dont l'une est imaginaire, etc.

Si le faisceau des formes comprend une forme dont tous les carrés, sauf un, soient de même signe, l'équation en λ aura *au plus* un couple de racines imaginaires.

Tous ces résultats pourraient être établis par la méthode de substitution. Nous aurons à en faire usage plus loin, dans l'étude des *cyclides*.

283. Nous avons vu que leur équation, en coordonnées rectangulaires, est de la forme

$$\varphi_0(x^2+y^2+z^2)^2 + 2\varphi_1(x^2+y^2+z^2) + \varphi_2 = 0, \tag{25}$$

φ_0, φ_1, φ_2 étant des fonctions de x, y, z, d'un degré marqué par leurs indices.

Si l'on prend pour coordonnées pentasphériques les cinq quantités suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2x, \qquad x_2 = 2y, \qquad x_3 = 2z, \\ x_4 = \dfrac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}, \qquad x_5 = i\,\dfrac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R}, \end{array}\right. \tag{26}$$

qui donnent

$$x_4 + ix_5 = -2R, \qquad x_4 - ix_5 = 2\,\frac{x^2+y^2+z^2}{R}, \tag{27}$$

on pourra transformer l'équation (25) en une autre, quadratique et homogène par rapport aux x_k,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = \Sigma\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0. \tag{28}$$

Associons-lui la relation quadratique

$$g = -\Sigma x_i^2 = 0 \tag{29}$$

entre les coordonnées. Nous aurons deux formes quadratiques, auxquelles nous pourrons appliquer les résultats précédents. Auparavant il faut remarquer que, par suite de l'emploi des formules (26), *la forme f n'aura pas ses coefficients réels*. Mais si, à la coordonnée x_5, on substitue la variable $y_5 = ix_5$, tous les coefficients de f deviendront réels, et la forme g aura quatre carrés négatifs et un carré positif.

Tant que le déterminant de $f + \lambda g$ aura ses racines inégales, on pourra ramener les deux formes à des sommes composées des mêmes carrés. Il suffira de résoudre l'équation du cinquième degré

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{41} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{30}$$

qui n'aura, on s'en assure aisément, que des coefficients réels et d'appliquer la méthode précédemment indiquée. Puisque la forme g a quatre carrés négatifs, l'équation en λ aura, au plus, deux racines imaginaires. Il ne pourra donc se présenter que deux hypothèses : ou bien l'équation en λ aura toutes ses racines réelles, ou bien elle aura deux racines imaginaires conjuguées, et trois racines réelles.

Il suit de là que, si elle acquiert une racine multiple, cette racine, étant la limite de racines réelles, ou de deux racines imaginaires conjuguées, sera nécessairement réelle.

Or nous avons vu que cette équation du cinquième degré ne peut avoir de racine multiple que s'il existe pour cette racine un système au moins de valeurs des x_i vérifiant les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \qquad g = 0, \qquad f = 0.$$

Si l'on substitue, ce qui est évidemment permis, $f + \lambda g$ à f, ces

équations prennent la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad f = 0, \qquad g = 0.$$

Elles expriment, par conséquent, qu'il existe un point de la cyclide pour lequel toutes les dérivées de f par rapport aux x_i sont nulles.

Ce point, qui est évidemment réel et à distance finie, sera un point double de la cyclide, car les dérivées de f par rapport aux coordonnées cartésiennes x, y, z sont des fonctions linéaires des dérivées par rapport aux x_i et, par conséquent, seront nulles en même temps que f.

Par conséquent, la cyclide dérivera d'une quadrique réelle par une inversion, également réelle.

284. En dehors de ce cas exceptionnel, on voit qu'en faisant une substitution linéaire qui transforme Σx_i^2 en une autre somme de carrés Σy_i^2, on peut ramener l'équation de la cyclide à la forme

$$\Sigma a_i y_i^2 = 0.$$

Ce résultat fondamental signifie *qu'il existe toujours, sauf dans le cas où la cyclide est l'inverse d'une quadrique, un système de coordonnées pentasphériques dans lequel l'équation de la surface est débarrassée des rectangles.*

Cette proposition a des conséquences nombreuses. Dès à présent, elle nous permet d'établir à nouveau la propriété des cyclides découverte par Moutard. A tout point de la cyclide, défini par les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_5$, on peut faire correspondre quinze autres points de la surface que l'on obtiendra en changeant d'une manière arbitraire les signes des cinq coordonnées. Ces seize points, nous l'avons vu, se déduisent de l'un quelconque d'entre eux par des inversions répétées dont les sphères principales sont les cinq sphères coordonnées. Ainsi :

Il existe un groupe de cinq sphères orthogonales telles que la cyclide se transforme en elle-même quand on la soumet à une inversion admettant pour sphère principale une quelconque de ces sphères.

Comme nous l'avons déjà dit (n° 270), les centres de ces sphères ont été nommés par Moutard *pôles principaux de la cyclide.* Il avait réservé le nom de *pôles secondaires* à dix autres points que nous allons définir.

Considérons deux quelconques des sphères coordonnées, (S_1) et (S_2) par exemple. La cyclide demeurera invariable quand on la soumettra aux deux inversions dont (S_1) et (S_2) sont les sphères principales. Mais, d'après les résultats donnés au n° 241, ces deux inversions peuvent être remplacées par une symétrie relative au plan radical (P_{12}) de (S_1) et de (S_2), précédée ou suivie d'une inversion dont la sphère principale (S_{12}) a pour grand cercle le cercle commun à (S_1), (S_2). Le centre de cette sphère, situé au point où la ligne des centres de (S_1), (S_2) coupe le plan radical, avait été nommé par Moutard *pôle secondaire* de la cyclide. Il jouit de cette propriété que l'inversion par rapport à la sphère (S_{12}) dont il est le centre transforme la cyclide en sa symétrique par rapport au plan (P_{12}). On peut dire aussi que, si l'on considère la sphère (S'_{12}) concentrique à (S_{12}) et ayant pour rayon celui de (S_{12}) multiplié par $\sqrt{-1}$, l'inversion par rapport à (S'_{12}) transformera la cyclide en sa symétrique relativement à la ligne des centres de (S_1), (S_2).

285. Examinons maintenant comment est constitué, au point de vue réel, le système de nos cinq nouvelles sphères coordonnées. Il ne pourra se présenter que deux cas :

1° L'équation en λ aura ses cinq racines réelles. Alors, les carrés des fonctions y_i seront réels et, par conséquent, en vertu de l'identité

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i^2,$$

quatre de ces fonctions seront réelles, et la cinquième sera une imaginaire pure. De plus, comme on a, pour tout système de coordonnées pentasphériques,

$$y_i = \lambda \frac{S_i}{R_i} \qquad \text{ou} \qquad y_i = 2\lambda P_i,$$

(n° 247), on voit que le signe du carré y_i sera le même que celui de R_i^2. Il y aura donc, dans le système de coordonnées pentasphé-

riques, quatre sphères réelles et une sphère dont le rayon sera une imaginaire pure. On sait que les quatre sphères réelles ont pour centres les sommets d'un tétraèdre dont les arêtes opposées sont perpendiculaires et dont les hauteurs se coupent en un point intérieur, qui est le centre de la cinquième sphère, celle dont le rayon est une imaginaire pure. Nous avons déjà fait remarquer que chacune des sphères admet pour tétraèdre conjugué celui qui est formé par les centres des quatre autres sphères.

Des cinq coordonnées d'un point réel, les quatre premières sont réelles; celle qui est relative à la sphère imaginaire est elle-même une imaginaire pure.

2° Examinons maintenant le cas où l'équation en λ a un couple de racines imaginaires. Alors deux des fonctions y_k, par exemple y_4 et y_5, seront imaginaires conjuguées. La relation entre les coordonnées devant contenir quatre carrés positifs, il sera nécessaire, non seulement que y_1, y_2, y_3 soient réels, mais encore que ces trois coordonnées se rapportent à des sphères de rayons réels. Ces trois sphères se couperont nécessairement en deux points réels A_1, A_2; les deux sphères imaginaires auront pour centres des points imaginaires, situés sur l'axe radical A_1A_2 et divisant harmoniquement le segment A_1A_2.

En ce qui concerne les coefficients a_i qui figurent dans l'équation de la cyclide, ils sont tous réels dans le premier des deux cas que nous venons d'examiner. Dans le second, a_1, a_2, a_3 seront réels; a_4 et a_5, au contraire, seront imaginaires conjugués.

Nous aurons à faire usage plus loin de toutes ces remarques. Nous allons maintenant étudier les propriétés de la cyclide qui résultent de la forme simplifiée

$$\Sigma a_i x_i^2 = 0,$$

donnée à son équation.

CHAPITRE V.

LES CYCLIDES ET LEURS SPHÈRES PRINCIPALES.

Condition de contact d'une sphère et de la cyclide. — Conséquences : la cyclide est de douzième classe; d'un point on peut lui mener douze normales. — Sphères doublement tangentes; elles se partagent en cinq séries et coupent chacune la cyclide suivant deux cercles. — Définition de chaque série; les sphères bitangentes sont orthogonales à l'une des sphères coordonnées et leurs centres décrivent une quadrique. — Relations entre les cercles de la cyclide; plans tangents doubles; démonstrations géométriques et analytiques. — Focales singulières et focales ordinaires de la cyclide. — Les seize droites de la cyclide; leur construction et leurs relations. — Comment, lorsque l'on connaît un mode de génération de la cyclide, on peut en déduire tous les autres. — Théorème de Chasles relatif aux quadriques homofocales.

---

286. Nous commencerons par remarquer que, si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = 0 \tag{1}$$

est l'équation *homogène* d'une surface quelconque, l'équation

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0,$$

où les X_i désignent les coordonnées d'un point variable, représentera une des sphères tangentes à la surface au point de coordonnées $x_1, \ldots, x_5$. En effet, l'équation précédente représente bien une sphère passant par ce point; car elle est vérifiée quand on y remplace X_i par x_i. D'autre part, d'après l'équation (97) (n° 261), la sphère et la surface ont même normale au point considéré. Donc elles sont bien tangentes.

Comme

$$\Sigma x_i X_i = 0$$

est l'équation de la sphère de rayon nul ayant pour centre le point de coordonnées x_i, on voit que l'équation générale des sphères

tangentes en un point sera

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda x_i\right)X_i=0. \tag{2}$$

On aurait le plan tangent en déterminant λ par la condition

$$\sum\frac{1}{R_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda\sum\frac{x_i}{R_i}=0, \tag{3}$$

par laquelle on exprime que la sphère se réduit à un plan.

287. Appliquons ce résultat général à la cyclide, dont nous prendrons l'équation générale sous la forme réduite

$$\Sigma a_k x_k^2 = 0. \tag{4}$$

Nous obtiendrons

$$\Sigma(a_k+\lambda)x_k X_k=0 \tag{5}$$

pour l'équation générale des sphères tangentes au point de coordonnées x_k.

Pour qu'une sphère définie par l'équation

$$\Sigma m_k X_k=0 \tag{6}$$

soit tangente à la cyclide, il faudra que l'on puisse identifier cette équation avec la précédente. En tenant compte de l'homogénéité, on peut prendre

$$x_i=\frac{m_i}{a_i+\lambda} \tag{7}$$

et, en substituant dans l'équation de la surface et dans la relation identique entre les coordonnées, on sera conduit aux deux équations

$$\sum_1^5\frac{m_i^2}{a_i+\lambda}=0,\qquad \sum_1^5\frac{m_i^2}{(a_i+\lambda)^2}=0 \tag{8}$$

dont l'une est la dérivée de l'autre. Donc, pour que la sphère soit tangente, il faudra que l'équation du quatrième degré en λ

$$\sum_1^5\frac{m_i^2}{a_i+\lambda}=0 \tag{9}$$

ait une racine double. On sait que cette condition d'égalité des racines se présente sous la forme

$$I^3 - 27J^2 = 0, \tag{10}$$

où I est du second degré et J du troisième degré par rapport aux coefficients de l'équation. Ici I sera une fonction homogène du quatrième degré des m_i, et de même J sera du sixième degré; en sorte que la condition de contact d'une sphère sera du douzième degré par rapport aux coefficients de son équation.

Si l'on cherche combien, par l'intersection de deux sphères données, on peut faire passer de sphères tangentes à la cyclide, il faudra, dans la condition de contact, remplacer m_i par $m_i + km'_i$, et l'on obtiendra pour k une équation du douzième ordre.

Donc, *par un cercle, on peut faire passer, en général, douze sphères tangentes à la cyclide.*

Si ce cercle devient une ligne droite, les sphères qui le contiennent sont des plans. Donc *la cyclide est de douzième classe.*

Enfin, si les deux sphères données de coordonnées m_i, m'_i sont concentriques, toutes les sphères de coordonnées $m_i + \lambda m'_i$ auront le même centre. Donc, dans une suite de sphères concentriques, il y en a douze qui sont tangentes à la cyclide. En d'autres termes, *d'un point on peut mener douze normales à la cyclide.*

Toutes ces propositions, si différentes en apparence, sont ici des conséquences d'un principe unique.

Ajoutons que l'équation (10) est l'*équation tangentielle* de la surface si l'on y regarde les m_i comme les coordonnées d'un plan.

288. Nous allons signaler maintenant des conséquences d'un autre genre. Étant donnée une sphère tangente, les coordonnées du point où elle touche la cyclide sont déterminées en général sans ambiguïté par les formules (7). Si l'on veut que la sphère soit doublement tangente, il faudra que l'une au moins des coordonnées du point de contact ne soit pas définie, que l'on ait par exemple

$$m_k = 0, \qquad \lambda = -a_k$$

auquel cas, l'équation en λ devant admettre la racine double $-a_k$,

il faudra que l'on ait

$$\sum \frac{m_i^2}{a_i - a_k} = 0, \tag{11}$$

la somme étant étendue aux quatre valeurs de i qui sont différentes de k.

Ainsi, nous obtenons *cinq séries de sphères doublement tangentes à la cyclide.*

Nous avons vu que toute sphère coupe la cyclide suivant une courbe située sur une quadrique. Cette courbe, ayant deux points doubles, se décomposera en deux courbes planes, c'est-à-dire en deux cercles. Nous retrouvons ici une proposition déjà démontrée au n° 265; il y a sur la cyclide dix séries de sections circulaires, se groupant en cinq couples rattachés chacun à la même série de sphères bitangentes.

Ces cinq séries de sphères doublement tangentes, les lieux de leurs centres, les sections circulaires qui s'y rattachent forment un des ensembles les plus intéressants de la Géométrie. Nous allons successivement faire connaître ses principales propriétés.

289. Commençons par considérer une des séries de sphères bitangentes, celles qui sont orthogonales, par exemple, à la sphère coordonnée (S_k). Les formules (7) déterminent sans ambiguïté toutes les coordonnées de leurs points de contact, sauf x_k qui, en vertu de la relation identique entre les coordonnées, peut recevoir des valeurs égales et de signes contraires. Donc, les deux points de contact de chaque sphère bitangente (S) de la série considérée sont inverses l'un de l'autre par rapport à la sphère (S_k); et les deux cercles suivant lesquels la sphère (S) coupe la cyclide, passant nécessairement par ces deux points de contact, seront orthogonaux, l'un et l'autre, à la sphère coordonnée (S_k).

On déduit de là, *sans calcul*, que la surface lieu des centres des sphères bitangentes (S) est nécessairement une quadrique.

Désignons, en effet, par (C) l'un quelconque des cercles de la cyclide qui se trouvent sur une des sphères bitangentes (S). Toute sphère (S′) passant par (C) ne pourra compléter son intersection avec la cyclide qu'en lui empruntant un second cercle (C′). Elle sera donc bitangente à la cyclide aux deux points d'intersection

de (C) et de (C′). Et, comme elle est orthogonale à (S_k), elle fera partie de la série des sphères bitangentes (S).

Comme (S′) n'est assujettie qu'à contenir le cercle (C), son centre pourra être choisi arbitrairement sur l'axe du cercle (C), ce qui nous conduit immédiatement à la conclusion suivante :

La surface lieu des centres des sphères bitangentes (S) *contient les axes de tous les cercles suivant lesquels ces sphères coupent la cyclide, et, par conséquent, c'est une surface doublement réglée, c'est-à-dire une quadrique.*

Nous désignerons cette quadrique par la lettre (Q_k).

290. Nous pouvons maintenant nous rendre compte de la disposition des sections circulaires qui se rattachent à l'un quelconque de nos cinq modes de génération. Tandis que les sphères bitangentes forment une série doublement infinie, les cercles correspondants se distribuent en deux séries simplement infinies, correspondantes aux deux systèmes de génératrices rectilignes de (Q_k).

Lorsque le centre de la sphère (S) décrit une des génératrices rectilignes, la sphère (S) elle-même passe par un cercle fixe de la cyclide dont l'axe est cette génératrice rectiligne et qui se trouve dans le plan mené perpendiculairement à cette génératrice par le centre de (S_k). Nous obtenons bien, comme on le voit, deux familles de cercles orthogonaux à (S_k); les uns ont pour axes les génératrices d'un système de (Q_k); les autres ont pour axes les génératrices de l'autre système. *Deux cercles appartenant à une même série ne se coupent pas; deux cercles appartenant à deux séries différentes se trouvent sur la sphère bitangente dont le centre est le point de rencontre de leurs axes et se coupent par conséquent en deux points, réels ou imaginaires.*

Les plans des cercles passent par le centre de (S_k) et sont orthogonaux aux génératrices de (Q_k) ; ils enveloppent, par conséquent, un cône du second degré concentrique à (S_k) et supplémentaire du cône asymptote de (Q_k). Chaque plan tangent de ce cône contient deux cercles dont les axes sont les deux génératrices de (Q_k) qui sont perpendiculaires à ce plan. C'est donc ce que l'on appelle un *plan tangent double de la surface*. Comme tout plan

tangent double de la cyclide la coupe suivant une courbe du quatrième ordre ayant quatre points doubles, dont deux à l'infini sur le cercle, cette section doit se décomposer en deux cercles, sauf dans le cas que nous rencontrerons plus tard, où elle se décompose en une droite et une cubique gauche. Sous cette réserve, on voit, comme nous l'avions déjà remarqué au n° 268, que l'emploi des sphères bitangentes nous donne tous les plans tangents doubles de la surface. Ils enveloppent cinq cônes du second degré.

291. Les propositions précédentes se rapportent aux cas les plus généraux et doivent, dans certaines hypothèses particulières, subir des modifications que l'on découvrira aisément. Par exemple, si l'une des sphères (S_k) se réduit à un plan, les centres des sphères orthogonales (S) sont dans ce plan, la quadrique (Q_k) vient s'aplatir et se réduire à la portion de ce plan limitée par une conique; les axes des cercles de section par les sphères (S) deviennent les tangentes à cette conique.

De même, si la cyclide se réduit au troisième degré, les plans des sections circulaires ne peuvent pas la couper suivant un autre cercle; ils ne peuvent la couper que suivant une droite. Et en effet, on a vu que, dans ce cas, la section de la cyclide par le plan de l'infini se compose du cercle de l'infini et d'une droite d. On peut mener, par cette droite d, cinq plans tritangents à la cyclide. Chacun d'eux est tangent à la cyclide en un point à distance finie et il contient deux droites d', d'' qui passent par ce point et vont nécessairement couper la droite d. Les dix plans qui passent par ces droites donnent les dix séries de sections circulaires de la cyclide. Pour les plans passant par des droites telles que d', d'', les axes des cercles correspondants sont perpendiculaires, soit à d', soit à d''. C'est le cas où la quadrique (Q_k) devient un paraboloïde (dont les plans directeurs seront perpendiculaires à d' et à d''). Les plans tangents doubles n'enveloppent plus un cône, mais sont assujettis à passer par les droites telles que d', d''.

292. La démonstration analytique des principales propriétés que nous venons d'établir va nous permettre de compléter certaines d'entre elles. Cherchons d'abord l'équation du lieu des centres des sphères bitangentes.

Reprenons les équations

$$(12) \qquad m_k = 0, \qquad \sum_i \frac{m_i^2}{a_i - a_k} = 0,$$

qui définissent les sphères bitangentes de chaque série. Nous avons vu (n° 252) que le centre de chacune de ces sphères (S) a ses coordonnées définies par les formules

$$(13) \qquad x_i = m_i - \frac{1}{2R_i} \frac{\Sigma m_h^2}{\sum \frac{m_h}{R_h}}.$$

Comme on a ici $m_k = 0$, il viendra

$$(14) \qquad x_k = -\frac{1}{2R_k} \frac{\Sigma m_h^2}{\sum \frac{m_h}{R_h}};$$

on aura donc

$$m_i = \frac{1}{R_i}(R_i x_i - R_k x_k),$$

en sorte que l'équation ponctuelle du lieu des centres sera

$$(15) \qquad \sum_i \frac{1}{R_i^2(a_i - a_k)}(R_i x_i - R_k x_k)^2 = 0,$$

la somme étant étendue aux quatre valeurs de i distinctes de k.

Si l'on désigne par S_i la puissance d'un point par rapport à la sphère coordonnée (S_i), l'équation précédente peut s'écrire

$$(16) \qquad \sum_i \frac{(S_i - S_k)^2}{R_i^2(a_i - a_k)} = 0.$$

On voit qu'elle représente, en général, une quadrique admettant un tétraèdre conjugué dont les faces sont définies par les équations

$$S_i - S_k = 0.$$

Comme on obtient ainsi les plans radicaux de (S_k) et des autres sphères coordonnées, le tétraèdre par rapport auquel la quadrique (Q_k) est conjuguée a pour sommets les centres des sphères coordonnées autres que (S_k). Nous savons, et c'est une remarque essentielle, qu'il est aussi conjugué par rapport à la sphère (S_k),

qui peut être définie (n° 247) par l'équation

$$\sum_i \frac{1}{R_i^2}(S_i - S_k)^2 = 0. \tag{17}$$

293. En résumé, *la cyclide peut, de cinq manières différentes, être considérée comme l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une quadrique* (Q_k) *et qui est assujettie à couper à angle droit une sphère* (S_k). *Cette sphère variable touche la cyclide en deux points et la coupe suivant deux cercles. Les cinq sphères* (S_k) *relatives à ces cinq modes de génération sont deux à deux orthogonales, et le tétraèdre conjugué commun à* (S_k) *et à* (Q_k) *est formé par les centres des sphères orthogonales autres que* (S_k).

Nous rappellerons que la quadrique (Q_k) a été appelée la *déférente* relative à un des modes de génération, et la sphère correspondante (S_k), la sphère *directrice* relative à ce même mode de génération.

Nous savons que les cinq sphères directrices sont orthogonales; nous allons démontrer de nouveau que *les cinq déférentes* (Q_k) *sont homofocales.*

Soit, en effet, (Q_k) l'une d'elles; toute sphère qui a son centre en un point m de (Q_k) et est orthogonale à (S_k) touche la cyclide en deux points M, M' inverses par rapport à (S_k), tels, par conséquent, que la droite MM' aille passer par le centre de (S_k). Cette droite MM' est d'ailleurs nécessairement, comme il arrive pour toutes les enveloppes de sphères, perpendiculaire au plan tangent en m à la déférente. Par conséquent, les deux points M, M' demeureront à distance finie tant que le plan (P) tangent en m à la déférente ne sera pas isotrope. Mais supposons que ce plan (P) devienne isotrope, c'est-à-dire que le point m vienne se placer sur la ligne de contact de la développable isotrope tangente à la déférente. Le plan (P) sera tangent au cercle de l'infini en un certain point μ, et il sera aussi tangent en ce point à la sphère de centre m qui est orthogonale à (S_k). D'autre part, la droite MM', qui est constamment perpendiculaire à (P), deviendra isotrope et ira passer par le point μ, qui deviendra ainsi la position limite de l'un des points de contact M, M'. La cyclide, devant admettre en ce

point μ le même plan tangent que la sphère (S), y sera nécessairement tangente au plan (P).

Ainsi, *les plans tangents en tous les points du cercle de l'infini aux deux nappes de la cyclide qui se croisent sur ce cercle sont ceux qui sont tangents à la déférente* (Q_k).

Cette proposition s'appliquant aux cinq modes de génération, on reconnaît immédiatement que les cinq déférentes sont inscrites dans la même développable isotrope. En d'autres termes, *elles sont homofocales*.

Empruntant à Laguerre (n° 240) la définition des focales singulières, nous aurons la proposition suivante :

Les focales singulières de la cyclide sont les coniques focales de l'une quelconque des cinq déférentes, qui sont homofocales.

294. Cherchons maintenant les focales ordinaires de la cyclide. Nous avons vu (n° 239) que la développable isotrope circonscrite à une surface quelconque est le lieu des centres des sphères de rayon nul tangentes à cette surface. Puisque nous avons appris (n° 287) à trouver la condition de contact d'une sphère et de la cyclide, il suffira d'appliquer cette condition à l'hypothèse où le rayon de la sphère devient nul.

L'équation d'une sphère de centre $(x_1, \ldots, x_5)$ et de rayon nul est évidemment (n° 251)

$$\Sigma x_i X_i = 0.$$

En appliquant la condition de contact on voit que l'équation de la développable isotrope circonscrite à la cyclide s'obtiendra en exprimant que l'équation en λ

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0 \tag{18}$$

a une racine double. Cette condition, nous l'avons vu, s'obtiendra sous la forme

$$I^3 - 27 J^2 = 0, \tag{19}$$

où I sera du quatrième ordre et J du sixième par rapport aux x_i. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que l'arête de

rebroussement de la développable isotrope est définie par les équations

$$(20) \qquad I = 0, \qquad J = 0.$$

Nous avons vu que les lignes doubles de la développable isotrope circonscrite à une surface quelconque contiennent les centres de *toutes* les sphères de rayon nul tangentes à la surface. Ces lignes doubles sont ce que nous avons appelé les focales *ordinaires* de la surface et nous avons donné à leurs points le nom de *foyers*. Puisque, dans le cas de la cyclide, nous avons déterminé toutes les sphères doublement tangentes, il nous suffira de choisir, parmi elles, celles qui sont de rayon nul. Dans le mode de génération défini par la déférente (Q_k) et la sphère (S_k), ces sphères sont évidemment celles dont le centre se trouve sur (S_k). Ainsi, *la cyclide a cinq focales ordinaires qui sont les biquadratiques sphériques, intersections de chaque déférente par la sphère directrice correspondante.*

D'après les remarques présentées au n° 240, chacune de ces courbes admet les quatre autres comme focales. Chacune d'elles détermine toute la développable isotrope circonscrite à la cyclide. Car, soit d une génératrice rectiligne de cette développable tangente en m à la cyclide; elle coupera la sphère (S_k) en un point m_k qui sera le centre d'une sphère de rayon nul qui touchera la cyclide en m et, par suite, la touchera aussi au point m' qui est l'inverse de m par rapport à (S_k). La sphère de rayon nul ayant son centre en m_k sera donc doublement tangente; elle appartiendra, par conséquent, à la focale, intersection de (S_k) et de (Q_k).

295. La théorie des sphères doublement tangentes va nous conduire à d'autres conséquences et nous montrer que, sur la cyclide, il y a seize droites rencontrant le cercle de l'infini. Pour cela, nous allons déterminer les sphères doublement tangentes qui appartiennent à deux modes distincts de génération. Comme elles auront quatre points de contact avec la cyclide, elles la couperont suivant quatre droites, nécessairement isotropes, formant un quadrilatère gauche dont les sommets seront les points de contact des sphères et de la cyclide. Cherchons, par exemple, les sphères appartenant aux deux modes de génération pour lesquels les sphères directrices sont (S_1) et (S_2).

On aura, pour ces sphères, les conditions

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = 0,$$

$$\frac{m_3^2}{a_3 - a_1} + \frac{m_4^2}{a_4 - a_1} + \frac{m_5^2}{a_5 - a_1} = 0, \qquad \frac{m_3^2}{a_3 - a_2} + \frac{m_4^2}{a_4 - a_2} + \frac{m_5^2}{a_5 - a_2} = 0$$

qui les déterminent entièrement. On trouve ainsi, pour leur équation,

$$(a_4 - a_5)x_3\sqrt{f'(a_3)} + (a_5 - a_3)x_4\sqrt{f'(a_4)} + (a_3 - a_4)x_5\sqrt{f'(a_5)} = 0;$$

en posant, pour abréger,

$$f(u) = (u - a_1)(u - a_2)(u - a_3)(u - a_4)(u - a_5).$$

Si donc on désigne par i, k, l trois indices pris dans la suite 1, 2, 3, 4, 5, on voit que les sphères cherchées seront définies par les équations

$$(21)\quad (a_k - a_l)x_i\sqrt{f'(a_i)} + (a_l - a_i)x_k\sqrt{f'(a_k)} + (a_i - a_k)x_l\sqrt{f'(a_l)} = 0.$$

On obtient ainsi, en tout, quarante sphères et quarante quadrilatères gauches suivant lesquels elles coupent la cyclide.

Si l'on prend partout les radicaux $\sqrt{f'(a_i)}$ avec le même signe, on voit que les dix sphères correspondantes ont en commun la ligne définie par les équations

$$(22)\qquad x_i\sqrt{f'(a_i)} = a_i\lambda + \mu \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5),$$

où λ et μ désignent deux arbitraires. Comme les dix sphères n'ont pas le même plan radical, cette ligne ne peut être qu'une droite, qui leur est commune à toutes.

Ainsi, *les équations* (22), *où l'on peut faire varier les signes des radicaux, représentent les seize droites de la cyclide.*

Quand on change le signe d'un radical, $\sqrt{f'(a_i)}$ par exemple, cela revient à remplacer la droite par son inverse, relative à (S_i). Ainsi, toutes les droites se déduisent de l'une d'elles par les inversions dont les sphères principales sont les cinq sphères (S_i).

296. On peut encore obtenir les droites en raisonnant de la manière suivante :

Toutes les droites isotropes situées sur la cyclide, et ce sont les

seules que puisse contenir une cyclide du quatrième ordre, appartiendront à une infinité de sphères qui couperont la cyclide suivant une de ces droites et une cubique gauche rencontrant cette droite en deux points. Nous avons vu (n° 287) que l'on obtient la condition de contact d'une sphère en exprimant que l'équation en λ

$$\sum \frac{m_i^2}{a_i - \lambda} = 0$$

a une racine double. Ici il faudra exprimer que cette équation a deux racines doubles. Si on les appelle α et β, cela donne l'identité

$$\sum \frac{m_i^2}{a_i - \lambda} = \frac{m_6^2(\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)^2}{f(\lambda)},$$

$f(\lambda)$ étant le polynome déjà défini. On en déduit, pour chaque valeur de l'indice k,

$$m_k = i m_6 \frac{(a_k - \alpha)(a_k - \beta)}{\sqrt{f'(a_k)}},$$

et les points de contact correspondants seront déterminés par les formules

$$x_k = \frac{a_k - \alpha}{\sqrt{f'(a_k)}}, \qquad x_k = \frac{a_k - \beta}{\sqrt{f'(a_k)}}. \tag{23}$$

Lorsqu'on fera varier α ou β, on aura des formules équivalentes à celles (22) que nous avons données plus haut.

Voici encore quelques propriétés relatives à ces droites. Soit d l'une d'elles et m_i le point où elle coupe la sphère directrice (S_i), point nécessairement situé sur la focale que contient (S_i).

L'inverse d_i de d par rapport à (S_i) passe évidemment par m_i, et les deux droites d, d_i constituent un cercle de rayon nul, situé à la fois sur la cyclide et sur la sphère de rayon nul dont le centre est m_i. Ce point m_i se distingue des autres points de la focale par une propriété particulière. On peut faire passer par d et d_i une infinité de sphères dont les centres sont sur la droite δ qui passe par m_i et est perpendiculaire à d et à d_i. Cette droite δ est évidemment tangente en m_i à la sphère (S_i). Les sphères qui contiennent le cercle (d, d_i) sont doublement tangentes à la cyclide, et, comme elles sont orthogonales à (S_i), elles appartiennent au mode de génération défini par (Q_i) et (S_i). Donc, la droite δ est

une génératrice rectiligne de (Q_i) et, comme elle touche la sphère (S_i) en m_i, elle est tangente à la focale.

Ainsi, *les points où les droites de la cyclide rencontrent l'une des focales sont ceux, au nombre de huit, où cette focale est touchée par les génératrices rectilignes de la déférente qui la contient*. Ce sont les *ombilics* de la cyclide. *Il y a donc quarante ombilics.*

Pour traiter complètement ce sujet, il ne nous reste plus qu'à indiquer une notation schématique permettant de définir toutes les droites et de retrouver celles qui se coupent.

Choisissons-en une au hasard d. Désignons par d_i celle qui se déduit de d par l'inversion dont la sphère principale est (S_i) et par $d_{ikl\ldots}$ la droite que l'on obtient en faisant successivement les inversions par rapport à (S_i), (S_k), (S_l), ... Comme deux inversions par rapport à deux sphères rectangulaires sont interchangeables, d_{ik} et d_{ki} représenteront la même droite. D'autre part, on n'aura jamais besoin d'employer plus de deux indices, parce que les inversions par rapport aux cinq sphères (S_i) se détruisent. On pourra, par exemple, remplacer d_{123} par d_{45}, d_{1234} par d_5, d_{12345} par d. On ne trouve donc que les seize droites

$$d,\quad d_1,\quad d_2,\quad d_3,\quad d_4,\quad d_5,$$
$$d_{12},\quad d_{13},\quad d_{14},\quad d_{15},\quad d_{23},\quad d_{24},\quad d_{25},\quad d_{34},\quad d_{35},\quad d_{45}.$$

Pour savoir celles qui coupent l'une d'elles, d_{12} par exemple, il suffira d'ajouter à 1,2 successivement chacun des cinq indices, ce qui, en tenant compte des remarques précédentes, nous donnera

$$d_2,\quad d_1,\quad d_{45},\quad d_{35},\quad d_{34}.$$

En particulier, deux droites d_{ik} se coupent quand elles n'ont aucun indice commun.

297. Nous terminerons cette étude des sphères doublement tangentes en montrant comment, lorsqu'un mode de génération défini par la sphère directrice (S_k) et la déférente (Q_k) est donné, on peut en déduire tous les autres.

Désignons par C_i le centre de la sphère directrice (S_i) et par (P_{ij}) le plan radical de (S_i) et de (S_j). Nous avons vu que chacun des centres C_i est le point de concours des hauteurs du tétraèdre

formé par les quatre autres centres, que ce tétraèdre est conjugué à la fois par rapport à (S_i) et à (Q_i). Il suit de là que le segment formé par deux centres quelconques C_i, C_j divise harmoniquement les trois sphères et les trois déférentes dont l'indice est différent de i et de j; que le plan (P_{ij}) a pour pôle C_j par rapport à (S_i) ou à (Q_i) et pour pôle C_i par rapport à (S_j) ou à (Q_j).

Il suit de là également que, si l'on nous donne (S_k) et (Q_k), les centres C_i des sphères directrices correspondantes aux quatre autres modes de génération seront les sommets du tétraèdre conjugué commun à (S_k) et à (Q_k). Les sphères elles-mêmes seront déterminées puisque l'on connaîtra leurs centres et qu'elles devront être orthogonales à (S_k). Quant aux déférentes (Q_i), elles doivent être homofocales à (Q_k) et, de plus, on connaît, pour chacune, un de ses tétraèdres conjugués, qui est formé par les centres des cinq sphères autres que C_i. Cette double condition sera plus que suffisante pour les déterminer [1].

298. Pour résoudre la même question, *Laguerre* a donné des règles élégantes, mais moins simples. Nous allons les faire connaître.

D'après un théorème de *Poncelet*, la développable (Δ_k) circonscrite à (S_k) et à (Q_k) admet quatre lignes doubles, qui sont des coniques situées dans les quatre faces du tétraèdre conjugué commun à (S_k) et à (Q_k). Nous les désignerons par la notation (C_i), i étant différent de k.

---

[1] En effet, soit

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=0$$

l'équation d'une famille de surfaces homofocales. Le plan polaire d'un point x', y', z' aura pour équation

$$\frac{xx'}{a-\lambda}+\frac{yy'}{b-\lambda}+\frac{zz'}{c-\lambda}-1=0.$$

Si l'on désigne par x'', y'', z'' les coordonnées respectives des points où il coupe les trois axes, on aura

$$x'x''=a-\lambda,\qquad y'y''=b-\lambda,\qquad z'z''=c-\lambda.$$

Par suite, quand on connaîtra un point et son plan polaire, les trois axes s'obtiendront par des moyennes proportionnelles.

D'autre part, la développable (Δ_k) vient toucher la sphère (S_k) suivant une courbe (Γ_k) qui, d'après les propriétés des développables circonscrites à la sphère, admet pour normales les génératrices rectilignes de (Δ_k). Cette courbe (Γ_k) appartient évidemment à la cyclide; car elle est le lieu des points de contact des sphères orthogonales à (S_k) dont les centres décrivent la courbe de contact de (Δ_k) et de (Q_k). On voit ainsi que la cyclide coupe à angle droit la sphère (S_k) suivant la courbe (Γ_k). Désignons par m un point quelconque de cette courbe et par d la génératrice rectiligne de Δ_k qui est normale en m à (Γ_k). Toute sphère ayant son centre sur d et passant en m sera orthogonale à (S_k) et tangente en m à (Γ_k) et à la cyclide. Soit p le point où la génératrice d vient rencontrer l'une quelconque (C_i) des coniques doubles de (Δ_k). Par ce point p, puisqu'il est double, vient passer une autre génératrice rectiligne de (Δ_k) qui, elle aussi, sera orthogonale à (Γ_k) et tangente à la cyclide, mais en un point m', *différent de* m. Puisque pm et pm' sont des tangentes de (S_k), nécessairement égales, la sphère de centre p qui passera en m passera aussi en m' et sera, par conséquent, doublement tangente à la cyclide.

Ainsi, chacune des quatre lignes doubles (C_i) nous donne une nouvelle série de sphères doublement tangentes à la cyclide. Ces nouvelles séries de sphères appartiennent évidemment aux autres modes de génération; elles nous font donc connaître les déférentes correspondantes, qui sont plus que déterminées par la condition d'être homofocales à (Q_k) et de contenir l'une des coniques (C_i).

Au reste, il suffira de connaître un seul point p de (C_i); car le plan tangent en ce point à la déférente correspondante sera celui qui est perpendiculaire sur le milieu de mm' et passera, par suite, par le centre de (S_k); et la déférente, elle-même, sera déterminée par la condition de passer en p et d'y admettre un plan tangent donné.

299. Les constructions précédentes mettent en évidence une belle proposition donnée par *Chasles* et relatives aux surfaces homofocales.

Étant données une sphère (S_1) et une quadrique (Q_1), désignons par la notation $\boxed{(S_1)(Q_1)}$ la développable circonscrite à ces deux

surfaces. Soient (C_2), (C_3), (C_4), (C_5) les quatre lignes doubles de cette développable, respectivement situées dans les quatre faces du tétraèdre conjugué commun à (S_1) et à (Q_1). Nous venons de montrer que, par chacune de ces coniques passe une surface homofocale à (Q_1). Nous désignerons par (Q_2), (Q_3), (Q_4), (Q_5) les surfaces qui passent respectivement par les coniques (C_2), (C_3), (C_4), (C_5), et, si nous leur associons les quatre sphères (S_2), (S_3), (S_4), (S_5) orthogonales à (S_1) et dont les centres sont les sommets du tétraèdre conjugué commun à (S_1) et à (Q_1), la sphère (S_i) étant celle dont le centre est le sommet opposé à la face qui contient (C_i) et qui coupe (S_1) suivant le cercle de cette sphère situé dans le plan de (C_i), on aura, nous venons de le voir, les cinq modes de génération d'une cyclide déterminés par chaque sphère (S_i) et la quadrique (Q_i).

Le plan radical P_{12} des deux sphères (S_1), (S_2) est celui qui contient la conique C_2 et nous avons vu que (C_2), (Q_1), (S_1) sont inscrites dans une même surface développable. Si nous échangeons les deux modes de génération correspondants aux indices 1 et 2, nous pourrons donc conclure que le plan radical P_{12} coupera (Q_1) suivant une conique (C'_1) telle que (C'_1), (Q_2), (S_2) soient inscrites dans une même développable. Cela nous permet d'énoncer le théorème de Chasles :

Étant données une quadrique (Q) *et une sphère* (S), *les lignes doubles de la développable* $\boxed{(Q)(S)}$ *sont sur des quadriques homofocales à* (Q). *Étant donnée une de ces surfaces* (Q_1) *qui passe par la ligne double* (C_1), *le plan de* (C_1) *coupe* (Q) *suivant une conique* (K_1). *La développable* $\boxed{K_1 Q_1}$ *est circonscrite à une sphère* (S_1) *orthogonale à* (S) *et ayant pour centre le pôle, par rapport à* (S) *et à* (Q), *du plan de* (C_1).

CHAPITRE VI.

LE SYSTÈME TRIPLE ORTHOGONAL FORMÉ DE TROIS FAMILLES DE CYCLIDES.

On peut, avec des cyclides, obtenir un système triple orthogonal tout semblable à celui des surfaces homofocales du second degré. — Les cyclides qui le composent sont toutes homofocales, et les trois familles du système sont représentées par une seule équation. — Toutes les fois que deux ou trois familles de surfaces orthogonales sont, comme il arrive ici, représentées par une seule équation, elles sont homofocales. — Emploi du système pour la discussion des différentes formes de cyclides. — Ombilics. — Sections circulaires. — Nombre des séries de sections circulaires réelles pour chacune des familles du système triple orthogonal.

---

300. Avant de poursuivre cette étude, et pour lui donner le développement qu'elle comporte, nous allons établir une propriété essentielle des cyclides, et montrer qu'on peut obtenir avec elles un système triple orthogonal, qui constitue la généralisation la plus directe de celui que l'on forme avec les surfaces homofocales du second degré.

Mettons l'équation d'une cyclide sous la forme

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0, \tag{1}$$

qui rappelle celle des surfaces homofocales du second degré. Nous allons montrer qu'ici aussi, les cyclides correspondantes à deux valeurs différentes de λ sont, à la fois, orthogonales et homofocales.

Le premier point s'établit sans difficulté si l'on applique aux deux cyclides représentées par les équations

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0, \qquad \sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda'} = 0,$$

la condition d'orthogonalité donnée au n° 261. En vertu de

l'identité

$$(\lambda-\lambda')\sum\frac{x_i^2}{(a_i-\lambda)(a_i-\lambda')}=\sum\frac{x_i^2}{a_i-\lambda}-\sum\frac{x_i^2}{a_i-\lambda'},$$

cette condition se trouve vérifiée en tous les points communs aux deux surfaces.

Quant à la seconde propriété, on peut la mettre en évidence de deux manières différentes. Cherchons d'abord la *déférente* et la *sphère directrice* relatives au mode de génération d'indice k. En appliquant les formules (16), (17) du Chapitre précédent et tenant compte du changement de notations, nous avons, pour la déférente, l'équation

$$(Q_k)\qquad \sum_i\frac{1}{R_i^2}\,\frac{a_i-\lambda}{a_i-a_k}(R_ix_i-R_kx_k)^2=0,$$

et, pour la sphère directrice, l'équation

$$(S_k)\qquad \sum\frac{1}{R_i^2}(R_ix_i-R_kx_k)^2=0.$$

La comparaison de ces équations montre immédiatement que la courbe d'intersection de (S_k) et de (Q_k) ne change pas lorsque λ varie. Donc, toutes les cyclides représentées par l'équation (1), où λ varie, ont les mêmes focales.

On peut encore donner la démonstration suivante qui subsiste si quelqu'une des sphères directrices se réduit à un plan.

Nous avons vu au n° 294 comment on obtient l'équation de la développable isotrope circonscrite à la cyclide. En appliquant au cas actuel la condition que nous avons donnée et choisissant des notations appropriées, nous avons à exprimer que l'équation en μ

$$\sum\frac{x_i^2}{\dfrac{1}{a_i-\lambda}-\dfrac{1}{\mu-\lambda}}=0$$

a une racine double. Or, si l'on tient compte de la relation identique qui relie les coordonnées x_i, on peut réduire cette équation à la forme simple

$$(2)\qquad \sum\frac{x_i^2}{a_i-\mu}=0.$$

On voit que la condition d'égalité des racines ne dépendra pas de λ. Et, par conséquent, la développable isotrope circonscrite sera la même pour toutes les cyclides représentées par l'équation (1). Les lignes doubles de cette développable, qui sont les focales communes à toutes les cyclides, sont définies par les équations

$$(3) \qquad x_k = 0, \qquad \sum \frac{x_i^2}{a_i - a_k} = 0,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de i différentes de k.

301. Si l'on rapproche le système orthogonal précédent de celui qui est formé avec les surfaces homofocales du second degré, on voit que l'un et l'autre sont obtenus avec des surfaces qui sont représentées par une équation unique, et sont à la fois orthogonales et homofocales. Il y a là une coïncidence que l'on peut rattacher à une proposition générale.

Soit, en coordonnées rectangulaires, une équation

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0,$$

indécomposable par rapport à λ, et représentant une famille de surfaces. Supposons qu'elle soit du deuxième ou du troisième degré par rapport à λ. Il y aura deux, ou trois, surfaces de la famille passant en un point de l'espace. Si ces surfaces sont toujours orthogonales, leur enveloppe ne pourra être qu'une développable isotrope, et par conséquent elles seront homofocales. En effet, soient α, β, γ; α', β', γ' les cosinus directeurs des normales à deux quelconques des surfaces qui passent en un point de l'espace. En vertu de la condition d'orthogonalité, on aura

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Or, s'il y a une enveloppe, deux des surfaces précédentes viennent se confondre en chaque point de cette enveloppe, et elles y admettent le même plan tangent que l'enveloppe. La condition précédente se réduit à la suivante :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

qui est vérifiée en tous les points de l'enveloppe et montre que cette enveloppe doit être une développable isotrope.

302. Revenons au système orthogonal formé par les cyclides. Il faut remarquer d'abord qu'il possède une propriété qui n'existe pas pour le système du second degré. La forme de l'équation (1) subsiste quand on soumet les a_i et λ à une même substitution linéaire.

Si l'on effectue, en effet, la substitution

$$a_i \left| \frac{ma_i + n}{pa_i + q} \right. \qquad \lambda \left| \frac{m\lambda + n}{p\lambda + q}, \right.$$

on verra aisément, pourvu qu'on tienne compte de la relation identique entre les coordonnées, que la forme de l'équation (1) n'est pas changée.

Cette remarque permet de simplifier beaucoup la discussion des différents cas particuliers.

Commençons par examiner l'hypothèse où quatre des sphères sont réelles, (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) par exemple, la cinquième (S_5) ayant pour rayon une imaginaire pure. Alors tous les coefficients a_i seront réels. Si l'on fait la substitution

$$\lambda \left| \frac{k}{\lambda - a_5 + \varepsilon} \right. \qquad a_i \left| \frac{k}{a_i - a_5 + \varepsilon}, \right.$$

on pourra évidemment disposer de k et de ε de manière que la nouvelle valeur de a_5 soit, relativement, la plus petite de toutes. Nous pourrons donc toujours supposer l'ordre de grandeur suivant :

$$(4) \qquad a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5.$$

Si cela était même nécessaire, on pourrait, en ajoutant une constante à λ, rendre positifs tous ces coefficients.

Si nous prenons alors un point réel de l'espace, nous pourrons supposer réelles les cinq quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad ix_5.$$

Et, par conséquent, si nous voulons obtenir celles des cyclides représentées par l'équation (1) qui passent par le point considéré, l'équation en λ qui les déterminera aura ses trois racines réelles et comprises respectivement entre a_1 et a_2, entre a_2 et a_3, entre a_3 et a_4. Comme dans les surfaces du second degré, nous aurons décomposé la famille unique représentée par l'équation (1) en trois

autres familles distinctes, composées de surfaces qui se couperont mutuellement à angle droit.

Passons au cas où deux sphères coordonnées sont imaginaires conjuguées, par exemple (S_4) et (S_5). Alors, pour un point réel, x_1, x_2, x_3 sont réelles x_4 et x_5 imaginaires conjuguées. L'équation prendra la forme

$$(5) \qquad \frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}+\frac{(z+iz_1)^2}{\alpha+i\beta-\lambda}+\frac{(z-iz_1)^2}{\alpha-i\beta-\lambda}=0,$$

où l'on peut supposer

$$a_1 > a_2 > a_3.$$

Il y aura une racine λ entre a_1 et a_2 une autre entre a_2 et a_3; la troisième sera donc réelle et hors de l'intervalle $(a_1 a_3)$. Ici encore, il existe trois familles nettement séparées.

303. Désignons par ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des trois familles de cyclides que nous venons de séparer. Dans les deux cas que nous avons examinés, on pourra supposer que l'on a

$$(6) \qquad a_1 > \rho > a_2 > \rho_1 > a_3,$$

et il est clair qu'en choisissant un multiplicateur convenable pour les x_i, on pourra toujours écrire l'identité

$$\sum \frac{x_i^2}{\lambda-a_i}=\frac{(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)}{(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)(\lambda-a_4)(\lambda-a_5)},$$

qui devra être vérifiée pour toutes les valeurs de λ. Si l'on introduit les notations suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi(u)=(u-\rho)(u-\rho_1)(u-\rho_2), \\ f(u)=(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3)(u-a_4)(u-a_5), \end{cases}$$

on aura

$$(8) \qquad x_i^2=\frac{\varphi(a_i)}{f'(a_i)}=\frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}.$$

Commençons par envisager le cas où (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) sont réelles. Les inégalités (4) nous montrent que les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4, ix_5 sont toutes réelles. Il y aura seize points réels correspondants à un même système de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2, et ces seize

points se déduiront de l'un d'eux par les inversions dont les sphères principales sont les sphères coordonnées.

Supposons maintenant que (S_4), (S_5) soient imaginaires conjuguées. D'après les inégalités (6), les carrés x_1^2, x_2^2, x_3^2 seront de même signe. On pourra donc les ramener à être positifs, et les coordonnées x_1, x_2, x_3 deviendront réelles; mais, comme les déterminations de x_4 et de x_5 doivent être choisies imaginaires conjuguées, il n'y aura plus que huit points réels correspondants à un même système de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2.

304. Examinons maintenant les formes différentes que peuvent prendre les cyclides dont se compose le système orthogonal.

Nous nous appuierons sur la remarque suivante, qui est à peu près évidente. Supposons que nous voulions discuter l'une des surfaces, celle qui correspond à une valeur donnée de ρ_i par exemple :

Sur cette surface, les paramètres ρ_k et ρ_l devront varier librement entre les limites qui leur sont assignées. Si, au cours de cette variation, l'un ou l'autre peut prendre la valeur a_h, la coordonnée x_h pourra s'annuler, et les deux régions de la cyclide qui correspondront aux valeurs de signes contraires de ce radical, c'est-à-dire qui sont inverses l'une de l'autre par rapport à (S_h), viendront se raccorder le long de la courbe $x_h = 0$, suivant laquelle elles couperont à angle droit la sphère (S_h).

Ce point étant admis, examinons d'abord l'hypothèse où les sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) sont réelles.

Remarquons d'abord qu'en aucun cas x_5 ne s'annulera. On pourra donc fixer arbitrairement le signe du radical $\sqrt{\frac{\varphi(a_5)}{f'(a_5)}}$, par exemple de telle manière que ix_5 soit positive.

Pour les surfaces de la première famille, celles de paramètre ρ, il faudra faire varier ρ_1 entre a_2 et a_3, ρ_2 entre a_3 et a_4. Donc le premier radical x_1 ne s'annulera pas. Et par suite, en lui donnant successivement le signe + et le signe —, on aura deux nappes distinctes de la surface, inverses l'une de l'autre par rapport à (S_1) et *séparées par cette sphère*. Comme x_2, x_3, x_4 peuvent s'annuler, on voit, au contraire, que ces deux nappes couperont les trois autres sphères réelles.

Ces conclusions s'appliquent avec les modifications convenables à la troisième famille. Les cyclides qui la composent sont formées de deux nappes qui sont séparées par la sphère (S_4) et coupent à angle droit les trois premières sphères. On pourrait le voir directement, mais il vaut mieux remarquer qu'il n'y a aucune *distinction essentielle* à faire entre la première et la troisième famille, qu'on peut échanger l'une dans l'autre par une substitution linéaire de la forme

$$\lambda \left| \frac{h}{k - \lambda} \right. .$$

Considérons maintenant les cyclides de paramètre ρ_1. Ici, ρ varie de a_1 à a_2, ρ_2 de a_3 à a_4. Donc les radicaux x_1, x_2, x_3, x_4 peuvent s'annuler, et les cyclides se composent d'une seule nappe rencontrant à angle droit les quatre sphères réelles.

Il est aisé de reconnaître et de discuter la forme des focales communes aux trois familles. On sait que la focale (F_i), située sur la sphère (S_i), s'obtient en exprimant que deux des racines de l'équation (1) (n° 300) deviennent égales à a_i. On ne peut donc, dans le cas actuel, obtenir de focale réelle que si ρ et ρ_1 deviennent égaux à a_2, ou si ρ_1 et ρ_2 deviennent égaux à a_3. Il n'y a donc que deux focales réelles, l'une (F_2) située sur (S_2), l'autre (F_3) sur (S_3). A cause de la symétrie que nous avons constatée et qui nous permet d'échanger (S_1), (S_2) avec (S_4), (S_3), tout ce que nous dirons de (F_2) pourra s'appliquer à (F_3).

Or, la focale (F_2) est définie par les équations

$$x_1 = \sqrt{a_1 - \rho_2}\,\frac{a_1 - a_2}{\sqrt{f'(a_1)}}, \qquad x_2 = 0,$$

$$x_3 = \sqrt{a_3 - \rho_2}\,\frac{a_3 - a_2}{\sqrt{f'(a_3)}}, \qquad x_4 = \sqrt{a_4 - \rho_2}\,\frac{a_4 - a_2}{\sqrt{f'(a_4)}},$$

où ρ_2 varie entre a_3 et a_4. Puisque x_1 ne s'annule pas, cette focale se compose de deux traits, inverses l'un de l'autre par rapport à (S_1). Elle partage donc la sphère (S_2) en trois régions, deux, que nous dirons être à l'intérieur de (F_2) et qui seront inverses, l'une de l'autre, par rapport à (S_1); l'autre, que nous appellerons l'extérieur de (F_2), qui sera à elle-même sa propre inverse relativement à (S_1) et contiendra, par conséquent, le cercle d'intersection de (S_2) et de (S_1).

En faisant l'échange indiqué, nous voyons que la focale (F_3) se composera de deux traits et partagera la sphère (S_3) en trois régions; deux d'entre elles, que nous appellerons l'intérieur de (F_3), seront inverses, l'une de l'autre, par rapport à (S_4); la troisième, qui les sépare et que nous appellerons l'extérieur de (F_3), contiendra le cercle d'intersection de (S_3) et de (S_4). Les deux focales (F_2), (F_3) rencontrent, l'une et l'autre, le cercle d'intersection de (S_2) et de (S_3). Sur ce cercle, les quatre sommets de l'une seront les foyers de l'autre.

Cela posé, considérons successivement les trois familles de notre système orthogonal, et d'abord les surfaces de paramètre ρ. Quand ρ est très voisin de a_1, la coordonnée x_1 est infiniment petite. Les deux nappes de la cyclide séparées par (S_1) sont très voisines de cette sphère, qu'elles viennent recouvrir, l'une et l'autre, dans sa totalité, quand ρ tend vers a_1.

Si ρ tend vers a_2, x_2 diminue indéfiniment, et la cyclide vient se confondre avec (S_2); mais elle ne la recouvre pas dans sa totalité. La nappe de la cyclide qui est à l'intérieur de (S_1) ne peut venir s'appliquer que sur une région qui est à l'intérieur du cercle d'intersection de (S_1) et de (S_2); de même la nappe qui est à l'extérieur de (S_1) ne peut venir s'appliquer que sur une région à l'extérieur de ce cercle. Donc, la cyclide de paramètre ρ vient se confondre avec les deux régions séparées que nous avons appelées l'intérieur de (F_2).

Pour la raison de symétrie invoquée tout à l'heure, les surfaces de paramètre ρ_2 se composent de deux parties, inverses par rapport à (S_4), qui, après avoir recouvert (S_4), viennent s'appliquer sur les deux régions séparées que nous avons appelées l'intérieur de (F_3).

Il nous reste à examiner la famille intermédiaire, composée des surfaces de paramètre ρ_1. Nous savons déjà que ces surfaces se composent d'une seule nappe. Pour ρ_1, très voisin de a_2, cette nappe est très voisine de (S_2) et, comme elle coupe le cercle d'intersection de (S_1) et de (S_2), on voit qu'elle entoure en quelque sorte la région que nous avons appelée l'extérieur de (F_2); puis, quand ρ_2 tend vers a_3, elle vient s'appliquer sur la région de (S_3) que nous avons appelée l'extérieur de (F_3). Cette famille joue le

même rôle que les hyperboloïdes à une nappe dans le système des quadriques homofocales.

Pour bien nous rendre compte de la disposition des trois familles, supposons qu'on ait, par une inversion, réduit les trois sphères (S_1), (S_2), (S_4) à des plans et que, en effectuant au besoin une substitution linéaire, on fasse $a_5 = \infty$. L'équation du système deviendra

$$(9) \qquad \frac{4x^2}{a_1 - \lambda} + \frac{4y^2}{a_2 - \lambda} + \frac{4z^2}{a_4 - \lambda} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^2}{(a_3 - \lambda)R^2} = 0,$$

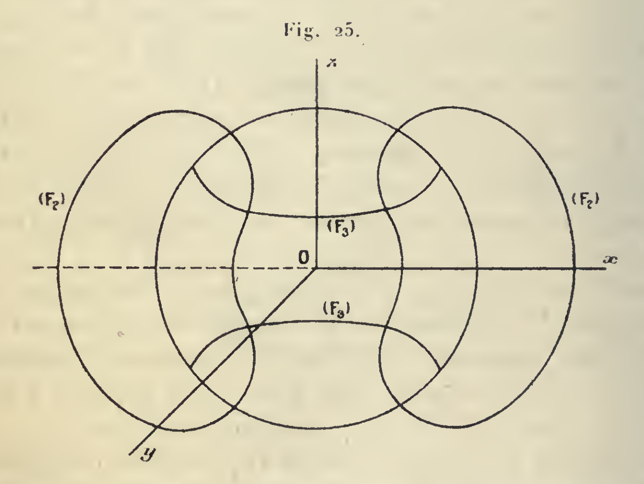
avec les conditions

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4.$$

Alors les deux focales seront composées, la première (F_2) des deux branches de la courbe plane ayant pour équations

$$(10) \qquad y = 0, \qquad \frac{4x^2}{a_1 - a_2} + \frac{4z^2}{a_4 - a_2} + \frac{(x^2 + z^2 - R^2)^2}{(a_3 - a_2)R^2} = 0,$$

Fig. 25.



la seconde (F_3), des deux branches de la conique sphérique ayant pour équations

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a_1 - a_3} + \frac{y^2}{a_2 - a_3} + \frac{z^2}{a_4 - a_3} = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

disposées comme le montre la figure 25.

Les cyclides de la première famille, composées de deux portions

séparées par le plan des zy et symétriques par rapport à ce plan, seront d'abord appliquées sur ce plan dans toute son étendue et viendront se rabattre à l'intérieur des deux branches de la focale plane.

La seconde famille sera composée de cyclides à une seule nappe, recouvrant d'abord la partie du plan des xz qui est à l'extérieur de la focale plane, puis venant s'appliquer sur la portion de la sphère qui comprend le grand cercle situé dans le plan des xy et qui est placée entre les deux branches de la conique sphérique.

Enfin, la troisième famille se composera de cyclides à deux nappes, qui commenceront par recouvrir la sphère à l'intérieur de la conique sphérique et viendront ensuite s'appliquer sur le plan des xy dans toute son étendue.

D'après cela, les cyclides de la première et de la troisième famille couperont l'une des focales en huit points, qui seront des *ombilics* réels. Au contraire, les surfaces de la deuxième famille ne couperont aucune des focales et n'auront pas d'ombilic réel ; ce qui les rapproche encore de la famille des hyperboloïdes à une nappe homofocaux.

Ajoutons cette remarque, qui s'appliquera aussi au cas suivant. Le plan de l'infini devant être assimilé à un point réel de coordonnées $x_i = \frac{1}{R_i}$, il y aura, dans *chacune* des trois familles orthogonales une cyclide, *et une seule*, qui sera du troisième degré. L'équation qui détermine ces cyclides particulières est

$$\sum \frac{1}{R_i^2} \frac{1}{\lambda - a_i} = 0. \tag{12}$$

305. Il nous reste à faire la discussion pour le cas où deux des sphères coordonnées sont imaginaires conjuguées. Nous connaissons déjà les limites du paramètre pour chaque famille. Nous savons que ρ est compris entre a_1 et a_2, que ρ_1 doit se trouver entre a_2 et a_3, que ρ_2 enfin est hors de l'intervalle $a_1\, a_3$. Mais la possibilité d'effectuer sur a_1, a_2, a_3, λ une même substitution linéaire nous montre qu'en réalité *il n'y a lieu de faire aucune distinction géométrique entre les trois familles*. Une substitution linéaire les ramènerait sans peine l'une à l'autre. Cette remarque éclairera la discussion.

Remarquons d'abord qu'il y aura ici trois focales réelles (F_1), (F_2), (F_3), au lieu de deux. Mais en revanche, elles se composent d'une seule branche.

Faisons, par exemple,

$$\rho_1 = \rho_2 = a_3,$$

nous aurons

$$(13)\quad x_1 = (a_1 - a_3)\sqrt{\frac{a_1 - \rho}{f'(a_1)}}, \qquad x_2 = (a_2 - a_3)\sqrt{\frac{a_2 - \rho}{f'(a_2)}}, \qquad x_3 = 0;$$

x_1 et x_2 pourront s'annuler puisque ρ varie de a_1 à a_2. Quant à x_4, x_5, ils devront être imaginaires conjugués pour les points réels. Donc le signe de l'un des radicaux x_4, x_5 déterminera celui de l'autre. Ainsi, chaque focale se composera d'une seule branche.

On peut faire une inversion de telle manière que les sphères (S_1), (S_2), (S_3) deviennent des plans, et alors l'équation des cyclides homofocales prendra la forme suivante :

$$(14)\quad \frac{4x^2}{\lambda - a_1} + \frac{4y^2}{\lambda - a_2} + \frac{4z^2}{\lambda - a_3} + \frac{(x^2+y^2+z^2-h^2 i)^2}{i\,h^2(\lambda - a_4)} - \frac{(x^2+y^2+z^2+h^2 i)^2}{i\,h^2(\lambda - a_5)} = 0,$$

où il faut supposer a_4 et a_5 imaginaires conjuguées.

Par une substitution linéaire réelle, on peut toujours amener a_4 et a_5 à être respectivement égaux à $+i$ et à $-i$; et l'équation précédente peut s'écrire

$$(15)\quad \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{h^2} - h^2 + 2\,\frac{1+\lambda a_1}{\lambda - a_1}x^2 + 2\,\frac{1+\lambda a_2}{\lambda - a_2}y^2 + 2\,\frac{1+\lambda a_3}{\lambda - a_3}z^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$(16)\quad h^2\,\frac{1+a_2 a_3}{a_3 - a_2} = A, \qquad h^2\,\frac{1+a_3 a_1}{a_1 - a_3} = B, \qquad h^2\,\frac{1+a_1 a_2}{a_2 - a_1} = C,$$

les équations des trois focales seront

$$(17)\quad \begin{cases} x = 0, & (y^2+z^2)^2 - h^4 - 2\,C y^2 + 2\,B z^2 = 0, \\ y = 0, & (x^2+z^2)^2 - h^4 - 2\,A z^2 + 2\,C x^2 = 0, \\ z = 0, & (x^2+y^2)^2 - h^4 - 2\,B x^2 + 2\,A y^2 = 0, \end{cases}$$

où l'on aura

$$AB + AC + BC = h^4.$$

Cette dernière relation résulte immédiatement de ce fait que si l'on pose

$$(18)\qquad a_1 = \operatorname{tang}\alpha_1, \qquad a_2 = \operatorname{tang}\alpha_2, \qquad a_3 = \operatorname{tang}\alpha_3,$$

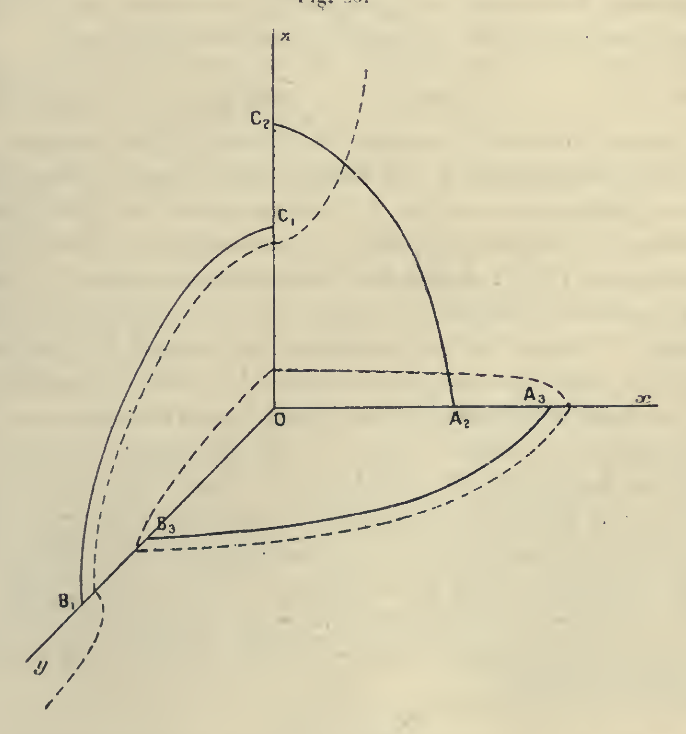
on a

$$(19)\quad A = h^2 \cot(\alpha_3 - \alpha_2), \qquad B = h^2 \cot(\alpha_1 - \alpha_3), \qquad C = h^2 \cot(\alpha_2 - \alpha_1).$$

On peut toujours supposer que l'on a

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1 + \pi,$$

Fig. 26.



ce qui permet de reconnaître que les focales sont enchevêtrées comme le montre la figure 26, où nous avons représenté un quadrant de chacune d'elles.

Chacune des trois familles va de l'extérieur de l'une des focales à l'intérieur de l'autre, ainsi que l'indiquent les traits pointillés. Par conséquent, les cyclides de chaque famille coupent l'une des

focales, et une seule, en quatre points réels, qui sont des ombilics.

Un cas particulier mérite d'être signalé. C'est celui où l'on a

$$A = B = C.$$

Alors, les trois focales deviennent égales. Ce sont des ellipses de Cassini pour lesquelles la tangente au sommet de la courbe qui ne se trouve pas sur l'axe focal coupe cette courbe en quatre points consécutifs. Les trois familles de cyclides orthogonales deviennent *identiques*; elles se déduiront l'une de l'autre par tout mouvement de rotation qui superposera à lui-même le trièdre $Oxyz$ en amenant chacune de ses arêtes sur une arête différente.

306. Nous avons vu plus haut (n° 288) que toute cyclide admet cinq séries doubles de sections circulaires, de telle manière que les cercles appartenant à une série double soient normaux à une des cinq sphères directrices. Si nous associons à la sphère (S_k) la déférente (Q_k), toutes les sphères qui auront leurs centres sur (Q_k) et couperont (S_k) à angle droit détermineront dans la cyclide deux sections circulaires, normales à (S_k). Si le centre de la sphère s'éloigne à l'infini, elle se transforme en un plan passant par le centre de (S_k). On peut donc dire que les cercles appartenant à une même série double ont leurs plans qui enveloppent un cône (C_k) ayant pour sommet le centre de (S_k) et polaire réciproque de la section de la déférente par le plan de l'infini. Nous avons déjà remarqué (n° 269) que les cônes (C_k) sont homocycliques et qu'ils contiennent les quatre points où se raccordent, le long du cercle de l'infini, les deux nappes de la cyclide qui passent par ce cercle.

Pour obtenir sous une forme simple les équations des sections circulaires, on procédera comme il suit. Écrivons l'équation des cyclides homofocales

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0,$$

et profitons de la relation identique entre les coordonnées pour éliminer l'une d'elles, par exemple x_k. Nous aurons

$$\sum_i \frac{(a_i - a_k) x_i^2}{(\lambda - a_i)(\lambda - a_k)} = 0. \tag{20}$$

Posons, d'une manière générale,

$$(21) \qquad a_{ik}^2 = \frac{a_i - a_k}{(\lambda - a_i)(\lambda - a_k)},$$

et remarquons dès à présent que le symbole a_{ik} donne naissance aux identités

$$(22) \quad a_{ii}^2 = 0, \qquad a_{ik}^2 + a_{ki}^2 = 0, \qquad a_{ik}^2 a_{lm}^2 + a_{il}^2 a_{mk}^2 + a_{im}^2 a_{kl}^2 = 0.$$

L'équation (20) prendra la forme

$$\sum_i a_{ik}^2 x_i^2 = 0.$$

Supposons, par exemple, $k = 1$. Nous pourrons l'écrire comme il suit :

$$a_{12}^2 x_2^2 - a_{31}^2 x_3^2 = a_{41}^2 x_4^2 - a_{15}^2 x_5^2.$$

Cette équation peut être remplacée par le système des deux suivantes :

$$(23) \quad \begin{cases} a_{12}x_2 - a_{31}x_3 + \mu(a_{41}x_4 - a_{15}x_5) = 0, \\ \mu(a_{12}x_2 + a_{31}x_3) + a_{41}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \end{cases}$$

ou par le suivant :

$$(24) \quad \begin{cases} a_{12}x_2 - a_{31}x_3 + \nu(a_{41}x_4 + a_{15}x_5) = 0, \\ \nu(a_{12}x_2 + a_{31}x_3) + a_{41}x_4 - a_{15}x_5 = 0. \end{cases}$$

Ces deux systèmes, lorsqu'on y regarde μ et ν comme des constantes, représentent des cercles appartenant à la surface ; et, comme les équations ne contiennent pas x_1, ces cercles sont ceux qui sont orthogonaux à la sphère (S_1). Deux cercles appartenant au même système (23) ou (24) ne se coupent pas ; mais les cercles appartenant à deux systèmes différents se coupent en deux points et sont sur une même sphère. Par exemple, les deux cercles représentés respectivement par les équations (23), (24) sont sur la sphère définie par l'équation

$$\begin{aligned} &a_{12}x_2 - a_{31}x_3 + \mu(a_{41}x_4 - a_{15}x_5) \\ &+ \nu(a_{41}x_4 + a_{15}x_5) + \mu\nu(a_{12}x_2 + a_{31}x_3) = 0. \end{aligned}$$

307. Utilisons cette détermination pour chercher combien il y a, dans chaque cas, de séries réelles de sections circulaires.

La méthode que nous allons suivre est exactement celle par laquelle on déterminerait les génératrices rectilignes de la quadrique définie par l'équation

$$\sum_i a_{ik}^2 x_i^2 = 0, \tag{25}$$

où les x_i seraient regardées comme des coordonnées tétraédriques ordinaires. Nous commencerons par envisager le cas où quatre des sphères (S_i) sont réelles. Alors, pour tout point réel de la cyclide, x_1, x_2, x_3, x_4, par exemple, seront réelles, et x_5 sera une imaginaire pure, que l'on pourra remplacer par iy_5. A tout point réel de la cyclide correspondra un point réel de la quadrique (25). Et, par conséquent, à toute nappe réelle de la cyclide, correspondra certainement toute une région réelle de la quadrique (25).

D'après cela, si un cercle de la cyclide orthogonal à (S_k) est réel, comme il ne peut être représenté que par deux équations où x_k ne figurera pas et qui seront linéaires par rapport aux quatre autres coordonnées x_i, il correspondra certainement à une génératrice réelle de la quadrique (25). Et, réciproquement, si cette quadrique est réglée, on pourra mener les deux génératrices rectilignes qui passent par l'un quelconque M des points réels de cette surface qui correspondent à des points réels de la cyclide. A ces deux génératrices rectilignes correspondront deux cercles réels de la cyclide, orthogonaux à (S_k) et passant par le point M′ qui correspond à M. Ainsi, pour savoir si l'une quelconque des séries doubles de cercles est réelle, il suffira d'examiner si la quadrique correspondante (25) est réglée.

Pour que cette quadrique soit réglée, il faudra évidemment que son Hessien soit positif (n° 203), c'est-à-dire que l'on ait, pour $k = 5$,

$$a_{51}^2 a_{52}^2 a_{53}^2 a_{54}^2 > 0, \tag{26}$$

et pour $k \neq 5$,

$$a_{k1}^2 a_{k2}^2 \dots a_{k5}^2 < 0, \tag{27}$$

parce que, dans cette dernière hypothèse, x_5 reste dans l'équation et doit être traitée comme une imaginaire pure.

L'inégalité (26) peut aussi s'écrire

$$\frac{\lambda - a_5}{f(\lambda)} f'(a_5) > 0,$$

et chacune des inégalités (27) devient

$$\frac{\lambda - a_k}{f(\lambda)} f'(a_k) < 0 \qquad (k \neq 5).$$

Désignons par $i^{\text{ème}}$ série celle qui est formée de tous les cercles normaux à (S_i). En tenant compte des inégalités déjà établies

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5,$$

on verra aisément que les conditions de réalité des diverses séries s'expriment par les inégalités

$$\frac{\lambda - a_1}{f(\lambda)} < 0, \quad \frac{\lambda - a_2}{f(\lambda)} > 0, \quad \frac{\lambda - a_3}{f(\lambda)} < 0, \quad \frac{\lambda - a_4}{f(\lambda)} > 0, \quad \frac{\lambda - a_5}{f(\lambda)} > 0,$$

la $i^{\text{ème}}$ de ces inégalités s'appliquant à la $i^{\text{ème}}$ série.

D'après cela, on peut former le Tableau suivant qui s'applique aux trois familles de cyclides homofocales :

Sections circulaires.	Famille I. $a_2 < \lambda < a_1$.	Famille II. $a_3 < \lambda < a_2$.	Famille III. $a_4 < \lambda < a_3$.
1re série......	imaginaire	réelle	imaginaire
2e série......	imaginaire	imaginaire	réelle
3e série......	réelle	imaginaire	imaginaire
4e série......	imaginaire	réelle	imaginaire
5e série......	imaginaire	réelle	imaginaire

On voit que les cyclides à deux nappes, celles de la première et de la troisième famille, admettent une seule série double de sections circulaires réelles, normales respectivement à (S_3) et à (S_2). Quant aux cyclides à une seule nappe, elles ont trois séries doubles de sections circulaires réelles.

Ainsi, par un point d'une cyclide à deux nappes, passent seulement deux cercles qui se coupent en un autre point. Au contraire, par un point d'une cyclide à une seule nappe, passent six cercles, dont chacun est coupé par l'un des cinq autres en un second point et n'a, avec les quatre qui restent, aucun autre point commun.

Remarquons que, si l'on envisage la série entière des cyclides

homofocales, elle n'offre qu'une seule série de sections circulaires réelles orthogonales à chaque sphère directrice.

308. Nous avons laissé de côté, dans ce qui précède, le cas où deux des sphères coordonnées sont imaginaires conjuguées. Alors, il ne peut être question que de trois séries de sections circulaires, normales respectivement aux trois sphères réelles (S_1), (S_2), (S_3). Il faudra appliquer la méthode précédente en remplaçant x_4, x_5 par des quantités imaginaires conjuguées $y_1 + iy_2$, $y_1 - iy_2$. Si nous adoptons les inégalités

$$a_1 > a_2 > a_3,$$

du n° 302, nous serons conduits au Tableau suivant :

	Famille I. $a_2 < \lambda < a_1$.	Famille II. $a_3 < \lambda < a_2$.	Famille III. $(\lambda - a_1)(\lambda - a_3) > 0$.
1re série......	imaginaire	réelle	imaginaire
2e série......	imaginaire	imaginaire	réelle
3e série......	réelle	imaginaire	imaginaire

Ce résultat confirme bien ce que nous avons dit de la similitude du rôle des trois familles orthogonales. Il n'y a, sur chaque surface, qu'une seule série de sections circulaires réelles. Mais il est évident que les séries formées des cercles orthogonaux aux sphères imaginaires (S_4) (S_5) sont imaginaires conjuguées [1].

309. C'est ici le lieu de faire une application nouvelle d'une méthode, dont nous avons déjà dit quelques mots aux nos 116 et 117. Les propriétés des sections circulaires de la cyclide permettent de représenter cette surface sur le plan. En conservant

---

[1] Dans un *Mémoire sur le contact des courbes et des surfaces* inséré en 1880 au *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IV, p. 348, l'Auteur a établi les théorèmes suivants :

Si, en un point simple d'une surface, il passe plus de dix cercles coupant la surface en cinq points consécutifs réunis en ce point, ce point simple est un ombilic.

Il n'existe pas de surface admettant plus de dix séries de sections circulaires.

Si une surface admet dix séries de sections circulaires, c'est une cyclide.

toutes les notations précédentes, envisageons les deux systèmes

$$(28)\quad \begin{cases} a_{12}x_2 - a_{31}x_3 + \mu(a_{41}x_4 - a_{15}x_5) = 0, \\ \mu(a_{12}x_2 + a_{31}x_3) + a_{41}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \end{cases}$$

et

$$(29)\quad \begin{cases} a_{34}x_3 - a_{42}x_2 + \mu'(a_{41}x_1 - a_{54}x_5) = 0, \\ \mu'(a_{34}x_3 + a_{42}x_2) + a_{41}x_1 + a_{54}x_5 = 0, \end{cases}$$

qui représentent, l'un et l'autre, un cercle variable de la surface. Ces deux cercles, qui sont orthogonaux à deux sphères différentes, se coupent en un seul point; car si l'on associe leurs équations, elles déterminent les rapports mutuels des cinq coordonnées x_i. On trouve ainsi, ρ désignant un facteur de proportionnalité,

$$(30)\quad \begin{cases} \rho x_2 = 2a_{31}a_{54}\mu'(1+\mu^2) + 2a_{15}a_{34}\mu(1-\mu'^2) = P(\mu,\mu'), \\ \rho x_3 = 2a_{15}a_{42}\mu(1+\mu'^2) + 2a_{54}a_{12}\mu'(1-\mu^2) = Q(\mu,\mu'), \\ \rho x_5 = a_{12}a_{34}(1-\mu^2)(1-\mu'^2) - a_{31}a_{42}(1+\mu^2)(1+\mu'^2) = R(\mu,\mu') \end{cases}$$

et

$$(31)\quad \begin{cases} \rho a_{41}x_1 = -a_{42}\mu' P(\mu,\mu') - a_{34}\mu' Q(\mu,\mu') - a_{54} R(\mu,\mu'), \\ \rho a_{41}x_4 = -a_{12}\mu P(\mu,\mu') - a_{31}\mu Q(\mu,\mu') - a_{15} R(\mu,\mu'). \end{cases}$$

Ces formules, qui donnent, pour les rapports mutuels des coordonnées x_i, des fonctions *rationnelles* de μ et de μ', réalisent bien ce que nous avons appelé la représentation de la cyclide sur le plan. Les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface seraient des fonctions rationnelles de μ, μ', et il résulte de la méthode que nous avons suivie que, si l'on considère μ, μ' comme les coordonnées d'un point dans le plan, à tout point de la cyclide correspond un seul point du plan, et à tout point du plan correspond généralement un seul point de la cyclide.

Il résulte des formules (30) et (31) que toute fonction linéaire des x_i (multipliée par ρ) sera de la forme

$$(32)\quad A\mu^2\mu'^2 + \mu\mu'(B\mu + C\mu') + \varphi_2(\mu,\mu'),$$

A, B, C désignant des constantes et φ_2 une fonction du second degré de μ et de μ'.

En d'autres termes, les sections de la cyclide par une sphère quelconque sont représentées sur le plan par des courbes du quatrième ordre, que l'on obtiendra en égalant à zéro des polynomes de la forme (32), c'est-à-dire par des courbes du quatrième ordre

ayant deux points doubles à l'infini dans la direction des axes coordonnés. Nous allons voir de plus que *ces courbes passent par quatre points fixes du plan situés à distance finie.*

Les cinq coordonnées x_i sont, en effet, des fonctions linéaires des polynomes $P(\mu, \mu')$, $Q(\mu, \mu')$, $R(\mu, \mu')$, et ces polynomes sont les trois déterminants qu'on peut former avec la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{12}(1-\mu^2) & -a_{31}(1+\mu^2) & -2a_{15}\mu \\ -a_{42}(1+\mu'^2) & a_{34}(1-\mu'^2) & -2a_{54}\mu' \end{matrix} \right\|.$$

Ils s'annulent donc pour le système de valeurs déterminé par les équations

$$\frac{a_{12}(1-\mu^2)}{a_{42}(1+\mu'^2)} = \frac{a_{31}(1+\mu^2)}{a_{34}(1-\mu'^2)} = -\frac{a_{15}\mu}{a_{34}\mu'}.$$

Si l'on tient compte des identités (22), on résoudra aisément les équations précédentes, et les valeurs de μ, μ' seront données par les formules

$$(33) \qquad \mu = \frac{\varepsilon a_{25}a_{34} - \varepsilon' a_{42}a_{53}}{a_{23}a_{54}}, \qquad \mu' = \frac{\varepsilon' a_{12}a_{53} - \varepsilon a_{25}a_{31}}{a_{23}a_{15}},$$

où ε, ε' désignent l'unité, prise avec le signe + ou le signe —. *Il y a donc bien quatre points communs aux courbes planes qui représentent les sections sphériques des cyclides.*

310. Nous ne poursuivrons pas dans le détail cette étude de la représentation plane des cyclides, nous nous contenterons de renvoyer le lecteur à deux Notes publiées par l'Auteur en 1915 dans les *Comptes rendus* (t. 160, avril et mai 1915, p. 531 et 575); mais nous ferons remarquer que les calculs précédents mettent en évidence un fait qu'il importe de signaler.

Deux géomètres, *A. Clebsch* et *L. Cremona*, ont tiré grand parti, pour l'étude de plusieurs surfaces, de leur représentation plane, quand cette représentation a pu être obtenue. On dit alors que la surface est *rationnelle* ou *unicursale*. Nous avons reconnu à diverses reprises que les quadriques sont unicursales; il en est de même des cyclides, nous venons de le démontrer. L'emploi de l'homographie (n° 263) nous permet donc d'étendre ce résultat à la surface cubique la plus générale et à la surface du quatrième ordre à conique double, qui, elles aussi, seront des surfaces unicursales.

Mais si l'usage de la représentation plane permet d'étudier, avec succès, certaines propositions générales, il donne lieu à de réelles difficultés, lorsqu'il s'agit de représenter sur le plan une surface qui se compose de plusieurs nappes. Dans ce cas, *la représentation ne saurait être réelle*. Car, si elle l'était, on pourrait réunir deux points réels quelconques de la surface par une infinité de chemins réels tracés sur la surface, ce qui est impossible lorsque la surface ne se réduit pas à une nappe unique et lorsque l'on choisit les deux points à réunir sur deux nappes distinctes.

Ainsi, les représentations planes que nous venons d'obtenir pour les cyclides ne seront réelles dans aucun cas, si l'on considère des cyclides à deux nappes. On pourra, au contraire, les obtenir réelles si la cyclide se réduit à une seule nappe. En effet, dans le cas où quatre des sphères orthogonales sont réelles, nous avons vu que toute cyclide à une nappe contient trois séries de sections circulaires réelles. On choisira arbitrairement deux d'entre elles; les valeurs correspondantes de μ, μ' seront réelles et la représentation sera ainsi obtenue.

Si, au contraire, deux des cinq sphères orthogonales sont imaginaires conjuguées, il y aura deux séries de sections circulaires qui seront imaginaires conjuguées. Si on les choisit pour appliquer la méthode, il faudra donner à μ et à μ' des valeurs imaginaires conjuguées; de sorte que les formules (30), (31) donneront une représentation réelle lorsque l'on y effectuera la substitution

$$\mu \mid \nu + \nu' i, \qquad \mu' \mid \nu - \nu' i,$$

ν et ν' étant réelles.

CHAPITRE VII.

UN MODE DE TRANSFORMATION DE L'ESPACE QUI SE PRÉSENTE DANS L'ÉTUDE DES CYCLIDES.

Des surfaces que Moutard nommait *anallagmatiques*. — Modes de génération de ces surfaces donnés par *Moutard* et *Laguerre*. — On peut leur rattacher une transformation ponctuelle de l'espace, envisagée par l'Auteur dès 1865. — Cette transformation est la plus générale de celles qui font correspondre à tout plan une sphère. — Ses principales propriétés; elle n'est pas birationnelle et fait correspondre à toute figure du premier espace une figure anallagmatique du second. — Applications à la théorie des cyclides. — La transformation permet de substituer à la Géométrie Cayleyenne une géométrie nouvelle, dans laquelle les géodésiques ne sont plus des droites, mais des cercles orthogonaux à une sphère fixe (S) et dans laquelle les angles se mesurent comme en Géométrie Euclidienne. — Comment, dans le plan, tous les résultats précédents pourraient être déduits de quelques considérations géométriques. — Quand on transforme par une inversion la sphère (S) en un plan, on obtient une géométrie qui a été utilisée par *Poincaré* dans ses admirables travaux sur les fonctions fuchsiennes.

---

311. La théorie des cyclides a son point de départ dans deux Communications présentées le même jour (1er août 1864) à l'Académie des Sciences par Moutard et par l'Auteur [1]. Les beaux résultats obtenus par Moutard reposaient sur la considération de ce qu'il appelait les *surfaces anallagmatiques*, c'est-à-dire les surfaces qui se reproduisent elles-mêmes quand on les soumet à une inversion convenablement choisie. Moutard a démontré, nous l'avons vu (n° 270) que ces surfaces peuvent être définies comme enveloppes d'une famille de sphères dont les centres décrivent une courbe ou une surface, que nous avons appelée la *déférente*, tandis qu'elles coupent à angle droit une sphère fixe, qui est la sphère principale de l'inversion et que nous avons nommée la

---

[1] G. Darboux, *Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales* (*Comptes rendus*, t. 59, p. 240). — Moutard, *Lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre*, même tome, p. 243; *voir* aussi des *Observations* de J.-A. Serret, présentées à la séance du 8 août, même tome, p. 269.

sphère *directrice*. Et il a fait connaître les propriétés des cyclides qui résultent de ce mode de génération.

Laguerre a montré ensuite que le mode de génération des anallagmatiques peut être remplacé par le suivant. On prend les deux sphères de rayon nul qui passent par l'intersection de la sphère directrice et d'un plan tangent variable à la déférente. Les centres de ces sphères décrivent l'anallagmatique cherchée.

Voici comment on peut rattacher ce résultat au mode de génération proposé par Moutard.

Soient (S) la sphère directrice, (D) la déférente. Si l'on construit, suivant le mode proposé par Moutard, la sphère variable (Σ) ayant son centre en un point m de la déférente, il faudra, pour obtenir l'anallagmatique, déterminer les points de contact M, M' de cette sphère avec son enveloppe. Or, si l'on adjoint à (Σ) les sphères (Σ') qui ont leurs centres en des points m' de la déférente voisins de m, il est clair que leur axe radical ira toujours passer par le centre O de la sphère (S), qui a même puissance par rapport à chacune d'elles. A la limite, quand les points m' seront venus se confondre avec le point m, cet axe radical deviendra la corde de contact de (Σ) avec son enveloppe. Pour l'obtenir, il suffira donc d'abaisser, du centre O de (S), une perpendiculaire sur le plan tangent en m à la déférente. Cette perpendiculaire coupera la sphère variable (Σ) aux deux points M, M' cherchés, qui sont évidemment inverses l'un de l'autre par rapport à la sphère directrice, et qui seront placés symétriquement par rapport au plan (P) tangent en m à la déférente. Telle est la construction de Moutard.

Dans notre définition de l'inversion, nous avons remarqué (n° 232) que les deux points M, M' peuvent être considérés comme les centres de deux sphères de rayon nul qui se coupent suivant un cercle situé sur la sphère principale de l'inversion. Ici, le plan de ce cercle ne peut être que le plan (P) tangent à la déférente. D'où résulte la proposition de Laguerre :

L'anallagmatique est le lieu des centres des sphères de rayon nul qui passent par l'intersection de la sphère directrice et des plans tangents à la déférente.

Et l'on voit ainsi que les points réels de l'anallagmatique ne

peuvent correspondre qu'à ceux des plans tangents réels de la déférente qui ne rencontrent pas la sphère directrice.

312. Dès 1865, l'Auteur avait fait connaître un mode de transformation des figures dans l'espace [1] qui comprend les résultats précédents et permet de les étendre notablement, comme on le verra.

Cette transformation, qui est ponctuelle, peut être définie, quand on choisit des axes rectangulaires convenables, par les formules suivantes :

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=\frac{2R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \tag{1}$$

où R^2 peut être pris avec les deux signes.

Avant de l'étudier, nous allons démontrer sa propriété caractéristique. Si on la fait précéder d'une transformation homographique, on obtient la transformation ponctuelle la plus générale qui fasse correspondre *à tout plan une sphère*.

Cherchons, en effet, une telle transformation. A trois plans passant par un point M de la première figure, elle fait correspondre trois sphères de la seconde, se coupant en deux points. Donc, à un point M de la première figure correspondent deux points de la seconde. A deux plans passant par une droite de la première figure, elle fait correspondre deux sphères de la seconde; et, par suite, l'homologue d'une droite de la figure ne peut être qu'un cercle de la seconde.

Il suit de là que si, à deux plans (P) et (P′) de la première figure, représentés respectivement par les équations

$$P=0, \qquad P'=0,$$

correspondent deux sphères représentées par les équations

$$\Sigma=0, \qquad \Sigma'=0,$$

---

[1] *Recherches sur les surfaces orthogonales* (*Annales de l'École Normale*, t. II, 1re série, p. 69). Pour plus de détails, on pourra consulter le Mémoire *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* et les *Leçons sur la théorie des surfaces* de l'Auteur, 3e Partie, p. 492 et suiv.

au plan défini par l'équation

$$P + \lambda P' = 0$$

correspondra nécessairement une sphère définie par l'équation

$$\Sigma + \mu\Sigma' = 0.$$

De là résulte évidemment que, si à quatre plans représentés par les équations

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad P'' = 0, \quad P''' = 0,$$

correspondent quatre sphères représentées par les équations

$$(2) \qquad \Sigma = 0, \quad \Sigma' = 0, \quad \Sigma'' = 0, \quad \Sigma''' = 0,$$

au plan représenté par l'équation

$$(3) \qquad \lambda P + \lambda' P' + \lambda'' P'' + \lambda''' P''' = 0$$

correspondra une sphère définie par l'équation

$$(4) \qquad \mu\Sigma + \mu'\Sigma' + \mu''\Sigma'' + \mu'''\Sigma''' = 0.$$

Si donc on introduit la transformation auxiliaire définie par les formules

$$(5) \qquad X = \Sigma, \quad Y = \Sigma', \quad Z = \Sigma'', \quad T = \Sigma''',$$

on voit que la transformation cherchée résultera de la composition des deux suivantes : l'une qui transformera tous les plans définis par l'équation (3) dans les plans définis par l'équation

$$\mu X + \mu' Y + \mu'' Z + \mu''' T = 0$$

et qui, d'après ce que nous avons vu (Livre I, Chapitre II), sera nécessairement une transformation homographique; l'autre qui sera définie par les formules (5) et que nous allons étudier.

En général, les sphères définies par les équations (2) ne passent pas par un même point fixe; mais elles sont orthogonales à une sphère (S). En prenant pour origine le centre de cette sphère, on peut ramener tous les polynomes Σ à la forme

$$a(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 t^2) + 2bxt + 2cyt + 2dzt,$$

en sorte qu'une nouvelle transformation homographique nous

permet de réduire les formules (5) aux suivantes :

$$(6)\quad X = 2R^2xt, \quad Y = 2R^2yt, \quad Z = 2R^2zt, \quad T = x^2+y^2+z^2+R^2t^2,$$

évidemment identiques, aux notations près, à celles que nous avons données plus haut.

Si la sphère (S) se réduit à un plan, une inversion faite sur la seconde figure nous ramènera au cas précédent.

Si elle se réduisait à un point, une inversion analogue nous ramènerait à une simple homographie.

313. Après ces remarques préliminaires sur notre transformation, étudions les formules (1) ou (6) qui la définissent. Leur interprétation géométrique est très simple. Désignons, comme précédemment, par (S) la sphère dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0.$$

A tout point $m(x, y, z)$ de la seconde figure, les formules font correspondre le point $M(X, Y, Z)$ de la première qui est le pôle, par rapport à (S), du plan radical de cette sphère et de la sphère de rayon nul ayant pour centre le point m. Par suite, à tout point $M(X, Y, Z)$ de la première figure, la transformation fait correspondre les deux points m, m' de la seconde qui sont les centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de la sphère fixe (S) et du plan polaire du point M par rapport à cette sphère.

Ainsi, la transformation n'est pas *birationnelle;* à un point M, elle fait correspondre deux points m. C'est ce que montrent, d'ailleurs, les formules (1), qui peuvent être résolues par rapport à x, y, z et nous donnent

$$(7)\qquad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{R}{R\pm\Omega} = \frac{R(R\mp\Omega)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

où l'on a posé

$$(8)\qquad \Omega^2 = R^2\left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2}\right)^2 = R^2-X^2-Y^2-Z^2.$$

Sous forme homogène, ces formules pourraient être écrites

$$(9)\quad x = RX, \quad y = RY, \quad z = RZ, \quad t = RT \pm\sqrt{R^2T^2-X^2-Y^2-Z^2}.$$

Examinons maintenant les conséquences de ces diverses relations et de la définition géométrique.

Quel que soit le point m de la seconde figure, pourvu qu'il ne soit pas sur le cercle de l'infini, le point correspondant M de la première figure est pleinement déterminé. Les deux points m et M ne peuvent coïncider que si m est sur (S), ou bien au centre de (S).

Si le point m est sur le cercle de l'infini, les formules (9), qui peuvent aussi s'écrire, en changeant le facteur de proportionnalité,

$$X = 2R^2 x, \qquad Y = 2R^2 y, \qquad Z = 2R^2 z, \qquad T = R^2 t + \frac{x^2+y^2+z^2}{t},$$

nous montrent que le point M peut occuper toutes les positions sur la droite qui joint le point m au centre de (S), puisqu'on peut attribuer telle valeur que l'on veut au quotient $\frac{x^2+y^2+z^2}{t}$.

Au point M correspondent généralement deux points m distincts. Ces deux points ne coïncident que si M est sur la sphère (S). Pour qu'ils deviennent indéterminés, il faut que l'on ait

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad R = \pm\sqrt{\Omega};$$

c'est-à-dire que le point M coïncide avec le centre de (S). Alors, à ce centre, considéré comme appartenant à la première figure, correspondent dans la seconde, d'après les formules (7), et ce point lui-même, et tous les points à l'infini.

314. Les deux points m, m' étant inverses l'un de l'autre par rapport à (S), *à toute figure du premier espace correspond une figure du second qui est anallagmatique, dans l'inversion dont* (S) *est la sphère principale.*

Considérons, par exemple, une surface algébrique dont l'équation sera

$$\varphi_i(X, Y, Z) + \varphi_{i+1}(X, Y, Z) + \ldots + \varphi_n(X, Y, Z) = 0,$$

$\varphi_k(X, Y, Z)$ désignant une fonction homogène de degré k de X, Y, Z.

Il lui correspondra, dans le second espace, la surface anallagma-

tique ayant pour équation

$$\varphi_i(x, y, z)(x^2+y^2+z^2+R^2)^{n-i}$$
$$+2R^2\varphi_{i+1}(x, y, z)(x^2+y^2+z^2+R^2)^{n-i-1}+\ldots+(2R^2)^{n-i}\varphi_n(x, y, z)=0.$$

L'examen de cette équation conduit à la conséquence suivante :

A toute surface d'ordre n du premier espace, ayant le centre de (S) *pour point multiple d'ordre i, correspond une anallagmatique d'ordre* $2n-i$, *qui admet le cercle de l'infini comme ligne multiple d'ordre* $n-i$, *le centre de* (S) *comme point multiple d'ordre i, et qui a, en ce point, les mêmes tangentes que la surface proposée.*

Exemples :

Un plan passant par le centre de (S) se correspond à lui-même.

Un plan quelconque de la première figure a pour homologue une sphère passant par son intersection avec (S) et orthogonale à (S).

Une quadrique ne passant pas par le centre de (S) a pour homologue dans la seconde figure une cyclide du quatrième ordre, anallagmatique par rapport à (S).

Si la quadrique passe par le centre de (S), il lui correspond une cyclide du troisième ordre, admettant, au centre de (S), le même plan tangent que la quadrique.

De même, *à une courbe d'ordre n passant i fois par le centre de* (S), *correspond une courbe anallagmatique d'ordre* $2n-i$ coupant le cercle de l'infini en $2(n-i)$ *points*. On le verra aisément en se rappelant qu'à tout point de la première figure, situé sur le cône

$$X^2+Y^2+Z^2=0,$$

correspond, dans la seconde, un point situé sur le cercle de l'infini.

A une droite correspond un cercle orthogonal à (S) et rencontrant (S) aux mêmes points que la droite.

Puisque à une quadrique correspond une cyclide, et à un plan une sphère ou un plan, à toute conique correspond une section plane ou sphérique d'une cyclide.

315. Quelquefois l'anallagmatique se décompose. Supposons, par exemple, que la surface du premier espace soit inscrite dans (S) et que son équation puisse être mise sous la forme

$$P^2(X, Y, Z) + (X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2)\,Q^2(X, Y, Z) = 0.$$

En tenant compte de la relation (8), l'équation précédente se décomposera et nous donnera les deux surfaces qui ont pour équations

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{2R^2x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \frac{2R^2y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \frac{2R^2z}{x^2+y^2+z^2+R^2}\right) \\ & = \pm R\,\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2} \\ & \quad \times Q\left(\frac{2R^2x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \frac{2R^2y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \frac{2R^2z}{x^2+y^2+z^2+R^2}\right); \end{aligned}$$

elles sont inverses l'une de l'autre par rapport à (S) et la coupent suivant la courbe définie par l'équation

$$P(x, y, z) = 0.$$

Plus généralement, *quand la surface ou la courbe du premier espace est tangente à* (S) *en un point, ce point devient un point double de l'anallagmatique correspondante.*

Considérons d'abord une surface, et supposons que, par un changement d'axes, on ait ramené le point considéré à être défini par les équations

$$X = Y = Z - R = 0.$$

L'équation de la surface sera

$$Z - R = \varphi_2(X, Y) + \varphi_3(X, Y) + \ldots,$$

φ_2, φ_3 désignant des fonctions homogènes de X, Y. D'après les formules (1), l'équation de l'anallagmatique correspondante pourra s'écrire

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+(z-R)^2+\frac{4R^3}{x^2+y^2+z^2+R^2}\,\varphi_2(x, y) \\ & \qquad + \frac{8R^5}{(x^2+y^2+z^2+R^2)^2}\,\varphi_3(x, y) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Elle admettra évidemment un point double, pour lequel l'équation

du cône des tangentes sera

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 + 2R\varphi_2(x, y) = 0.$$

Ce cône aura pour axes principaux le rayon de la sphère (S) et les deux tangentes principales de la surface donnée dans le premier espace.

Un calcul analogue peut être fait pour une courbe tangente à la sphère en un point. Par un choix convenable des axes, on peut ramener les équations de cette courbe aux formes suivantes :

$$Z - R = aX^2 + bX^3 + \ldots, \qquad Y = a'X^2 + b'X^3 + \ldots,$$

ce qui donne, pour la transformée,

$$-x^2 - y^2 - (z - R)^2 = \frac{4aR^3x^2}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} + \ldots,$$
$$y(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) = 2a'R^2x^2 + \ldots.$$

On peut déduire de là les développements de y et de z. On trouve ainsi

$$y = a'x^2 + \ldots,$$
$$(z - R)^2 = (-1 - 2aR)x^2 + \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$z - R = \pm x\sqrt{-1 - 2aR} + \ldots.$$

Ces formules définissent bien un point double de la courbe.

316. Comme application, considérons la cyclide qui correspond à une quadrique (Q) du premier espace, et cherchons à définir les courbes de (Q) auxquelles correspondent les sections circulaires de la cyclide.

Il y a d'abord les génératrices de (Q) auxquelles correspondent, nous l'avons déjà remarqué, des cercles normaux à (S). Ainsi nous obtenons les sections circulaires correspondantes à la sphère directrice qui est associée à (Q).

Considérons maintenant les sections planes de (Q). Comme à un plan correspond un plan ou une sphère, il leur correspond, dans la seconde figure, les sections planes ou sphériques de la cyclide. Ces sections se décomposeront en deux cercles toutes les fois qu'elles auront deux points doubles. C'est ce qui arrivera si la section plane de (Q) est doublement tangente à (S); car alors la

courbe correspondante de la cyclide aura deux points doubles sur (S) et se décomposera en deux cercles, inverses l'un de l'autre par rapport à (S).

Pour que la section plane de (Q) soit doublement tangente à (S), il faut et il suffit, comme on sait, que son plan enveloppe un des cônes qui passent par l'intersection de (Q) et de (S). Comme il y a quatre cônes, nous trouvons ainsi les quatre séries qui nous manquaient. On verra aisément que les sphères directrices relatives à ces différents modes sont celles qui ont pour centres les sommets des cônes et sont orthogonales à (S).

317. Nous ne reviendrons pas sur notre théorie des cyclides; mais nous poursuivrons l'étude de la transformation précédente en établissant les relations très simples qui existent entre les plans tangents ou les tangentes aux points correspondants.

Soient M, M_1 deux points de la première figure, auxquels correspondent, dans la seconde figure, deux couples m, m' et m_1, m'_1. La droite MM_1 de la première figure a pour homologue dans la seconde le cercle (C), qui est orthogonal à (S) et passe par les points d'intersection de (S) et de MM_1. Ce cercle (C) contient donc les couples m, m' et m_1, m'_1. Comme les droites mm', $m_1m'_1$ se coupent au centre O de (S), le point d'intersection de mm_1 et de $m'm'_1$ se trouve sur la polaire de O par rapport à (C), polaire qui est la droite MM_1.

Si le point M décrit une courbe du premier espace, à laquelle correspondent les courbes du second espace décrites par les points m, m', on voit que les droites concourantes MM_1, mm_1, $m'm'_1$ sont trois cordes correspondantes des trois courbes. En supposant que le point M_1 se rapproche du point M et en passant à la limite, on a le résultat suivant :

Les tangentes en M, m, m' *aux trois courbes correspondantes se coupent en un même point.*

Comme les courbes décrites par m, m' sont inverses l'une de l'autre, leurs tangentes concourent en un point du plan perpendiculaire sur le milieu de mm', plan dont le pôle est le point M. On peut donc ajouter le complément suivant à la proposition précédente :

Le point de concours des tangentes en M, m, m' *est placé dans le plan polaire de* M *par rapport à* (S).

Appliquant cette proposition à toutes les courbes passant par un point d'une surface, on obtient le théorème suivant :

Si le point M *décrit une surface, le plan tangent en* M *à cette surface va couper le plan polaire de* M *par rapport à* (S) *suivant une droite par laquelle passent aussi les plans tangents en* m, m' *aux deux surfaces décrites par les points* m, m', *homologues de* M.

Ces relations ne sont pas les seules que nous ayons à signaler relativement aux tangentes et aux plans tangents. Pour en obtenir de plus complètes, nous nous appuierons sur la propriété suivante de la transformation :

Si M est un point du premier espace, toute sphère passant par les points correspondants m, m' du second espace aura son centre dans le plan polaire de M par rapport à (S) et sera orthogonale à (S). Inversement, toute sphère ayant son centre dans ce plan polaire et orthogonale à (S) passera par les deux points m, m'.

Il suit de là : 1° que si nous considérons, dans le premier espace, deux points M, M_1 auxquels correspondent respectivement, dans le second espace, les couples m, m'; m_1, m'_1, toute sphère orthogonale à (S) et ayant son centre sur la droite polaire de MM_1 par rapport à (S) contiendra les quatre points m, m', m_1, m'_1; que si nous considérons, dans le premier espace, trois points M, M_1, M_2 auxquels correspondent dans le second espace les couples m, m'; m_1, m'_1; m_2, m'_2, la sphère qui aura son centre au pôle par rapport à (S) du plan MM_1M_2 et sera orthogonale à (S) contiendra les six points m, m', m_1, m'_1, m_2, m'_2. Nous allons appliquer ces propositions générales aux cas où les points se rapprochent indéfiniment.

Supposons d'abord que le point M décrive une courbe (C) à laquelle correspondra une courbe anallagmatique (c) décrite par les points m, m' homologues de M. En considérant un point M_1 voisin de M, on obtient la proposition suivante :

Les sphères orthogonales à (S) *et ayant leurs centres sur la polaire* d *de la tangente à* (C) *en* M *se coupent suivant un cercle qui est tangent en* m, m' *à la courbe* (c).

Nous savons, en effet, que les tangentes à (c) en m, m' et la tangente à (C) en M vont concourir en un point P, situé dans le plan polaire de m par rapport à (S).

Si nous considérons maintenant trois points infiniment voisins, nous obtenons le résultat suivant :

La polaire par rapport à (S) *de la tangente en* M *à la courbe* (C) *enveloppe une courbe* (C′) *lieu du pôle du plan osculateur à* (C). *La sphère orthogonale à* (S) *et ayant son centre en ce pôle contient les cercles osculateurs en* m, m' *à la courbe* (c). *Pour déterminer ces cercles osculateurs, il suffit de remarquer que les plans osculateurs en* m, m' *doivent contenir la tangente à la courbe décrite par le point de concours des tangentes à* (c) *en ces points. Ce point de concours, nous l'avons vu, est celui où la tangente en* M *à la courbe* (C) *vient couper le plan polaire de* M *par rapport à* (S).

Supposons maintenant que le point M décrive une surface. Alors, en considérant les points infiniment voisins de M, on sera conduit à la construction suivante :

La sphère tangente en m, m' *à l'anallagmatique décrite par ces points, sphère qui est nécessairement orthogonale à* (S), *a pour centre le pôle du plan tangent en* M *à la surface décrite par ce point.*

En d'autres termes, *la déférente de l'anallagmatique est la polaire réciproque, par rapport à* (S), *de la surface décrite par le point* M.

318. Dans ce qui va suivre, et pour plus de netteté, nous supposerons que la sphère (S) ait son rayon réel. R^2 sera donc positif et il ne pourra correspondre à M de points réels m, m' que si M est à l'intérieur de (S). Cela est évident d'après la construction géométrique et résulte d'ailleurs des formules (7). Nous désignerons par m et nous considérerons presque exclusivement celui des deux points m, m' qui se trouve à l'intérieur de (S).

Nous avons déjà vu (n° 96) qu'étant donnée une conique quelconque et deux de ses tangentes OP, OQ (*fig.* 27), le rapport anharmonique de deux points M, M_1 pris arbitrairement sur la corde

de contact et des points P, Q est lié au rapport anharmonique des quatre points m, m_1, P, Q *sur la conique* (m, m_1 désignant deux des points où les droites OM, OM_1 rencontrent la conique) par la relation très simple

$$\mathcal{R}(M, M_1, P, Q) = \mathcal{R}^2(m, m_1, P, Q).$$

Si les points M, M_1 se trouvent entre P et Q et si les points m et m_1 sont d'un même côté par rapport à PQ, les deux rapports anharmoniques qui figurent dans la relation précédente seront tous deux positifs et l'on pourra écrire

$$(10) \qquad \log \mathcal{R}(M, M_1, P, Q) = 2 \log \mathcal{R}(m, m_1, P, Q).$$

Appliquons cette relation à notre transformation et supposons que M, M_1 désignent deux points du premier espace situés, comme nous l'avons supposé, à l'intérieur de (S). Alors, la droite MM_1 coupera la sphère (S) en deux points P et Q; elle aura pour homologue le cercle qui, passant en P et Q, est orthogonal à (S) et admet par suite pour tangentes les rayons OP, OQ de (S). Les points m, m_1 seront ceux qui, situés à l'intérieur de (S), correspondent à M, M_1. Interprétons la relation précédente.

Supposons que, dans le premier espace, nous définissions les distances suivant les méthodes de la Géométrie Cayleyenne, en prenant pour *absolu* la sphère (S) et déterminant la distance de deux points M, M_1 par l'expression

$$(11) \qquad \frac{2}{R} d(M, M_1) = \log \mathcal{R}(M_1, M, P, Q).$$

On voit qu'en évaluant, dans le second espace, la distance de deux points par la formule

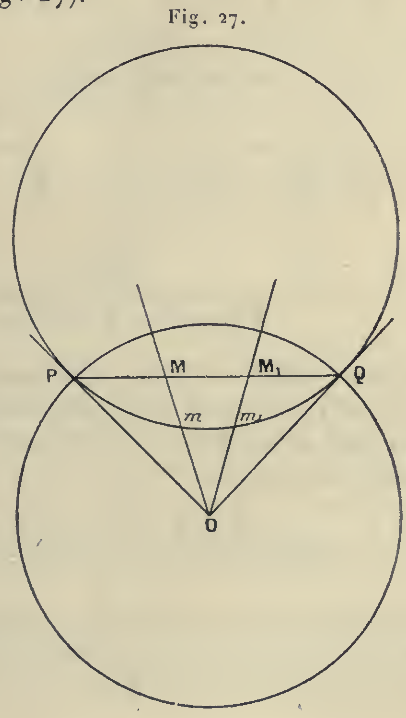
$$(12) \qquad \frac{1}{R} d(m, m_1) = \log \mathcal{R}(m_1, m, P, Q),$$

la distance de deux points quelconques du premier espace sera égale à celle des points correspondants dans le second.

Nous n'avons pas besoin de revenir sur la signification de la formule (11). Le rapport anharmonique qui figure dans le second membre est celui des deux points M_1, M et des deux points P et Q où la droite MM_1 rencontre la sphère (S); ce rapport est réel et positif.

La formule (12), au contraire, appelle quelques explications. Quand on aura choisi arbitrairement, à l'intérieur de (S), les points m, m_1, voici comment on obtiendra les points P et Q. Il faudra faire passer par m, m_1 le cercle, parfaitement défini, qui est orthogonal à (S); les points P et Q seront ceux où ce cercle rencontrera la sphère (S) (*fig.* 27).

Fig. 27.



Ainsi, *dans la Géométrie qui correspond à la formule* (12), *pour obtenir la distance de deux points* m, m_1, *on construira le cercle orthogonal à* (S) *qui contient ces deux points; il coupera* (S) *aux deux points* P, Q, *et la distance* mm_1 *sera alors définie par la formule* (12), *qui deviendra ainsi tout à fait indépendante de la transformation.*

319. Cette distance peut être obtenue par un calcul direct. On a sur le cercle

$$\mathcal{R}(m_1, m, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \frac{\overline{m_1 \mathrm{P}}}{\overline{m_1 \mathrm{Q}}} : \frac{\overline{m \mathrm{P}}}{\overline{m \mathrm{Q}}};$$

ce qui permet d'écrire

$$e^{\frac{1}{R}d(mm_1)} = \frac{\overline{m_1 P}.\overline{mQ}}{\overline{m_1 Q}.\overline{mP}}.$$

Si l'on utilise la relation de Ptolémée

$$\overline{mm_1}.\overline{PQ} = \overline{m_1 P}.\overline{mQ} - \overline{m_1 Q}.\overline{mP},$$

il viendra

$$e^{\frac{d}{2R}} - e^{-\frac{d}{2R}} = \frac{2\overline{mm_1}\,\overline{PQ}}{\sqrt{\overline{mP}.\overline{mQ}.\overline{m_1 P}.\overline{m_1 Q}}}.$$

Comme on a

$$\frac{\overline{mP}.\overline{mQ}}{R^2 - \overline{Om}^2} = \frac{\overline{m_1 P}.\overline{m_1 Q}}{R^2 - \overline{Om_1}^2} = \frac{\overline{PQ}}{2R},$$

on trouvera

$$(13) \qquad e^{\frac{d}{2R}} - e^{-\frac{d}{2R}} = \frac{2R\,\overline{mm_1}}{\sqrt{R^2 - \overline{Om}^2}\sqrt{R^2 - \overline{Om_1}^2}}.$$

On peut obtenir un résultat équivalent en utilisant la relation (10). Nous avons vu (n° 182) que, si l'on prend pour *absolu* la sphère (S), la distance d des deux points M, M_1, de coordonnées X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1, est donnée par la formule

$$e^{\frac{d}{R}} + e^{-\frac{d}{R}} = 2\frac{R^2 - XX_1 - YY_1 - ZZ_1}{\sqrt{R^2 - X^2 - Y^2 - Z^2}\sqrt{R^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2}}.$$

Si nous remplaçons les coordonnées des points M, M_1 en fonction de celles x, y, z; x_1, y_1, z_1, qui conviennent aux points correspondants m, m_1, un calcul facile nous conduira à la relation

$$(14) \qquad \left(\frac{e^{\frac{d}{2R}} - e^{-\frac{d}{2R}}}{2R}\right)^2 = \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}{(R^2 - x^2 - y^2 - z^2)(R^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)},$$

qui ne diffère que par les notations de la formule (13).

320. Après avoir examiné les distances, voyons ce qui concerne les angles.

Soient M un point du premier espace et Mt, Mt' les tangentes à deux courbes qui se croisent en ce point. Elles vont couper le plan polaire de M par rapport à (S) en deux points α, α', et nous savons

que les tangentes aux courbes correspondantes de la seconde figure, menées au point m qui est l'homologue de M, dans le second espace, iront couper le plan polaire de M *aux mêmes points* α, α' que les tangentes en M. Cela suffira pour établir la relation cherchée.

Soient P et Q les deux points où la droite $\alpha\alpha'$ rencontre la sphère (S). Les droites MP, MQ sont tangentes en P et Q à la sphère; et les droites mP, mQ sont isotropes. D'après la définition de l'angle que nous avons donnée dans la Géométrie Cayleyenne, l'angle par rapport à (S) des deux courbes qui se croisent en M est égal à

$$\frac{1}{2i} \log \mathcal{R}(\alpha', \alpha, \mathrm{P}, \mathrm{Q}).$$

D'autre part, $m\alpha$, $m\alpha'$ sont les tangentes aux deux courbes de la seconde figure qui se croisent en m; et comme mP, mQ sont des droites isotropes, l'expression précédente définit également *l'angle Euclidien* des deux tangentes $m\alpha$, $m\alpha'$.

Ainsi notre transformation conserve les angles; d'une manière plus précise, *elle fait correspondre à l'angle Cayleyen de deux courbes, évalué par rapport à* (S), *un angle Euclidien égal des deux courbes qui leur correspondent dans le second espace.*

321. Ce résultat fondamental peut être aussi obtenu par la considération des éléments linéaires dans les deux espaces.

Dans le premier, l'élément linéaire sera donné par la formule (nº 182)

$$(15) \quad \frac{ds^2}{\mathrm{R}^2} = \frac{(\mathrm{R}^2 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - \mathrm{Z}^2)(d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2) + (\mathrm{X}\, d\mathrm{X} + \mathrm{Y}\, d\mathrm{Y} + \mathrm{Z}\, d\mathrm{Z})^2}{(\mathrm{R}^2 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - \mathrm{Z}^2)^2}$$

et, dans le second, par la suivante, qui se déduit immédiatement de l'équation (14)

$$(16) \qquad \frac{ds^2}{\mathrm{R}^2} = 4\mathrm{R}^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2},$$

en sorte que le second membre de l'équation précédente est la transformée du second membre de l'équation (15).

Or nous avons, au nº 199, défini l'angle de deux directions par rapport à une forme quadratique, et nous avons remarqué que cet

angle était un invariant, c'est-à-dire qu'il subsistait lorsqu'on effectuait une substitution *quelconque* sur les variables dont dépend la forme. D'après cela, l'angle sera le même quand on l'évaluera avec l'une ou l'autre des deux formes (15), (16). Or, dans le premier cas, nous l'avons vu, cet angle sera celui que l'on obtient dans la Géométrie Cayleyenne, en prenant pour *absolu* la sphère (S) définie par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Dans le second cas, il sera le même (n° 199) que si l'on réduisait la forme (16) à l'expression plus simple

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

c'est-à-dire, ce sera l'angle tel qu'on le définit dans un espace Euclidien. L'égalité de ces deux angles est donc ainsi établie de nouveau.

322. Parmi les conséquences de cette proposition, nous nous attacherons d'abord à la suivante.

Supposons que, dans le premier espace, celui où les relations sont régies par la Géométrie Cayleyenne, les plans tangents à deux surfaces qui passent en un point, ou les tangentes à deux courbes qui se croisent en un point, soient perpendiculaires, *c'est-à-dire soient conjugués par rapport à la sphère* (S); dans le second espace, les surfaces ou les courbes correspondantes seront orthogonales, dans le sens Euclidien.

Si, par exemple, dans le premier espace, on a trois familles de surfaces telles que les plans tangents aux surfaces des trois familles qui passent en un point quelconque de l'espace soient conjugués par rapport à la sphère (S), il correspondra, dans le second espace, à ces trois familles trois autres familles qui constitueront un système triple orthogonal, au sens ordinaire du mot.

La théorie des surfaces du second degré nous conduit à une belle application de cette proposition générale.

Considérons le faisceau des quadriques qui passent par la courbe d'intersection de deux surfaces données du second degré. Cette courbe d'intersection étant du quatrième ordre, toutes les surfaces qui composent ce *faisceau ponctuel* sont coupées par un plan

quelconque (P) suivant des coniques ayant quatre points communs. Si donc on veut chercher les quadriques du faisceau qui sont tangentes au plan (P) et qui, par suite, sont coupées par ce plan suivant deux droites, on reconnaît immédiatement qu'elles sont au nombre de trois, et que leurs points de contact sont les centres des trois couples de droites qui passent par les quatre points situés dans le plan (P) de la courbe d'intersection commune à toutes les quadriques du faisceau. Ces trois centres sont les sommets d'un triangle conjugué commun à toutes les quadriques du faisceau ; ils seront donc nécessairement réels si leur plan coupe la biquadratique commune à toutes les surfaces du faisceau en quatre points réels, ou s'il ne la coupe pas.

Transformons par polaires réciproques. Au faisceau *ponctuel* formé de toutes les surfaces passant par une même biquadratique correspond un faisceau *tangentiel* formé de quadriques inscrites dans une même développable ; aux quadriques du premier faisceau, tangentes à un plan, correspondent, dans le second faisceau, des quadriques passant par un point. On pourra donc énoncer le résultat suivant :

Si l'on considère le faisceau tangentiel formé par les quadriques inscrites dans une même développable, il y a trois quadriques du faisceau passant par un point de l'espace. Ces trois quadriques sont réelles si les plans tangents de la développable qui passent par le point considéré sont tous les quatre réels, ou tous les quatre imaginaires. Les plans tangents aux trois surfaces qui passent par un point forment un trièdre qui est conjugué par rapport à chaque surface du faisceau, ou, ce qui est la même chose, par rapport aux cônes ayant pour sommet le point considéré et circonscrits aux diverses surfaces du faisceau. Ces cônes forment eux-mêmes un faisceau tangentiel, car ils admettent les quatre plans tangents que l'on peut mener par leur sommet à la développable dans laquelle sont inscrites toutes les quadriques.

D'après cela, imaginons, dans le premier espace de notre transformation, un faisceau tangentiel de quadriques dont fera partie la sphère (S). Ce faisceau sera évidemment déterminé dès que l'on connaîtra une des surfaces, autres que (S), qui en font partie. A

chacune des surfaces du faisceau correspondra, dans le second espace, une cyclide, anallagmatique par rapport à la sphère (S). Nous allons montrer que toutes les cyclides ainsi obtenues forment le système triple orthogonal étudié dans les Chapitres précédents.

En effet, dans le premier espace, il passe trois quadriques du faisceau par un point quelconque A; et les plans tangents à ces quadriques forment un trièdre conjugué par rapport à la sphère (S), c'est-à-dire un trièdre orthogonal lorsqu'on prend cette sphère pour *absolu*. Puisque notre transformation conserve les angles, les trois cyclides qui passent par le point m, homologue de A dans le second espace, s'y couperont à angle droit. Il ne reste plus qu'à montrer que ces cyclides seront réelles quand le point m sera réel. C'est ce que l'on peut faire de la manière suivante.

Puisque le point m est réel, le point M qui lui correspond dans le premier espace est nécessairement à l'intérieur de (S). Les trois quadriques qui y passent sont donc réelles puisque le trièdre formé par leurs plans tangents est conjugué par rapport au cône imaginaire de sommet M circonscrit à (S) et, par suite, est nécessairement réel. Il en sera de même si, R^2 étant négatif, la sphère (S) est imaginaire.

Les quadriques étant réelles, il en sera de même des trois cyclides qui leur correspondent.

323. La transformation dont nous venons de faire connaître les principales propriétés a été simplement définie par des formules, les équations (1) ou (6).

Si l'on se bornait à la considérer dans le plan, il serait aisé de l'obtenir par de simples considérations géométriques.

Envisageons des figures quelconques tracées sur une sphère (Σ) de rayon R et faisons-en la projection stéréographique. Soient A le point de la sphère choisi pour point de vue et (E) l'équateur sur lequel on projette, perpendiculaire au rayon OA de la sphère. Nous savons que la projection stéréographique, comme toute inversion, conserve les angles. Voyons comment elle transforme les distances.

Soient M, M′ deux points situés sur la sphère (Σ). Nous savons que l'arc de grand cercle qui les joint sera donné par la

formule

$$(17) \qquad MM' = \frac{R}{2i} \log \mathcal{R}[O(M', M, I, J)],$$

le rapport anharmonique qui figure dans cette formule étant celui des deux rayons OM, OM' et des deux rayons OI, OJ qui vont aux points où le grand cercle MM' coupe le cercle de l'infini. D'autre part, d'après une propriété que nous avons invoquée à diverses reprises (nº 96), ce rapport anharmonique est égal au carré du rapport anharmonique des quatre points M, M', I, J pris sur le cercle MM'. On peut donc écrire

$$(18) \qquad MM' = \frac{R}{i} \log \mathcal{R}(M', M, I, J),$$

le rapport anharmonique étant pris maintenant par rapport au cercle.

Voyons ce que cette formule devient en projection.

D'après les propriétés générales de la projection, tous les cercles de la sphère se projettent suivant des cercles; mais les grands cercles ont cette propriété caractéristique de se projeter suivant les cercles orthogonaux à celui qui a pour équation

$$(19) \qquad x^2 + y^2 + R^2 = 0$$

et que nous désignerons, dans la suite, sous le nom de cercle (C). Il est l'intersection, par le plan de l'équateur, de la sphère de rayon nul ayant son centre en A.

Pour le reconnaître sans calcul, il suffit de remarquer que, dans l'inversion, de pôle A, qui équivaut à la projection stéréographique, le plan de tout grand cercle se transforme en une sphère qui contient le point A et le point A' diamétralement opposé de (Σ). Or, toute sphère passant par ces deux points coupe le plan de l'équateur suivant un cercle orthogonal au cercle (C); car la puissance du centre de (Σ) par rapport à cette sphère est égale à $-R^2$.

Ainsi, si m, m' sont les projections des points M, M', nous pourrons construire le cercle qui est la projection du grand cercle MM'; ce sera celui qui passera par m, m' et sera orthogonal à (C). Il est facile de voir quels sont les points de ce cercle suivant lesquels se projettent les points I et J, où le grand cercle MM' coupe le cercle

de l'infini. En effet, les droites qui joignent le point A aux deux points I et J sont des droites isotropes, et, comme telles, elles appartiennent à la sphère de rayon nul ayant pour centre le point A. Donc elles viennent couper l'équateur sur le cercle (C).

Ainsi, les deux points I et J de la formule (17) se projettent suivant les deux points où le cercle qui sert de projection au grand cercle MM′ vient couper le cercle (C), auquel il est orthogonal.

Si nous désignons ces deux points respectivement par α et β et si nous nous souvenons que le rapport anharmonique de quatre points sur une conique n'est altéré ni par une homographie, ni par une projection, nous voyons que la formule (17) pourra être remplacée par la suivante :

$$\mathrm{MM}' = \frac{\mathrm{R}}{i} \log \mathcal{R}(m', m, \alpha, \beta).$$

Laissons maintenant de côté la sphère (Σ), et convenons de prendre pour la distance des deux points m, m' l'expression

$$mm' = \frac{\mathrm{R}}{i} \log \mathcal{R}(m', m, \alpha, \beta);$$

nous aurons ainsi constitué une Géométrie dans laquelle les angles se mesureront comme dans la Géométrie Euclidienne, mais dans laquelle la distance de deux points s'obtiendra de la manière suivante : on fera passer par les deux points m, m' un cercle orthogonal au cercle (C) et, ce cercle une fois construit, la distance sera donnée par la formule précédente où interviendront les deux points α, β communs au cercle orthogonal et au cercle (C).

Dans cette Géométrie, qui dérive directement de celle de la sphère, les lignes les plus courtes réunissant deux points ne seront plus généralement des droites; ce seront les cercles orthogonaux au cercle (C), projections des grands cercles de la sphère.

Si l'on convient que l'on pourra prendre le carré du rayon de (C) avec tel signe qu'on le voudra, on retrouve ainsi directement, et pour la Géométrie plane, les résultats que notre transformation nous a donnés pour la Géométrie de l'espace. On peut même retrouver cette transformation de la manière suivante.

324. Soit m le point de l'équateur qui est la projection du point M de (Σ). Associons à m le point M' où la droite menée par le point de vue A, parallèlement au rayon OM, vient rencontrer l'équateur. La correspondance entre m et M' est, dans le plan, identique à celle que nous avons étudiée dans l'espace.

Pour le démontrer, nous remarquerons que, si l'on prend le plan polaire (P) de M' par rapport à la sphère de rayon nul ayant son centre en A, ce plan polaire, qui sera perpendiculaire à AM', coupera cette sphère de rayon nul suivant deux droites isotropes $A\alpha'$, $A\beta'$ telles que la droite $\alpha'\beta'$ soit la polaire de M' par rapport au cercle (C). D'autre part, le plan (P) étant perpendiculaire à OM, les droites $A\alpha'$, $A\beta'$ sont parallèles aux génératrices rectilignes de la sphère qui passent en M; les projections stéréographiques de ces deux génératrices, qui sont les droites isotropes passant par m, contiennent, par conséquent, les points α', β'; et, par suite, ces points sont ceux où le cercle de rayon nul qui a pour centre m vient couper le cercle (C). La relation entre m et M' est donc bien identique à celle que nous avons reconnue et étudiée, dans l'espace à trois dimensions.

Ces considérations géométriques nous donnent d'ailleurs directement, pour le plan, tout ce que nous avons obtenu, par le calcul, pour l'espace. Car les deux droites AM' et OM étant parallèles, il est évident que les déterminations métriques relatives au point M de la sphère sont identiques à celles que l'on obtient pour les points M' du plan, si l'on adopte comme *absolu* le cercle (C) intersection du plan de l'équateur par la sphère de rayon nul ayant son centre en A.

325. Nous terminerons l'étude de notre transformation par les deux remarques suivantes :

Si elle a l'inconvénient de substituer aux lignes droites de l'espace Cayleyen, qui sont les lignes les plus courtes entre deux points, des cercles orthogonaux à la sphère (S), qui sont encore les lignes géodésiques dans le second espace, mais qui sont moins simples que des droites, elle a, par contre, l'avantage de dédoubler en quelque sorte l'espace Cayleyen, puisqu'elle fait correspondre, à un point M de cet espace, deux points m, m' du second. Cela nous permet d'envisager des géométries qui seront aussi voisines qu'on le

voudra de la Géométrie Euclidienne quand le rayon de la sphère (S) sera assez grand, mais qui s'en distingueront cependant par les propriétés les plus essentielles.

Quand le rayon de la sphère (S) est réel, elle partage l'espace en deux régions dans lesquelles les points m, m' se mouvront séparément et qui se déduiront l'une de l'autre par l'inversion dont (S) est la sphère principale. Si l'on considère, par exemple, la région à l'intérieur de (S), on aura une géométrie dans laquelle il ne passera qu'une géodésique par deux points et dans laquelle chacune de ces géodésiques qui remplacent les droites aura deux points à l'infini (et non plus un seul comme dans la Géométrie Euclidienne). Par un point, on pourra mener une seule géodésique perpendiculaire à la surface qui remplace le plan, c'est-à-dire à une sphère orthogonale à (S).

Mais, si le carré du rayon de la sphère (S) est négatif, les deux régions décrites par les points m, m' ne seront plus séparées. Toute géodésique passant par un de ces points ira passer par l'autre. On aura une géométrie dans laquelle deux droites se couperont toujours en deux points. Deux perpendiculaires à un plan se rencontreront toujours, etc.

Imaginons un être vivant dans l'espace à deux dimensions compris entre deux sphères concentriques, infiniment voisines. Pour lui, les lignes droites, c'est-à-dire les lignes les plus courtes, seraient les arcs de grand cercle tracés sur l'une des sphères. Deux lignes droites se couperaient toujours, aussi bien que deux perpendiculaires à une même droite. Une droite cesserait d'être déterminée par deux points, s'ils étaient diamétralement opposés. C'est cette géométrie que l'on obtient dans l'espace, si l'on emploie notre transformation avec une sphère imaginaire. Les géométries de ce genre sont celles qui ont été envisagées par Riemann.

326. Nous ferons enfin une dernière remarque. Supposons que la sphère (S) soit réelle. Nous pourrons la soumettre à une inversion qui la transformera en un plan. Nous obtiendrons ainsi une géométrie dans laquelle les lignes géodésiques seront des cercles orthogonaux à un plan fixe.

Par raison de symétrie, on peut se borner à employer une

inversion dont le pôle sera le point de coordonnées

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = R.$$

En choisissant le module de manière que la sphère (S) ait pour homologue un plan passant par l'origine, on aura à employer les formules

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z - R}{z' - R} = \frac{2R^2}{x'^2 + y'^2 + (z' - R)^2}, \tag{20}$$

x, y, z; x', y', z' désignant les coordonnées de deux points homologues M et M'. Si l'on désigne de même par x_1, y_1, z_1; x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées d'un autre couple de points homologues M_1, M'_1, la formule (14), où l'on remplacera les coordonnées des points M et M_1 en fonction de celles de M', M'_1, prendra la forme simple

$$\left(e^{\frac{d}{2R}} - e^{\frac{d}{2R}}\right)^2 = \frac{(x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2 + (z' - z'_1)^2}{z' z'_1}. \tag{21}$$

Telle sera l'expression de la distance dans la nouvelle Géométrie. Si l'on suppose que les deux points M', M'_1 deviennent infiniment voisins, l'élément linéaire de l'espace se présentera sous la forme réduite

$$ds^2 = R^2 \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{z'^2}. \tag{22}$$

Cette Géométrie est celle qui a été employée par *Henri Poincaré* dans ses mémorables travaux sur les fonctions fuchsiennes.

Nous pourrions montrer encore comment la résolution de ce problème :

Trouver toutes les transformations de l'espace Cayleyen qui conservent les angles et assurent, par conséquent, la similitude des éléments infiniment petits

se ramène, par l'emploi de la transformation précédente, à celui qui concerne l'espace Euclidien et qui a été résolu depuis longtemps. Nous nous bornerons, en terminant, à cette brève indication.

FIN.

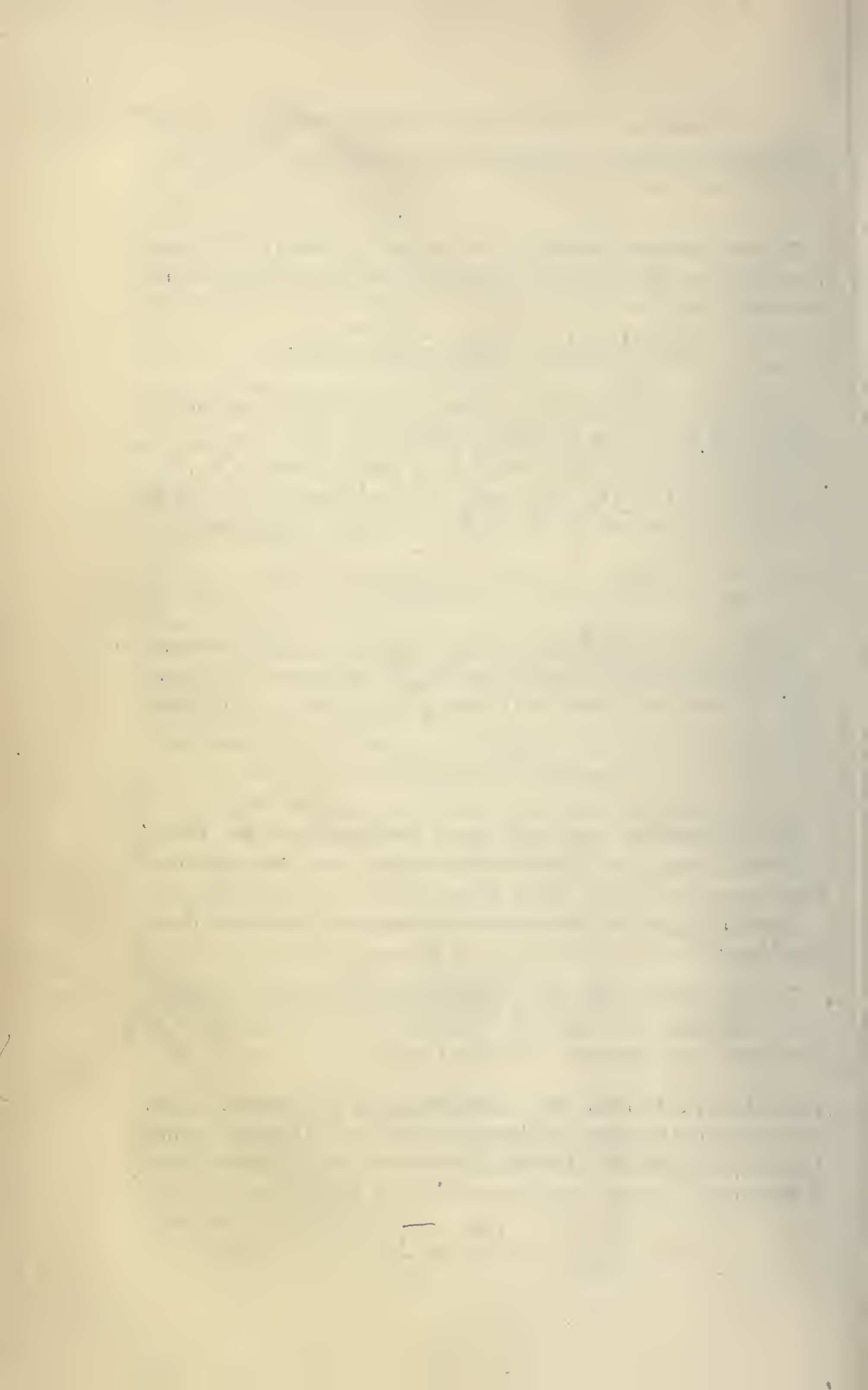


TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE I.

LE RAPPORT ANHARMONIQUE.

CHAPITRE I.

Pages.

Introduction I

Le but de ces Leçons est l'exposé des principes sur lesquels reposent les découvertes qu'on doit à Monge et à son école. — Étude du rôle que jouent l'imaginaire et l'infini dans les recherches géométriques modernes. — On peut employer deux méthodes; l'une, se rattachant aux coordonnées de Descartes, est celle qui sera suivie dans cet Ouvrage; l'autre, imaginée par Michel Chasles et complétée par von Staudt, ne paraît pas avoir prévalu. — Caractère propre des méthodes de l'Analyse et de la Géométrie moderne. — Emploi d'un petit nombre de principes généraux d'où découlent les conséquences particulières. Défauts de la Géométrie des Anciens. — Les premiers pas dans la voie moderne ont été faits par Desargues, les suivants sont en quelque sorte le résultat d'une nécessité logique. — Exemple emprunté à l'étude du développement de l'Algèbre. — *Géométrie*. — Le principe de continuité de Poncelet. Controverse avec Cauchy. — Introduction de l'imaginaire et de l'infini en Géométrie analytique. — Notions élémentaires sur les plans et les droites imaginaires. — Examen de l'objection qui a été faite par von Staudt à l'emploi des coordonnées pour définir les points imaginaires.

CHAPITRE II.

Les coordonnées tétraédriques 17

Leur définition. Ce sont des fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes homogènes. — Pourquoi on les appelle *tétraédriques*. — La connaissance du tétraèdre de référence ne les détermine pas entièrement. — Möbius, qui les a employées en 1827 dans son *Traité de Calcul barycentrique*, en a donné une définition fondée sur la théorie du centre de gravité et différente de celle que nous avons adoptée d'après Plücker. — Cette interprétation ne tient plus dès qu'un des sommets du tétraèdre de référence est rejeté à l'infini. Démonstration d'un élégant théorème de statique qui permet de maintenir avec quelques modifications la définition de Möbius lorsqu'un ou plusieurs sommets du tétraèdre de

Pages.

référence sont rejetés à l'infini. — Application à la Géométrie plane et à la détermination des figures qui sont la perspective d'une figure donnée. — L'emploi dans le plan des coordonnées trilinéaires permet d'étudier, en même temps qu'une figure, toutes celles qui s'en déduisent par la perspective. — On termine le Chapitre en démontrant une propriété caractéristique de la transformation homographique. Elle est la seule transformation ponctuelle qui conserve les plans, c'est-à-dire les transforme en des plans. — La démonstration s'obtient par la résolution d'une équation fonctionnelle que Cauchy avait déjà étudiée dans son *Analyse algébrique* (t. III de ses *Œuvres*, 2e série).

CHAPITRE III.

Le rapport anharmonique.. 33

Définition du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. Cette définition repose exclusivement sur l'emploi des coordonnées. — Le rapport anharmonique des quatre points où quatre plans fixes se coupant suivant une même droite (ou bien quatre droites concourantes dans le plan) sont coupés par une droite variable est un nombre constant qu'on appelle *rapport anharmonique des quatre plans* (*ou des quatre droites*). — Application à la démonstration de l'existence d'une surface doublement réglée. — Expressions du rapport anharmonique usitées en Géométrie pure. — Relations entre les 24 rapports anharmoniques qu'on peut former avec quatre éléments. — Le rapport anharmonique ne peut devenir indéterminé que si trois des éléments coïncident. — Étude des cas dans lesquels deux des six valeurs du rapport anharmonique formées avec quatre éléments sont égales. — Coïncidence, proportion harmonique, proportion équianharmonique. — Identité remarquable à laquelle conduit cette étude. — Application à l'équation du quatrième degré. — Identité de Cauchy et de Cayley. — Résolution de l'équation du quatrième degré par la méthode de Ferrari telle que l'a présentée M. Hermite. — Comment l'identité de Cauchy et de Cayley peut conduire à la résolution de l'équation du troisième degré.

CHAPITRE IV.

La méthode des notations abrégées de Bobillier et l'homologie dans le plan.. 52

Définition tout à fait générale des coordonnées trilinéaires et tétraédriques par l'emploi du rapport anharmonique. — Méthode des notations abrégées de Bobillier. — Application aux propriétés harmoniques du quadrilatère complet. — Triangles homologiques. — Parti qu'en a tiré von Staudt pour sa théorie. — Tétraèdres homologiques. — L'homologie de Poncelet. — Deux coniques dans le plan peuvent être considérées comme homologiques de douze manières différentes. — Sauf dans un cas très spécial, l'homographie de deux figures planes peut, de deux manières différentes, être ramenée, par le déplacement relatif de l'une des figures, à une homologie. Sauf dans le cas où le centre d'homologie se trouve sur l'axe d'homologie, deux figures homologiques peuvent être mises en

Pages.

perspective d'une infinité de manières. — Deux coniques étant données dans le plan, en faire la perspective de telle manière qu'elles se transforment en deux cercles.

CHAPITRE V.

L'homologie biaxiale.. 68

L'homologie biaxiale de Sylvester. — Comment on la définit. — Elle dépend de neuf constantes et Sylvester paraissait croire que, par un déplacement relatif de deux figures en relation homographique la plus générale, on peut les amener à être les transformées l'une de l'autre dans une homologie biaxiale. — Étude de cette question. — Par le déplacement relatif de deux figures homographiques, on peut ramener les formules qui définissent l'homographie à une forme particulièrement simple qui ne dépend plus que de trois constantes. — Dans le cas où l'homographie est une homologie biaxiale, ces trois constantes doivent satisfaire à une relation; de sorte que l'homographie ne peut s'obtenir, en général, par la combinaison d'une homologie biaxiale et d'un déplacement. — Cela peut se faire au contraire, et d'une infinité de manières, si la relation entre les constantes est vérifiée. — Étude du cas particulier de deux quadriques. Elles ne peuvent se déduire l'une de l'autre par une homologie biaxiale que si elles satisfont à une condition. — Le Chapitre se termine par l'étude des homographies qui conservent le plan de l'infini. — Celles qui conservent en outre le cercle de l'infini se réduisent à une homothétie, dont le centre peut être choisi arbitrairement, précédée ou suivie d'un déplacement. — Celles qui, sans conserver le cercle de l'infini, conservent le plan de l'infini, peuvent être amenées par un déplacement relatif des deux figures à une forme particulièrement simple.

CHAPITRE VI.

Le principe de dualité.. 82

La création, par Poncelet, de la théorie des polaires réciproques a conduit Gergonne à dégager un principe général auquel il donna le nom de *principe de dualité* des propriétés de l'étendue. Ce principe une fois admis devait conduire à la notion des coordonnées tangentielles qui ont été introduites en premier lieu par Plücker et par Chasles. — Quelques théorèmes corrélatifs des plus simples relatifs aux coordonnées ponctuelles et aux coordonnées tangentielles dans l'espace. — Degré et classe d'une surface. — Propriétés de la tangente; tangentes conjuguées. — Définitions diverses que l'on peut donner des coordonnées tangentielles. — Théorème de Carnot sur les transversales. — Centre des moyennes harmoniques.

CHAPITRE VII.

Les figures corrélatives.. 93

Opinion de Michel Chasles relative à l'emploi des méthodes de transformation. — Elle paraît trop absolue. — Emploi des coordonnées tangentielles dans l'homographie et dans la transformation corrélative. — Définition complète de cette dernière transformation. — Dans le cas le

Pages.

plus général, elle se réduit à une transformation par polaires réciproques, précédée ou suivie d'un déplacement. — Application de cette proposition générale aux transformations considérées pour la première fois par Möbius et dans lesquelles à un point correspond un plan passant par ce point.

CHAPITRE VIII.

Les coniques et les divisions homographiques........................... 105

Du rapport anharmonique dans la théorie des sections coniques. — Les coniques sont des courbes unicursales. — Relations entre leurs divers modes de représentation. — Intersection des coniques et des courbes de degré supérieur. — Théorème de Paul Serret. — Le rapport anharmonique des droites qui joignent un point variable d'une conique à quatre points fixes de cette courbe est constant. — Réciproque. — Théorèmes corrélatifs. — Définitions diverses du rapport anharmonique de quatre points pris sur une conique. — Faisceaux et divisions homographiques. — Théorème fondamental sur le lieu du point d'intersection de deux rayons homologues ou sur l'enveloppe de la droite qui joint deux points homologues. — Théorème de Pascal. — Théorèmes de Newton et de Maclaurin. — Démonstration nouvelle du théorème de Pascal. — Théorèmes de Desargues et de Sturm. — Premières notions sur l'involution. — Différentes manières de la définir. — Application du théorème de Desargues à la construction d'une conique déterminée par cinq points. — Les divisions homographiques sur une conique. — Comment elles conduisent à des solutions élégantes pour les principaux problèmes relatifs aux divisions et aux faisceaux homographiques. — Etude du problème dans lequel il s'agit de construire un polygone dont les sommets soient sur une conique donnée et dont les côtés passent par des points donnés ou soient tangents à des coniques inscrites dans la proposée. — Applications nouvelles du théorème de Paul Serret. — Si deux triangles jouissent de l'une des propriétés suivantes : être conjugués par rapport à une conique, être circonscrits ou inscrits à une même conique, ils possèdent les deux autres. — Corollaires. — On ne peut, en général, inscrire à une conique un triangle circonscrit à une autre conique, et quand le problème est possible, il a une infinité de solutions. — Conditions de possibilité dans le cas de deux cercles. — Étant données deux coniques, il existe en général quatre coniques par rapport auxquelles elles sont polaires réciproques l'une de l'autre.

LIVRE II.

DÉFINITIONS MÉTRIQUES.

CHAPITRE I.

Les relations métriques dans le plan..................................... 137

Définition de l'angle et de l'abscisse. — Droites isotropes. — Discussion de la formule donnant la distance de deux points. — Relation établie

Pages.
par Laguerre entre l'angle et le rapport anharmonique. — Transformation que subissent les relations contenant des angles lorsqu'on fait une homographie dans le plan. — Applications diverses. — Théorème de Carnot. — Extension des relations trigonométriques aux triangles imaginaires. — Système particulier de coordonnées rectilignes formé avec des axes isotropes. — Propriétés du quadrilatère dont les quatre côtés sont des droites isotropes. — Points associés. — Les propriétés de ces points permettent d'établir une relation entre deux définitions fondamentales du cercle. — Définition d'une classe de courbes planes de tous les degrés auxquelles on peut étendre les propositions établies pour le cercle. — Quand une courbe peut être définie par l'une ou l'autre de ces propriétés : elle est le lieu des points tels que le rapport des produits de leurs distances à deux groupes de points soit constant ou le lieu des points tels que l'on voie de ces points certains segments fixes sous des angles dont la somme soit constante, elle possède ces deux propriétés avec une double infinité de systèmes de pôles ou de segments. — Systèmes orthogonaux formés avec les courbes de cette nature. — Comment les propriétés des points associés permettent de déduire la définition focale des coniques des propositions relatives au rapport anharmonique.

CHAPITRE II.

Étude d'une classe particulière de courbes analogues aux coniques 161
On cherche d'abord la courbe dont la tangente intercepte sur n droites fixes des segments liés par la relation linéaire la plus générale. — Cette courbe est, en général, de $n^{\text{ième}}$ classe et elle admet la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $n-1$. — Extension à cette courbe de la propriété fondamentale de la parabole, qui correspond à l'hypothèse $n=2$. — En l'étudiant on est conduit à un problème d'analyse intéressant : Étant donnée une forme algébrique, trouver deux formes dont elle soit le jacobien. — Autres propriétés géométriques de la courbe. — Extension de ses propriétés à toute courbe de $p^{\text{ième}}$ classe, ayant une tangente multiple d'ordre $p-1$. — Cas particulier des coniques. — Courbes de $n^{\text{ième}}$ classe pour lesquelles la droite de l'infini n'est plus qu'une tangente multiple d'ordre $n-2$. — Courbe enveloppe de la droite mobile qui forme avec n couples de droites fixes n triangles dont les périmètres sont liés par une relation linéaire quelconque. — Elle conserve cette définition avec une infinité d'autres couples de droites fixes. — Problèmes nouveaux d'analyse auxquels on est ainsi conduit.

CHAPITRE III.

Les éléments métriques dans l'espace 177
Discussion de la formule qui donne la distance de deux points. — Droites isotropes. — Plans isotropes. — La géométrie dans un plan isotrope. — Définition de l'angle et de l'abscisse. — Valeurs diverses que l'on peut attribuer à l'angle de deux directions. — La définition de l'angle par un rapport anharmonique. — Droite perpendiculaire à un plan. — Distance d'un point à un plan, à une droite. — Discussion. — La distance d'un point à une droite a son carré décomposable en deux facteurs. — Propriété du tétraèdre dont les faces sont des plans isotropes.

CHAPITRE IV.

Pages.

Génératrices rectilignes de la sphère 187

Les quadriques et leurs génératrices rectilignes. — Projection stéréographique. — Expressions diverses du rapport anharmonique de quatre génératrices. — Il est égal au rapport anharmonique des quatre points où elles coupent une section plane de la surface, pris par rapport à cette section. — Génératrices rectilignes de la sphère. — Système de coordonnées déterminé sur la sphère par les deux familles de génératrices. — On peut choisir les deux coordonnées de telle manière qu'une même substitution linéaire effectuée sur ces coordonnées définisse, soit une rotation finie de la sphère, soit un déplacement des axes coordonnés. — Formules relatives à ce sujet. — Expression en fonction des nouvelles coordonnées de la distance de deux points de la sphère et, par conséquent, de l'angle de deux directions. — Relation métrique fondamentale relative à une génératrice rectiligne de la sphère.

CHAPITRE V.

Trigonométrie sphérique 201

Les triangles que l'on étudiera dans ce Chapitre ne sont pas soumis aux restrictions habituelles. Ils peuvent être réels ou imaginaires et, s'ils sont réels, leurs côtés ne sont pas assujettis à la condition d'être positifs et inférieurs à π. — Triangle polaire d'un triangle donné. — Première méthode : Elle repose sur la considération de triangles dont un des côtés est formé par une génératrice rectiligne de la sphère; et elle conduit à trois formules fondamentales dont découlent toutes les autres relations de la Trigonométrie sphérique. — Seconde méthode plus large, reposant sur l'emploi de formules données précédemment. — Relations diverses; formules de Delambre. Analogies de Néper. — Différents changements qu'on peut faire subir aux éléments sans que les formules cessent d'être vérifiées. — Définition de l'aire d'un triangle sphérique. Les lignes trigonométriques de cette aire sont des fonctions rationnelles des coordonnées des trois sommets du triangle.

CHAPITRE VI.

Segments associés sur la sphère 216

Définition du segment associé à un segment donné. — Pour une théorie complète il faut associer à ces segments les segments diamétralement opposés. Relations entre ces segments. — Cinq théorèmes fondamentaux. — Démonstration géométrique du troisième théorème qui établit une relation entre l'aire d'un triangle sphérique et le rapport des distances de l'un de ses sommets à deux points de la sphère. — Propriétés focales des coniques sphériques. — Courbes sphériques lieux des points tels que le rapport des produits de leurs distances à deux séries de pôles fixes, en même nombre dans les deux séries, soit constant. — Une courbe sphérique peut être définie, soit par la propriété précédente, soit par celle-ci : elle sera le lieu des points M tels que les triangles sphériques formés par ce point avec n segments fixes aient des aires dont la somme algébrique soit constante. Quelle que soit celle des deux propriétés par

Pages.

laquelle elle sera définie, elle pourra l'être par l'une et par l'autre d'une infinité de manières différentes. — Courbes sphériques lieux des points tels que les produits de leurs distances à deux séries de diamètres de la sphère, en même nombre dans les deux séries, soient dans un rapport constant. — Principales propriétés de la conique de Chasles. — Systèmes orthogonaux formés avec les courbes définies par les différentes propriétés que l'on vient d'énumérer. — Application de la méthode des figures supplémentaires. — Indication de l'appui que la Géométrie sphérique peut apporter à la Géométrie plane.

LIVRE III.

LES THÉORÈMES DE PONCELET.

CHAPITRE I.

Étude d'un système particulier de coordonnées 235

Définition du système de coordonnées que l'on va étudier. — Les lignes coordonnées sont les tangentes d'une conique. — Comment on est conduit à ce système. — Représentation étudiée par Chasles d'une surface du second degré sur un plan double. — Représentation des sections planes, des génératrices rectilignes. — Examen de diverses équations; équations symétriques par rapport aux deux coordonnées; équations non symétriques. — Emploi du système pour montrer que certaines formes typiques contenant en apparence le nombre de constantes nécessaire sont impropres à représenter une courbe du quatrième degré. — Courbes passant par les intersections de deux systèmes de n droites. — Cas où ces droites sont tangentes à une conique. — Si un quadrilatère inscrit à une conique est circonscrit à une autre conique, il y a une infinité de quadrilatères ayant la même propriété. — Applications du théorème général concernant les courbes du troisième degré. — Il y a une double infinité de quadrilatères complets dont les six sommets appartiennent à une cubique. — Courbes d'ordre $n-1$ passant par tous les points d'intersection de n droites. — Cas où ces droites sont tangentes à une conique.

CHAPITRE II.

Les théorèmes de Poncelet 250

Application nouvelle du théorème démontré à la fin du Chapitre précédent. Si un polygone est circonscrit à une conique (K) et inscrit à une conique (C), il existe une suite continue, simplement infinie, de polygones satisfaisant aux mêmes conditions. Par conséquent, il sera, en général, impossible de circonscrire à une conique un polygone d'un nombre de côtés déterminé inscrit dans une autre conique. — Étude de la suite continue de polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre quand elle existe. Tous les points d'intersection de deux côtés de ces polygones décrivent des coniques ou des droites. Quand le polygone a un nombre pair de côtés, les points de concours des côtés opposés

Pages.
décrivent une droite et les diagonales joignant les sommets opposés passent par un point fixe qui est le pôle de la droite. — Application au cas de deux cercles. Condition pour qu'un quadrilatère circonscrit à l'un soit inscrit à l'autre. — Compléments ajoutés aux résultats précédents par la considération d'une ligne brisée inscrite dans une conique et circonscrite à une autre conique. — Démonstration nouvelle du théorème de Poncelet. — Quand un polygone est inscrit à une conique (C) et circonscrit à une conique (K), les coniques décrites par les intersections de ses côtés font partie du faisceau tangentiel déterminé par (C) et par (K); et les coniques enveloppes de ses diagonales font partie du faisceau ponctuel déterminé par les mêmes coniques. — Explication du paradoxe soulevé par les théorèmes de Poncelet. Elle se trouve dans l'existence de polygones dont les côtés sont repliés les uns sur les autres Si l'on écrit d'une façon suffisamment précise les conditions auxquelles doit satisfaire un polygone pour être inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, on obtient un système d'équations en nombre supérieur d'une unité à celui des inconnues. — Quand il y a une suite continue de polygones inscrits à une conique (C) et circonscrits à une conique (K), certains d'entre eux se réduisent à des lignes repliées. Il y a trois espèces de lignes repliées donnant lieu à des identités remarquables. — Rapports de cette théorie avec celle de la transformation des fonctions elliptiques.

CHAPITRE III.

Le théorème général de Poncelet 267

Si un triangle mobile est circonscrit à une conique (K) et si deux de ses sommets décrivent des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à (K), il en est de même du troisième sommet. — Pour établir cette proposition fondamentale, on s'appuie sur un lemme démontré au n° 88 : Si un triangle mobile demeure circonscrit à une conique fixe, il existe, à chaque instant, une conique tangente en chacun de ses sommets aux trajectoires de ces sommets. — Ce lemme, qui donne le moyen de construire la tangente à la courbe décrite par l'un des sommets quand on connaît les tangentes aux courbes décrites par les deux autres sommets, permet de déduire le théorème fondamental d'une propriété presque évidente des coniques homofocales. — Extension à un polygone d'un nombre quelconque de côtés du théorème démontré pour le triangle. — Emploi de l'Algèbre pour démontrer les théorèmes précédents par l'intégration d'une équation différentielle. — Comment, du théorème général, on peut revenir au cas particulier où le polygone est inscrit dans une conique. — Forme que Chasles a su donner aux théorèmes de Poncelet. — Polygones de périmètre maximum inscrits dans une ellipse, ou de périmètre minimum circonscrits à une ellipse. — Propositions diverses relatives à ces polygones.

LIVRE IV.

LA GÉOMÉTRIE CAYLEYENNE.

CHAPITRE I.

Pages.

Origines de la Géométrie Cayleyenne.......... 289

Différence essentielle entre la Géométrie plane et la Géométrie sphérique : dans celle-ci, les notions d'angle et de distance sont en étroite corrélation ; il n'en est plus de même pour celle-là. Ce que devient la Géométrie sphérique quand on projette la sphère sur un plan en plaçant le point de vue au centre. — On est ainsi conduit à une Géométrie plane dans laquelle toute mesure dérive du rapport anharmonique. — Géométrie sur une droite. — Géométrie dans le plan et dans l'espace. — Toutes les définitions métriques se rattachent, dans l'espace, à une quadrique fixe qu'on appelle l'*absolu*. — Distance de deux points. — Angle de deux plans ou de deux droites. — On n'étudiera dans la suite que les cas où l'*absolu* est une surface imaginaire ou bien une surface réelle convexe. — La Géométrie Cayleyenne comprend comme cas limite la Géométrie Euclidienne; il suffit de supposer que l'*absolu* se réduit au cercle imaginaire de l'infini. — Discussion de la formule qui donne la distance de deux points. — Propositions relatives à deux droites qui ne se coupent pas; elles ont, en général, deux perpendiculaires communes; propriétés de maximum et de minimum relatives à ces perpendiculaires communes. — Distance d'un point à une droite. — Formules relatives aux courbes et aux surfaces.

CHAPITRE II.

Les déplacements Cayleyens.......... 318

Quelques mots sur les diverses Géométries que l'on pourrait imaginer et sur une propriété caractéristique de la Géométrie Cayleyenne. — Transformation d'une forme quadratique homogène en elle-même par des substitutions linéaires. — Cas particulier des formes à quatre variables. — Quelques propriétés des génératrices rectilignes d'une quadrique, intervention du Hessien, distinctions en deux systèmes. — Toutes les transformations continues d'une quadrique en elle-même s'obtiennent en soumettant à deux homographies distinctes les paramètres des deux systèmes de génératrices. — Application aux déplacements Cayleyens. — Étude préliminaire du cas où les génératrices de l'un des systèmes ne sont pas déplacées par la transformation. — Théorie géométrique des déplacements correspondants que l'on appelle *Riemanniens* parce qu'ils ne sont réels que si l'*absolu* est imaginaire. La théorie analytique de ces déplacements se rattache à l'identité célèbre de *Lagrange*, d'après laquelle le produit de deux sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés. Emploi des quaternions. — Retour à la théorie générale. On obtient, en dehors des déplacements précédents, trois espèces distinctes nouvelles : les retournements, les rotations et les déplacements hélicoïdaux ; ces derniers sont les plus généraux. — Définitions et propriétés de ces déplacements; analogies avec la Géométrie ordinaire. — Tout

Pages.

déplacement résulte, d'une infinité de manières, de la composition de deux retournements. — Surface lieu des points à égale distance d'une même droite. — Déplacement continu. Courbes analogues à l'hélice, au cercle.

CHAPITRE III.

La Trigonométrie Cayleyenne.. 341

Les propositions relatives au déplacement montrent immédiatement que, dans la Géométrie Cayleyenne comme dans la Géométrie ordinaire, il y a trois relations nécessaires entre les six éléments d'un triangle. — Recherche de ces relations. Elles sont les mêmes que celles qui existent entre les éléments d'un triangle sur une sphère dont le rayon est réel ou est une imaginaire pure. — Au contraire, les relations entre les six éléments d'un trièdre sont les mêmes que dans la Géométrie Euclidienne. — Application de la théorie des déplacements à la définition du volume dans la nouvelle Géométrie. — Si l'*absolu* est imaginaire, le volume total de l'espace est fini. — Définition de l'aire. Aire d'un triangle rectiligne quelconque. Son expression en fonction des angles du triangle. — Propriété des sphères Cayleyennes. Sur une telle sphère, la trigonométrie est la même que sur une sphère Euclidienne de rayon convenablement choisi. — Système triple orthogonal analogue à celui qui sert à définir les coordonnées polaires. — La ligne droite, comme dans la Géométrie ordinaire, est le plus court chemin d'un point à un autre. — Des trois sortes de sphères qui se présentent dans la Géométrie non Euclidienne. — Étude particulière des *horisphères*, c'est-à-dire de celles qui ont leur centre sur l'*absolu*. — Application à la classification des déplacements réels que l'on peut utiliser dans l'espace non Euclidien. — Équations qui déterminent les trajectoires des différents points. — Système triple orthogonal comprenant deux familles de plans perpendiculaires et une famille de surfaces pseudocylindriques ayant toutes le même axe.

LIVRE V.

DE L'INVERSION.

CHAPITRE I.

L'inversion. Ses propriétés essentielles.. 365

L'inversion a été introduite dans la science par Sir *William Thomson* (Lord *Kelvin*). — Comment on peut la rattacher à l'inversion quadrique de Hirst. — Relation entre les points homologues. — Les droites isotropes ont pour homologues des droites isotropes. — Cône isotrope correspondant à un plan isotrope. — Principe de la conservation des angles. — Relations entre deux courbes ou deux surfaces homologues. — Des développables isotropes; leurs principales propriétés. — Focales d'une surface ou d'une courbe. — Focales singulières. — L'inversion, qui ne conserve pas les focales singulières, conserve les focales ordinaires. — Transformations qui résultent de l'application successive de plusieurs inversions. Elles peuvent toujours se réduire à une inversion ou à une homothétie, précédées ou suivies d'un déplacement. — Élément linéaire de l'espace; comment il est transformé par une inversion.

CHAPITRE II.

Pages.

Les coordonnées pentasphériques 379

Relation quadratique homogène entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères distinctes. — Définition du système de coordonnées pentasphériques le plus général; on se bornera, dans la suite, au cas où les sphères coordonnées sont orthogonales. — La théorie de cinq sphères deux à deux orthogonales se rattache directement à celle des substitutions linéaires orthogonales. — Conséquences, relations identiques entre les puissances d'un point relatives à cinq sphères orthogonales. — Chacune des cinq sphères admet pour tétraèdre conjugué celui qui est formé par les centres des quatre autres. — Groupe de 16 points, dont les coordonnées ne diffèrent que par le signe. — Élément linéaire de l'espace. — Angle de deux directions. — Sphères et plans. — Comment on détermine le centre et le rayon d'une sphère dont l'équation est donnée. — Les six coordonnées d'une sphère; formules qui s'y rapportent. — Changement de coordonnées. — Problèmes élémentaires relatifs aux sphères. — Formules de Géométrie infinitésimale en coordonnées pentasphériques.

CHAPITRE III.

Les cyclides en coordonnées cartésiennes 405

La cyclide de Dupin. — Définition des cyclides les plus générales; celles du quatrième ordre ont le cercle de l'infini comme ligne double; celles du troisième ordre passent simplement par ce cercle. — Rapports avec la théorie des surfaces générales du troisième ordre et des surfaces du quatrième ordre à conique double. Toute cyclide ayant un point double à distance finie est l'inverse ou la podaire d'une quadrique. — Sections planes et sphériques d'une cyclide. — Recherche des sections circulaires et des sphères doublement tangentes. — Cyclides du quatrième ordre, équation réduite; cyclides du troisième ordre, deux méthodes. — Résultats généraux; il y a cinq séries de sections circulaires; leur génération. — Plans tangents doubles. — Surfaces anallagmatiques de Moutard. — Étude d'une famille de quadriques inscrites dans une cyclide du quatrième ordre. — Des quadriques qui coupent la cyclide suivant deux biquadratiques sphériques. — Ce que deviennent ces quadriques lorsque la cyclide se réduit au troisième degré. — Propriétés diverses relatives aux *inversions quadriques* qui conservent la surface cubique la plus générale.

CHAPITRE IV.

Les cyclides en coordonnées pentasphériques 434

Notions préliminaires sur les formes quadratiques homogènes. — Rappel de la loi d'inertie. — Définition de la forme adjointe. Quand le déterminant de la forme devient nul, sans que tous ses mineurs le soient, la forme adjointe est un carré parfait. — Réduction de deux formes quadratiques à des sommes composées des mêmes carrés. — Discussion du problème dans le cas où l'équation dont il dépend a toutes ses racines inégales. — L'une ou l'autre des deux formes contient au moins autant

Pages.

de carrés positifs, ou de carrés négatifs, que cette équation a de couples de racines imaginaires conjuguées. — Application à l'étude des cyclides. Elles peuvent être représentées par une équation homogène du second degré si l'on emploie les coordonnées pentasphériques. — Tant qu'elles ne sont pas des inverses de quadriques, leur équation peut être débarrassée de tous les rectangles. Il suffit, pour cela, de résoudre une équation du cinquième degré qui a, au plus, deux racines imaginaires.

CHAPITRE V.

Les cyclides et leurs sphères principales.............................. 446

Condition de contact d'une sphère et de la cyclide. — Conséquences : la cyclide est de douzième classe; d'un point on peut lui mener douze normales. — Sphères doublement tangentes; elles se partagent en cinq séries et coupent chacune la cyclide suivant deux cercles. — Définition de chaque série; les sphères bitangentes sont orthogonales à l'une des sphères coordonnées et leurs centres décrivent une quadrique. — Relations entre les cercles de la cyclide; plans tangents doubles; démonstrations géométriques et analytiques. — Focales singulières et focales ordinaires de la cyclide. — Les seize droites de la cyclide; leur construction et leurs relations. — Comment, lorsque l'on connaît un mode de génération de la cyclide, on peut en déduire tous les autres. — Théorème de Chasles relatif aux quadriques homofocales.

CHAPITRE VI.

Le système triple orthogonal formé de trois familles de cyclides 462

On peut, avec des cyclides, obtenir un système triple orthogonal tout semblable à celui des surfaces homofocales du second degré. — Les cyclides qui le composent sont toutes homofocales, et les trois familles du système sont représentées par une seule équation. — Toutes les fois que deux ou trois familles de surfaces orthogonales sont, comme il arrive ici, représentées par une seule équation, elles sont homofocales. — Emploi du système pour la discussion des différentes formes de cyclides. — Ombilics. — Sections circulaires. — Nombre des séries de sections circulaires réelles pour chacune des familles du système triple orthogonal.

CHAPITRE VII.

Un mode de transformation de l'espace qui se présente dans l'étude des cyclides.. 482

Des surfaces que Moutard nommait *anallagmatiques*. — Modes de génération de ces surfaces donnés par *Moutard* et *Laguerre*. — On peut leur rattacher une transformation ponctuelle de l'espace, envisagée par l'Auteur dès 1865. — Cette transformation est la plus générale de celles qui font correspondre à tout plan une sphère. — Ses principales propriétés; elle n'est pas birationnelle et fait correspondre à toute figure du premier espace une figure anallagmatique du second. — Applications à la théorie des cyclides. — La transformation permet de substituer à la

Géométrie Cayleyenne une géométrie nouvelle, dans laquelle les géodésiques ne sont plus des droites, mais des cercles orthogonaux à une sphère fixe (S) et dans laquelle les angles se mesurent comme en Géométrie Euclidienne. — Comment, dans le plan, tous les résultats précédents pourraient être déduits de quelques considérations géométriques. — Quand on transforme par une inversion la sphère (S) en un plan, on obtient une Géométrie qui a été utilisée par *Poincaré* dans ses admirables travaux sur les fonctions fuchsiennes.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
57033 Quai des Grands-Augustins, 55.

